

V. ȘTEFĂNESCU

M. ENACHE

T. POPA

matematici contemporane

nivel elementar și mediu

VASILE ȘTEFĂNESCU • MARIN ENACHE • TUDOR POPA

MATEMATICI CONTEMPORANE

Nivel elementar și mediu

Coordonatori :

acad. prof. OCTAV ONICESCU

acad. prof. NICOLAE TEODORESCU



EDITURA ȘTIINȚIFICĂ ȘI ENCICLOPEDICĂ
BUCUREȘTI, 1979

CUPRINS

Prefață

PARTEA I

Capitolul 1

Mulțimi

1.1. Descriere. Notatii	19
1.2. Egalitatea mulțimilor	22
1.3. Mulțime cu un element	23
1.4. Mulțimea vidă	23
1.5. Diagrame Venn.	24
1.6. Submulțimi	25
1.7. Submulțimi complementare	26
1.8. Operații cu mulțimi.	31
1.8.1. Intersecția	31
1.8.2. Proprietățile intersecției	32
1.8.3. Reuniunea	32
1.8.4. Proprietățile reuniunii	34
1.8.5. Diferența	34
1.8.6. Diferența simetrică	35
1.8.7. Proprietățile diferenței	36
1.8.8. Distributivitatea intersecției față de reuniune	37
1.9. Număr natural	38
1.9.1. Noțiunea de corespondență biunivocă	38
1.9.2. Cardinalul unei mulțimi	41
1.9.3. Adunarea cardinalelor	41
1.9.4. Proprietățile operației de adunare a cardinalelor	42
1.9.5. Operații cu cardinale în cazul cînd mulțimile nu sînt disjuncte	42
1.9.6. Formarea succesivă a numerelor naturale	44
1.9.7. Reprezentarea numerelor naturale pe axa numerică	45

1.9.8. Mulțime finită	45
1.9.9. Adunarea numerelor naturale	46
1.9.10. Scăderea numerelor naturale	46
1.9.11. Înmulțirea numerelor naturale	47
1.9.12. Proprietățile înmulțirii	47
1.9.13. Operații cu puteri	49
1.9.14. Divizibilitatea numerelor naturale	50
1.9.15. Criterii de divizibilitate	50
1.9.16. Ecuații în N	51
1.9.17. Exerciții rezolvate	51
1.9.18. Exerciții și probleme propuse	57

Capitolul 2

Baze de numerație

2.1. Sisteme de numerație	81
2.2. Numerația în baza 10.	82
2.3. Numerația în alte baze	83
2.4. Transformarea bazelor.	86
2.5. Diferite alte baze de numerație	88
2.6. Operații cu numere în diferite baze	89
2.7. Împărțirea numerelor în baza 5	94
2.8. Operații binare	94
2.9. Exerciții și probleme	96

Capitolul 3

Numere întregi

3.1. Jocul perechilor	100
3.2. Perechi echivalente	101
3.3. Noțiunea de număr întreg	101
3.4. Modulul unui număr întreg	104
3.5. Reprezentarea mulțimii numerelor întregi pe o dreaptă	105
3.6. Compararea numerelor întregi pe axa numerică	106
3.7. Adunarea numerelor întregi	108
3.8. Suma a două numere întregi de semne contrare	110
3.9. Proprietățile operației de adunare	112
3.10. Scăderea numerelor întregi	113
3.11. Reprezentarea operațiilor cu numere întregi pe axă	114
3.12. Înmulțirea numerelor întregi.	115
3.13. Ecuații	117
3.14. Exerciții și probleme	120

Capitolul 4

Numere raționale

4.1. Frații echivalente	134
4.2. Amplificarea și simplificarea fracțiilor.	136

4.3. Numere raționale	136
4.4. Reprezentarea pe o dreaptă a numerelor raționale	137
4.5. Adunarea numerelor raționale	138
4.6. Proprietățile operației de adunare în Q	139
4.7. Partea întreagă a unui număr rațional	140
4.8. Partea fracționară a unui număr rațional	140
4.9. Înmulțirea numerelor raționale	141
4.10. Proprietățile înmulțirii	141
4.11. Ecuații în Q	142
4.12. Frații zecimale	142
4.13. Exerciții și probleme	143

Capitolul 5

Relații — Funcții

5.1. Perechi de elemente	159
5.2. Produsul cartezian al mulțimilor	160
5.3. Distributivitatea produsului cartezian față de reuniune și intersecție	162
5.4. Relații	163
5.5. Diagrama unei relații	164
5.6. Inversa unei relații	165
5.7. Relații simetrice	166
5.8. Relații tranzitive	166
5.9. Relații funcționale	166
5.10. Mărimi direct și invers proporționale	168
5.10.1. Proporții	169
5.10.2. Proprietățile proporției	169
5.11. Exerciții rezolvate, relații și funcții	170
5.12. Exerciții și probleme	173

Capitolul 6

Statistica

6.1. Populație statistică. Eșantion	195
6.2. Înregistrarea și clasificarea datelor	196
6.3. Frecvența relativă	197
6.4. Poligoane de frecvențe	199
6.5. Frecvențe cumulate	200
6.6. Descrierea numerică a datelor statistice	200
6.6.1. Modulul	201
6.6.2. Mediana	201
6.6.3. Media aritmetică	204
6.7. Exerciții rezolvate	205
6.8. Exerciții și probleme	206

Capitolul 7 Probabilități

7.1. Noțiunea de eveniment	208
7.2. Mulțimea evenimentelor unui experiment	208
7.3. Probabilitatea unui eveniment	209
7.4. Probabilitatea evenimentelor sigure și imposibile	211
7.5. Probabilitatea evenimentelor compuse	212
7.6. Legătura dintre frecvență și probabilitate	213
7.7. Utilizarea diagramelor pentru a reprezenta mulțimea tuturor evenimentelor posibile ale unui experiment	214
7.8. Utilizarea diagramelor pentru calculul probabilităților	216
7.9. Exerciții și probleme	217

Capitolul 8 Logica matematică

8.1. Algebra propozițiilor	221
8.2. Tabloul de adevăr	221
8.3. Disjuncția a două propoziții	221
8.4. Conjuncția a două propoziții	222
8.5. Negația unei propoziții	223
8.6. Implicația logică	223
8.7. Echivalența logică	224
8.8. Predicat. Cuantificatori	225
8.9. Exerciții rezolvate	227
8.10. Exerciții și probleme	230

Capitolul 9 Calculul vectorial

9.1. Noțiunea de vector	239
9.2. Vectori echipolenți	240
9.3. Operații cu vectori	242
9.3.1. Adunarea vectorilor	242
9.3.2. Diferența vectorilor	243
9.3.3. Înmulțirea unui vector cu un scalar	256
9.4. Exerciții și probleme	247

Capitolul 10 Organizarea și prelucrarea datelor

10.1. Generalități	249
10.2. Exerciții	253

Capitolul 11

Probleme cu conținut practică	254
---	-----

Capitolul 12

Exerciții și probleme date la admiteri în treapta întâi	316
---	-----

PARTEA A II-A

Capitolul 13

Logica matematică

13.1. Logica propozițiilor	339
13.2. Ordinea operațiilor logice	339
13.3. Implicația logică	340
13.4. Formule identic adevărate și identic false	341
13.5. Tabele de adevăr	343
13.6. Forme normale	344
13.7. Principii logice	345
13.7.1. Legea contrapozitiei	346
13.7.2. Tautologii	346
13.7.3. Consecințe logice	346
13.7.4. Modus ponens	347
13.7.5. Modus tollens	347
13.7.6. Echivalența logică	347
13.7.7. Demonstrație prin absurd	347
13.8. Logica predicatelor	348
13.8.1. Generalități	348
13.8.2. Cuantificatorii „oricare” și „există”	350
13.8.3. Noțiunea de formulă în logica predicatelor	351
13.8.4. Negația cuantificatorilor existențiali și universali	352
13.8.5. Scheme cu contacte și semnificația lor logică	353
13.8.6. Exerciții rezolvate	355
13.8.7. Exerciții și probleme	356

Capitolul 14

Mulțimi

14.1. Noțiuni generale. Definiții. Notatii	364
14.2. Operații cu mulțimi	365
14.2.1. Reuniunea	365
14.2.2. Proprietățile reuniunii	365
14.2.3. Intersecția	365
14.2.4. Proprietățile intersecției	366
14.3. Legi distributive	366
14.4. Diferența	366
14.5. Diferența simetrică	367
14.6. Complementara	367
14.7. Produs cartezian	368
14.8. Exerciții și probleme	369

Capitolul 15**Relații**

15.1. Relații funcționale	377
15.2. Aplicații	379
15.2.1. Aplicația surjectivă	379
15.2.2. Aplicația injectivă	381
15.2.3. Aplicația bijectivă	381
15.3. Aplicația reciprocă a unei aplicații bijective	382
15.4. Compunerea relațiilor	382
15.5. Exerciții rezolvate	383
15.6. Exerciții și probleme	385

Capitolul 16**Legea de compoziție internă**

16.1. Proprietățile unei legi de compoziție internă	394
16.2. Distributivitatea unei legi de compoziție față de o altă lege de compoziție	396
16.3. Omomorfism. Izomorfism	396
16.4. Exerciții și probleme rezolvate	397
16.5. Exerciții și probleme	402

Capitolul 17**Structuri algebrice**

17.1. Grup	407
17.1.1. Proprietățile unui grup	408
17.1.2. Simetricul compusului a două elemente	408
17.2 Subgrup	409
17.3. Inel	412
17.4. Corp	414
17.5. Subcorp	415
17.6. Exerciții rezolvate	416
17.7. Spațiu vectorial	417
17.7.1. Aplicații liniare	419
17.7.2. Consecințe deduse din axiomele spațiului vectorial	419
17.7.3. Exemple de spații vectoriale	419
17.7.4. Combinație liniară a vectorilor	423
17.7.5. Independența liniară a vectorilor	423
17.7.6. Produsul scalar într-un spațiu vectorial peste corpul \mathbb{R}	424
17.7.7. Vectori ortogonali. Norma unui vector	426
17.7.8. Spațiul metric. Distanță	429
17.7.9. Produsul vectorial	430
17.7.10. Produsul mixt a trei vectori	434
17.7.11 Exerciții rezolvate	436
17.8. Algebra Boole	437
17.9. Exerciții și probleme	439

Capitolul 18

Construcții algebrice de mulțimi

18.1. Inelul numerelor întregi	453
18.1.1. Relația de echivalență în N^2	453
18.1.2. Clase de echivalență	454
18.1.3. Mulțimea cit	454
18.1.4. Reprezentarea canonică a numerelor întregi	455
18.1.5. Adunarea pe N^2	456
18.1.6. Operația de adunare este compatibilă cu relația de echivalență R	456
18.1.7. Adunarea pe Z	457
18.1.8. Izomorfismul structurilor $(N, +)$ și $(Z^+, +)$	458
18.1.9. Scăderea în Z	459
18.1.10. Relația de ordine în $(Z, +)$	459
18.1.11. Izomorfismul structurilor (Z^+, \leq) și (N, \leq)	460
18.1.12. Înmulțirea numerelor întregi	460
18.1.13. Regula semnelor la înmulțire	462
18.2. Mulțimea numerelor raționale	463
18.2.1. Numărul rațional 0	464
18.2.2. Înmulțirea numerelor raționale	465
18.2.3. Proprietățile înmulțirii	465
18.2.4. Mulțimea numerelor raționale nenule	466
18.2.5. Mulțimea numerelor raționale	467
18.2.6. Adunarea în Q	467
18.2.7. Relația de ordine în Q	469
18.3. Relația de congruență în mulțimea Z	469
18.3.1. Mulțimea cit	470
18.3.2. Reprezentarea canonică	471
18.3.3. Operația $+$ în Z/aZ	471
18.3.4. Operația de înmulțire în Z/aZ	472
18.3.5. Operația \times în Z/aZ	473
18.3.6. Aplicații	474
18.4. Numere reale	475
18.4.1. Proprietăți	476
18.5. Numere complexe	476
18.5.1. Generalități	476
18.5.2. Baza canonică a spațiului vectorial $(K, +, \times)$	479
18.5.3. Izomorfismul mulțimii R cu o submulțime a lui K	479
18.5.4. Forma trigonometrică a unui număr complex	481
18.5.5. Formula lui Moivre	481
18.6. Exerciții și probleme	482

Capitolul 19

Matrici. Determinanți

19.1. Generalități. Definiții	493
19.2. Operații cu matrici	495

19.2.1. Adunarea matricilor	495
19.2.2. Înmulțirea matricilor cu un scalar	495
19.2.3. Produsul matricilor	496
19.3. Determinanți	499
19.3.1. Determinant asociat unei matrici pătrate	499
19.3.2. Regula lui Sarrus	500
19.3.3. Proprietățile determinanților	501
19.4. Matricea inversă	503
19.5. Rangul unei matrici	505
19.6. Exerciții rezolvate	505
19.7. Izomorfismul spațiului vectorial S cu spațiul vectorial al numerelor complexe de forma $a + bi$	506
19.8. Transformări liniare	507
19.9. Transformarea bazelor	508
19.10. Produsul a două transformări liniare	509
19.11. Exerciții	511

Capitolul 20

Calculul informațional

20.1. Energia informațională. Formula Onicescu	522
20.2. Energia informațională a produsului a două experimente independente	523
20.3. Energia informațională condiționată	524
20.4. Entropie. Formula lui Shannon. Proprietăți	530
20.5. Entropia produsului a două experimente independente	530
20.6. Entropia experimentului α condiționat de experimentul β	531
20.7. Exerciții și probleme	533

Capitolul 21

Elemente de teoria jocurilor

21.1. Generalități. Definiții	538
21.2. Matricea unui joc	539
21.3. Valoarea superioară și inferioară a unui joc	540
21.4. Jocuri echilibrate	542
21.5. Cazuri particulare	543
21.6. Relația de dominare într-un joc	544
21.7. Strategii mixte	545
21.8. Strategii mixte optime	547
21.9. Interpretarea geometrică a soluției unui joc de două persoane	550
21.10. Exerciții și probleme	551

Capitolul 22

Metode grafice de rezolvare a problemelor de programare liniară

22.1. Formularea unei probleme de programare liniară	558
22.2. Rezolvarea grafică a problemelor de programare liniară cu două necu-	

noscute	559
22.3 Exerciții și probleme	563
<i>Capitolul 23</i>	
Exerciții de analiză matematică	
23.1. Exerciții rezolvate	570
23.2. Exerciții propuse	593
<i>Capitolul 24</i>	
Probleme cu conținut practice	610
<i>Capitolul 25</i>	
Exerciții și probleme date la admitere în treapta a doua	645
<i>Capitolul 26</i>	
Chestiuni de examen	
26.1. Admitere facultăți (Exerciții rezolvate)	694
26.2. Admitere facultăți (Exerciții nerezolvate)	729
26.3. Olimpiade internaționale	748
26.4. Probleme propuse pentru selecție lot R.S.R., olimpiada națională, iunie 1978	756
26.5. Diverse	759
Indicații și răspunsuri	781

PREFAȚĂ

Mărețele sarcini puse în fața școlii de către Programul Partidului pot fi îndeplinite cu succes numai printr-o muncă de pregătire continuă a cadrelor didactice în spiritul noilor cuceriri ale științei și tehnicii și a multiplelor legături ce trebuie stabilite între școală și viață.

„Acum esențialul va consta în efortul de îmbunătățire a conținutului învățămîntului, de ridicare a nivelului său științific și de legare tot mai strînsă de producție și viață” — arăta tovarășul Nicolae Ceaușescu, secretar general al partidului.

Lucrarea de față se înscrie ca o modestă contribuție la munca de pregătire matematică a tinerei generații, la integrarea învățămîntului cu cercetarea și producția — strategii fundamentale ale partidului nostru în domeniul modernizării și perfecționării învățămîntului românesc.

Matematica, prin esența sa logic-deductivă, poate contribui într-o măsură eficientă la formarea spiritului aplicativ și educarea gândirii practice a elevilor.

De aceea am căutat, pe cît a fost posibil, să propunem exerciții și probleme din domenii mai noi ale matematicilor școlare, punînd accent pe latura lor interpretativă.

În acest spirit ne-am propus să îmbogățim prezenta lucrare printr-un număr mai mare de exerciții și probleme cu caracter practic, propuse ca aplicații ale diferitelor capitole de matematică și cu date luate din diferite domenii de activitate : industrie, construcții, transporturi, agricultură, comerț etc. Ele sînt rezultatul colaborării autorilor cu diverse unități economice și industriale care le-au oferit anumite modele de probleme practice, rezolvate cu ajutorul cunoștințelor de matematică.



Cunoștințele de bază ale matematicii (mulțimi, logică matematică, relații, structuri algebrice, calcul informațional, informatică etc.) sînt prezentate într-o succesiune logică, fluentă, unitară, continuînd tradiția valoroasă a lucrărilor de acest gen apărute sub coordonarea acad. N. Teodorescu. Unul din scopurile esențiale ale acestei lucrări este acela de a prezenta noțiunile matematice cît mai accesibil, propunînd exercițiile și problemele progresiv, în funcție de gradul lor de dificultate.

În prima parte se dă o expunere, pe cît a fost posibil elementară, a cunoștințelor despre mulțimi, logică matematică, conceptele numerice de bază, informatică etc., folosind diverse modele concrete din societate, pentru ca în partea a doua aceste cunoștințe să fie tratate la un nivel mai înalt de abstractizare. Capitolele din prima parte scot în evidență aspectele intuitive ale noțiunilor de probabilitate.

Tot în prima parte se dă o descriere elementară și o definiție a produsului cartezian și a noțiunii matematice de relație, ceea ce permite definirea, într-un mod riguros, a noțiunii de funcție. Aceste probleme sînt aprofundate în partea a doua, unde se introduc noțiunile de aplicație, lege de compoziție etc., în scopul de a defini structurile algebrice fundamentale (grup, inel, corp etc.).

Deoarece teoria informației — capitol ceva mai nou al matematicii — are astăzi numeroase aplicații în diverse domenii de activitate, am socotit necesar să introducem cîteva noțiuni de calcul informațional care se pretează la o prezentare accesibilă tuturor celor care doresc să se inițieze în acest domeniu — ca, de exemplu, energia și entropia unui sistem.

Scopul elementelor de logică matematică prezentate în a doua parte este de a oferi cititorilor elemente de sprijin pentru un studiu mai aprofundat al logicii matematice și a diverselor sale aplicații. Întrucît aparatul elaborat în cadrul logicii matematice se aplică la studiul mecanismelor automate și la sinteza circuitelor, am socotit necesară propunerea unei suite de exerciții de logică matematică aplicate la studiul unor circuite simple.

Deoarece programarea liniară și teoria jocurilor s-au remarcat mai ales prin multiplele aplicații în domenii foarte variate de activitate, am considerat necesară introducerea a două capitole care să cuprindă noțiuni elementare de teoria jocurilor și elemente simple de programare liniară.

Deși teoria jocurilor matematice și programarea liniară au evoluat într-un contact strîns, totuși, nivelul prezentării cunoștințelor de programare liniară în această lucrare nu ne-a oferit posibilitatea să evidențiem legătura dintre ele.

Primele lecții de teoria jocurilor au fost ținute la noi în țară de către academician-profesor Octav Onicescu în anul universitar 1958/1959, sub forma unui curs special. Pentru o cunoaștere mai amplă și detaliată a noțiunilor de programare liniară, recomandăm cartea *Strategia jocurilor cu aplicații la programarea liniară*, de acad. prof. Octav Onicescu.

Menționăm că de un real folos ne-au fost și cursurile de *Teoria jocurilor cu aplicații în științele sociale*, ținute de către prof. univ. Mircea Malița, în cadrul Universității București, precum și lucrarea aceluiași autor *Teoria și practica negocierilor*.

Cunoștințele despre diverse mulțimi numerice: mulțimea numerelor naturale, a numerelor întregi și raționale introduse în prima parte, alături de exercițiile care le urmează, dau posibilitatea cititorilor să facă conexiuni mai largi între diferite cunoștințe, prezentând aceste mulțimi pe baza unor modele simple. Aceste cunoștințe sînt reluate în partea a doua la un nivel superior de generalitate, cînd se trece la construcția sistematică a diverselor mulțimi numerice.

Noțiunile sumare despre vectori și operații cu vectori — introduse în prima parte — sînt tratate mai detaliat în partea a doua, unde se introduce noțiunea de produs scalar și se studiază sistematic spațiul vectorial.

Modelul geometric al spațiului vectorial este folosit pentru tratarea unitară a unor probleme de geometrie și trigonometrie.

Problemele și exercițiile din lucrarea de față reprezintă rodul activității îndelungate de experimentare a acestor noțiuni de către autorii lor în școli de diferite grade și din diferite medii, în perioada 1965—1975.

Datorită spațiului grafic limitat nu s-au putut prezenta în lucrare și anumite scheme de lecții sau probe de control. De asemenea, nu s-au introdus anumite teme experimentate, ca de exemplu: elemente de geometrie descriptivă, elemente de geometrie afină și proiectivă, noțiuni de topologie, simplexe, noțiuni de teoria grafurilor, combinatorică, analiză matematică și ecuații diferențiale cu aplicații în mecanică, statistică matematică etc.

În lucrare sînt prezentate exerciții și probleme date la diferite concursuri și examene — (treapta întâi și treapta a doua, bacalaureat, admitere în învățămîntul superior etc.), care oferă candidaților un material de antrenament pentru examenele viitoare.

Autorii aduc și pe această cale mulțumiri colectivelor din anumite secții ale întreprinderilor: „23 August”, Electronica, I.I.R.U.C., AVERSA, Mecanică fină, IPROLAM din Capitală,

care au oferit modele ale unor exerciții și probleme practice, precum și ale liceelor de Mecanică nr. 1, Alexandru Sahia, George Coșbuc, Economic nr. 3, ca și ale școlilor generale nr. 122, 86, 28, 51. și tuturor școlilor din țară, unde au fost experimentate anumite teme.

În mod deosebit, exprimăm sentimentele noastre de gratitudine acad. prof. O. Onicescu și acad. prof. N. Teodorescu pentru amabilitatea de a fi coordonat această activitate precum și profesoriilor universitari George Ciucu și Solomon Marcus pentru îndemnul de a scrie această carte în care să se reflecte afinitatea dintre matematică, științele naturii, tehnică și viața socială. De asemenea, aducem mulțumirile noastre lectorilor universitari dr. Dumitru Smaranda și dr. Constantin V. Crăciun pentru sugestiile făcute la unele capitole ale lucrării și tuturor celor care au contribuit la apariția acestei lucrări.

Fiind la prima sa ediție, considerăm că ea va putea fi în mod substanțial îmbunătățită, astfel încât să fie de un real folos învățămîntului în perspectiva înnoirilor care se anunță.

AUTORII
București 1975

PARTEA ÎNTÎI

Capitolul 1 MULTIMI

1.1. DESCRIERE. NOTĂȚI

În foarte multe din activitățile practice ale omului intervine noțiunea de colecție, de grupare.

Un elev care este membru în cercul de filatelie din școală își ordonează timbrele după anumite criterii : țara care a emis timbrul, tema ce-o reprezintă etc. El realizează în acest mod colecții după criteriul ales pentru clasificarea timbrelor. Un bibliotecar clasifică cărțile din bibliotecă după conținut : beletristică, științe sociale, științe ale naturii, arte etc. Un muncitor își aranjează obiectele de lucru după modul lor de întrebuințare : unelte mecanice, piese de schimb etc.

Spunem că elevul, bibliotecarul sau muncitorul realizează colecții sau grupări de obiecte.

Noțiunea de mulțime este analoagă noțiunii de colecție sau de grupare. În mod practic, pentru a forma o mulțime trebuie să ni se dea un anumit criteriu după care să putem determina obiectele care formează mulțimea. Criteriul ales pentru a grupa obiectele unei mulțimi ne arată ce proprietate comună au obiectele mulțimii. Așa, de exemplu, toate timbrele emise de țara noastră fac parte din mulțimea timbrelor emise de Republica Socialistă România. Obiectele acestei mulțimi sînt timbre. Proprietatea comună a acestor timbre este emiterea lor de către țara noastră.

În alcătuirea mulțimilor de obiecte trebuie să eliminăm anumite criterii în care intervin aprecieri subiective. În acest sens, dacă într-o clasă dorim să formăm mulțimea elevilor inteligenți, vom întâmpina în mod evident o anumită dificultate. Despre un anumit elev unii vor afirma că este inteligent, iar alții că nu este inteligent. Spunem că în acest caz criteriul ales pentru alcătuirea acestei mulțimi este îndoielnic.

Criteriul ales pentru alcătuirea unei mulțimi notată A , sau proprietatea comună pe care o au obiectele care formează mulțimea, trebuie să nu dea naștere la îndoieli. Astfel încît, dacă ni se dă un anumit obiect, notat a , să putem afirma că acest obiect nu se poate afla decît în două situații : (1) obiectul a face parte din mulțimea A ; (2) obiectul a nu face parte din mulțime, și în mod cert o altă situație nu poate exista.

Mulțimea este rezultatul unei operații mintale ; ea poate fi concretă dacă obiectele ei sînt concrete și abstractă dacă elementele ei sînt abstracte ; ca obiect mulțimea este totdeauna abstractă.

Exemple de mulțimi :

- Mulțimea elevilor care fac parte din corul unei școli.
- Mulțimea literelor din care este alcătuit cuvîntul *M a r t e*.
- Mulțimea pomilor din grădina unei școli.
- Mulțimea elevilor promovați ai unei clase.
- Mulțimea profesorilor din școala noastră.
- Mulțimea obiectelor care se găsesc în penarul unui elev.
- Mulțimea formată din numerele 1, 2, 3, 4, 5.

Obiectele care formează o anumită mulțime se numesc elemente ale mulțimii, atunci cînd le considerăm numai din punct de vedere al apartenenței lor la acea mulțime, fără a distinge în alt mod atribuțiile lor.

Mulțimile se notează de obicei cu literele majuscule A, B, C, \dots . Elementele mulțimii se notează de obicei prin litere minuscule a, b, c, \dots sau prin alte semne.

Dacă un anumit obiect notat cu a face parte din mulțimea A , atunci spunem că obiectul a aparține mulțimii.

Pentru a arăta că un anumit obiect notat a aparține unei mulțimi A , se întrebuiințează simbolul \in și se scrie $a \in A$ — relație care se citește : „elementul a aparține mulțimii A ”.

Dacă un anumit element b nu face parte dintr-o mulțime notată A , se scrie $b \notin A$ și se citește : „elementul b nu aparține mulțimii A ”.

Față de criteriul ales pentru alcătuirea mulțimii A , un element oarecare x se găsește în două situații posibile : $x \in A$ sau $x \notin A$ (elementul x aparține mulțimii A sau elementul x nu aparține mulțimii A).

În mulțimea elevilor promovați ai unei școli, elementele mulțimii sînt elevii care au promovat. În mulțimea formată din

numerele 1, 2, 3, 4, 5 elementele mulțimii sînt fiecare din numerele scrise mai sus.

Elementele unei mulțimi se scriu, de obicei, între două acolade fiind despărțite prin virgule.

Exemple

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$B = \{\square, \triangle, \bigcirc, \square\}$$

$$C = \{\text{Ionel, Petre, Gheorghe}\}.$$

Putem scrie: $2 \in A$; $3 \in A \dots$; $3 \notin B$ și citim: „2 aparține lui A ; 3 aparține lui A ”, respectiv „3 nu aparține lui B ”.

Pentru descrierea unei mulțimi se folosește, de regulă, unul din următoarele două procedee:

1) Se enumeră toate obiectele care fac parte din mulțime, ca în exemplele de mai sus;

2) Se indică o proprietate sau mai multe proprietăți, care sînt comune elementelor mulțimii și numai lor.

Proprietatea comună pe care o posedă toate elementele unei mulțimi se numește proprietate caracteristică.

Dacă se indică o proprietate pe care o au obiectele unei mulțimi, se reprezintă printr-o literă x orice element al mulțimii și se scrie proprietatea caracteristică, ce definește orice element al mulțimii. Litera se desparte de proprietatea caracteristică prin două puncte sau o linie verticală și se încadrează această scriere în acolade.

Exemple

1) $A = \{x | x \text{ elev premiant al școlii noastre}\}.$

Mulțimea A este formată din toți elevii premianți ai școlii noastre.

2) $B = \{x | x \text{ număr cîștigător la loterie}\}.$

Mulțimea B este formată din toate numele cîștigătoare la tragerea Loto.

În această scriere presupunem că x descrie mulțimea, adică poate fi înlocuit cu oricare din elementele mulțimii.

Observație

Putem avea mulțimea concretă $\{1, 2, 3, \square\}$, formată din simbolurile 1, 2, 3 și un pătrat, și mulțimea abstractă $\{1, 2, 3, 4\}$ formată din numerele 1, 2, 3, 4.

Scrierea mulțimii folosind o proprietate caracteristică a elementelor ei este comodă atunci cînd numărul elementelor este mare.

În scrierea mulțimii prin enumerarea elementelor, convenim ca un element să fie scris o singură dată.

Să notăm cu M mulțimea literelor din care este alcătuit cuvîntul *m a m a*.

Ținînd seama de convenția pe care am introdus-o pentru scrierea unei mulțimi, vom avea :

$$M = \{m, a\}.$$

În cuvîntul *m a m a* literele m și a sînt scrise de două ori. În mulțimea M aceste litere nu se pot scrie decît o singură dată. Deci, într-o mulțime nu se poate scrie de mai multe ori unul și același element.

1.2. EGALITATEA MULȚIMILOR

Două mulțimi, notate A și B , sînt egale dacă sînt formate din aceleași elemente. Dacă mulțimile A și B sînt egale atunci propozițiile „pentru orice x , $x \in A$ ” și „pentru orice x , $x \in B$ ” sînt simultan adevărate sau false. Se scrie $A = B$ și se citește „mulțimea A este egală cu mulțimea B ”.

Dacă mulțimile sînt formate dintr-un număr mic de elemente, pentru a verifica egalitatea se analizează pe rînd elementele celor două mulțimi și se verifică dacă ele sînt identice.

Observație

Egalitatea mulțimilor nu trebuie confundată cu egalitatea numărului de elemente al celor două mulțimi. Două mulțimi pot avea același număr de elemente, fără ca ele să fie egale.

Exemplu

Se dau mulțimile :

$$A = \{+, -, :\} \quad B = \{1, 2, 3\}.$$

Mulțimea A are trei elemente ; mulțimea B are tot trei elemente. Deși mulțimile A și B au același număr de elemente ele nu sînt egale, deoarece sînt formate din elemente diferite.

1.3. MULȚIME CU UN ELEMENT

În matematică, și în vorbirea curentă, folosim foarte des cuvîntul mulțime.

Obiectele care alcătuiesc o mulțime au un caracter foarte variat. În vorbirea curentă noțiunea de mulțime arată existența mai multor obiecte, care sînt grupate după anumite proprietăți.

Vrem, de exemplu, să scriem mulțimea numerelor naturale care sînt mai mari decît 3 și mai mici decît 5. După convenția de scriere adoptată, vom avea :

$$A = \{x | x \text{ natural}, 3 < x < 5\}.$$

Litera x desemnează orice element al mulțimii A .

Putem trece de la acest mod de a scrie mulțimea la scrierea mulțimii A prin enumerarea tuturor elementelor (numerelor), care au proprietatea mai sus enunțată. În acest caz este evident că singurul element (număr) care se află între 3 și 5 este numărul 4. Adoptînd cel de al doilea mod de scriere a mulțimii, adică prin enumerarea elementelor, vom scrie :

$$A = \{4\}.$$

În matematică îi vom spune lui A tot mulțime, deși este formată dintr-un singur element.

Elementul 4 al mulțimii A nu trebuie confundat cu mulțimea însăși. Vom scrie $4 \in \{4\}$, adică numărul 4 aparține mulțimii A .

Alte exemple

Să formăm mulțimea elevilor dintr-o școală care sînt înscrși în anumite cercuri de activități extrașcolare. O parte din elevi formează „cercul micilor naturaliști”, alții formează „cercul electrotehnicienilor”. Dacă un singur elev, pe care-l notăm cu litera a , frecventează cercul de arte, trebuie să distingem „cercul de arte”, ca mulțime ce nu conține decît un singur element, elevul a , de elevul considerat ca element al mulțimii „cercul de arte”.

Vom exprima această deosebire astfel : $\{a\} \neq a$.

1.4. MULȚIMEA VIDĂ

Să revenim din nou la exemplul mulțimii ale cărei elemente sînt numere naturale. Se cere să se scrie mulțimea numerelor naturale fără soț (impare) mai mari decît 7 și mai mici decît 9.

$$B = \{x | x \text{ numărul natural impar și } 7 < x < 9\}.$$

Este evident că nu există nici un număr natural fără soț cuprins între 7 și 9. Vom spune că mulțimea B nu are nici un element și o vom numi mulțimea vidă. Pentru notația mulțimii vide se utilizează simbolul \emptyset .

Alte exemple de mulțimi vide.

Mulțimea elevilor din clasa a XII-a a unei școli, care nu știu să scrie numărul natural 5.

Mulțimea locuitorilor planetei Marte care în anul trecut au vizitat școala noastră.

Mulțimea elevilor din clasa noastră care anul trecut au făcut o călătorie pe Lună.

1.5. DIAGrame VENN

Relațiile dintre mulțimi, cât și proprietățile lor, pot fi mai ușor înțelese, dacă vom reprezenta mulțimile și elementele lor folosind anumite scheme grafice. Pentru reprezentarea grafică a unei mulțimi se utilizează diagrama Venn.

Folosirea figurilor pentru a reprezenta mulțimile este foarte veche. Matematicianul Leonhard Euler (1707—1783) s-a folosit de figuri rotunde pentru a explica anumite reguli ale logicii. Logicianul John Venn (1834—1923), profesor la Cambridge, a adus diagramelor lui Euler îmbunătățiri utile. Pentru aceasta, numim diagrame Venn diagramele reprezentând mulțimile.

O diagramă Venn este o reprezentare grafică a unei mulțimi printr-o porțiune din plan mărginită de o curbă închisă fără puncte duble.

De obicei, elementele mulțimii sînt reprezentate prin puncte distincte, la două elemente distincte ale unei mulțimi corespund două puncte distincte.

Exemple de diagrame Venn (fig. 1.1, a și b).

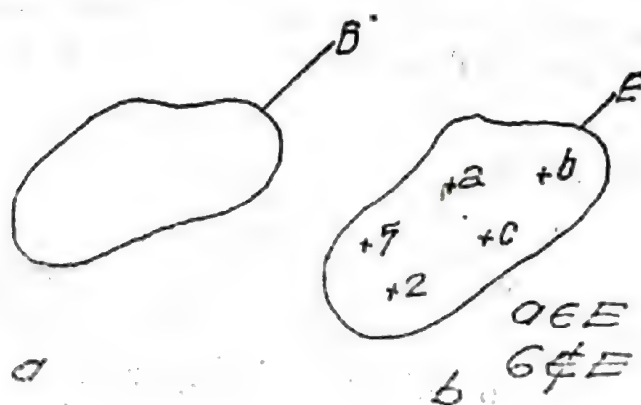


Fig. 1.1

1.6. SUBMULTIMI

Sînt cazuri cînd, pe lîngă proprietatea aleasă pentru alcătuirea unei mulțimi, se mai consideră încă o proprietate pe care o au numai unele din elementele mulțimii, iar altele nu o au. Această proprietate este caracteristică numai pentru unele din elementele mulțimii date.

Să presupunem, de exemplu, că în interiorul unei curbe închise fără puncte duble deosebim figuri geometrice cunoscute: pătrate, dreptunghiuri, cercuri, triunghiuri.

Aceste figuri geometrice formează o mulțime. Să notăm cu A această mulțime (fig. 1.2).

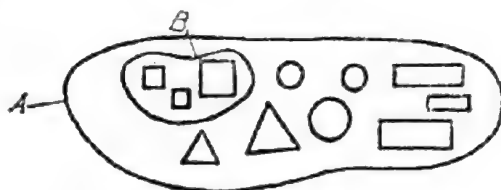


Fig. 1.2

Se marchează printr-o linie curbă închisă toate figurile geometrice care sînt pătrate. Toate figurile geometrice care sînt pătrate formează o nouă mulțime, pe care o vom nota cu litera B .

Este evident că orice element care aparține mulțimii B , adică este un pătrat, aparține și mulțimii A . Spunem că mulțimea B este inclusă în mulțimea A .

Mulțimea B este o parte sau o submulțime a mulțimii A .

O mulțime B este o submulțime a lui A sau este inclusă în A , dacă orice element x care aparține mulțimii B aparține și mulțimii A . Dacă $x \in B$, atunci $x \in A$.

Pentru a scrie că o mulțime notată B este o submulțime a mulțimii A sau că este inclusă în A , se întrebuițează semnul \subset , care este simbolul grafic al incluziunii. Se scrie $B \subset A$ și se citește „mulțimea B este inclusă în mulțimea A ”.

Dacă o anumită mulțime C nu este inclusă în mulțimea A ; se folosește semnul $\not\subset$ și se scrie $C \not\subset A$, care se citește: „mulțimea C nu este inclusă în mulțimea A ”.

Alte exemple de submulțimi

— În mulțimea A a elevilor din clasa noastră mulțimea B a elevilor care poartă ochelari este o submulțime a lui A .

— În mulțimea E a elevilor dintr-o clasă, mulțimea X a elevilor care sînt pionieri formează o submulțime.

— În mulțimea F a muncitorilor unei întreprinderi mulțimea L a muncitorilor calificați formează o submulțime.

— Se consideră mulțimea A a literelor din care este alcătuit cuvântul $a l a r m a$ și mulțimea B a literelor din care este alcătuit cuvântul $l a m a$.

Să scriem mulțimile enumerând toate elementele din care sînt alcătuite :

$$A = \{a, l, r, m\} ; B = \{l, a, m\}$$

Constatăm că orice element care aparține mulțimii B aparține și mulțimii A . Mulțimea B este inclusă în mulțimea A și este o submulțime a mulțimii A . Vom scrie : $B \subset A$.

1.7. SUBMULȚIMI COMPLEMENTARE

Se dă mulțimea :

$$A = \{\square, \triangle, \square, \circ, \triangle, \circ\}.$$

În mulțimea A să formăm submulțimea pătratelor. Pentru a forma această submulțime trebuie să enunțăm o proprietate suplimentară pe care o au numai unele din elementele acestei mulțimi, și anume figurile geometrice care au un unghi drept și laturile egale. Să notăm cu B mulțimea pătratelor :

$$B = \{\square, \square\}.$$

Orice element care face parte din mulțimea B face parte și din mulțimea A .

Vom scrie : $B \subset A$. Sînt și elemente care fac parte din mulțimea A , dar nu fac parte din mulțimea B . Aceste elemente formează o nouă submulțime, numită submulțimea complementară a lui B în raport cu A sau, mai simplu, complementara lui B în mulțimea A .

Complementara mulțimii B în raport cu mulțimea A se notează $C_A B$ (fig. 1.3).

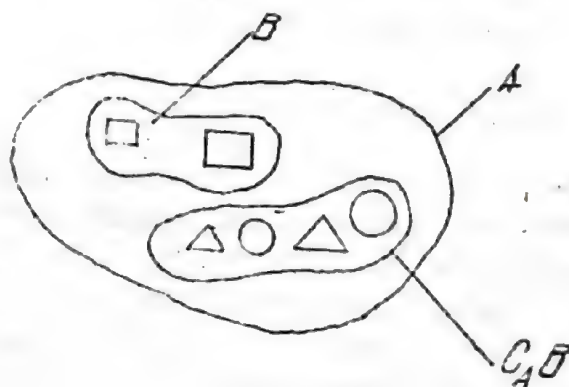


Fig. 1.3

Avem :

$$C_A B = \{\triangle, \bigcirc, \bigcirc, \triangle\}.$$

Pentru a forma submulțimea complementară a unei mulțimi date este necesar să precizăm mulțimea de referință. În exemplul precedent mulțimea de referință este :

$$A = \{\square, \triangle, \square, \bigcirc, \triangle, \bigcirc\}.$$

Avem : $B \subset A$ și $B \neq A$, deoarece există elemente ale lui A care nu aparțin lui B . Aceste elemente formează submulțimea complementară a lui B în A .

Se notează :

$$C_A B = \{x | x \in A \text{ și } x \notin B\}.$$

Alte exemple

1. Să notăm cu A mulțimea literelor din care este alcătuit cuvîntul *R a d u* și cu B mulțimea literelor din care este alcătuit cuvîntul *d a u* :

$$A = \{R, a, d, u\}; \quad B = \{d, a, u\}.$$

Orice element care aparține mulțimii B aparține și mulțimii A .

Mulțimea B este o submulțime a mulțimii A . Complementara mulțimii B în raport cu mulțimea A este formată din toate elementele care aparțin mulțimii, dar nu aparțin mulțimii B .

Prin urmare : $C_A B = \{R\}$.

Complementara mulțimii B în raport cu mulțimea A este formată dintr-un singur element, litera R (fig. 1.4).

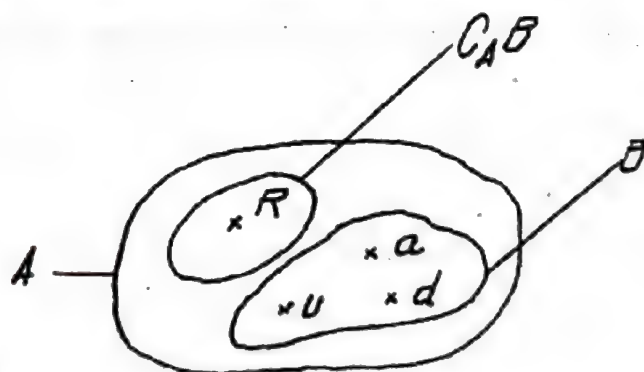


Fig. 1.4

2. Să notăm cu M mulțimea literelor din care este alcătuit cuvîntul *a v i o n* :

$$M = \{a, v, i, o, n\}.$$

Fie N mulțimea literelor din care este alcătuit cuvîntul $n o i$,

$$N = \{n, o, i\}.$$

Vom avea : $N \subset M$ și :

$$C_M N = \{x | x \in M \text{ și } x \notin N\},$$

sau :

$$C_M N = \{a, v\} \text{ (fig. 1.5).}$$



Fig. 1.5

3. A este mulțimea literelor din care este alcătuit cuvîntul $a r b o r e$.

B este mulțimea literelor din care este alcătuit cuvîntul $a e r$;

D este mulțimea literelor din care este alcătuit cuvîntul $b o b$;

$$A = \{a, r, b, o, e\},$$

$$B = \{a, e, r\},$$

$$D = \{b, o\}.$$

Orice element al mulțimii B este un element al mulțimii A și orice element al mulțimii C aparține, de asemenea, mulțimii A .

Prin urmare $B \subset A$; $D \subset A$.

Orice element care aparține lui A și nu aparține lui B , aparține lui D .

Prin urmare :

$$C_A B = D. \quad (1)$$

Orice element care aparține mulțimii A și nu aparține mulțimii D , aparține mulțimii B .

Prin urmare :

$$C_A D = B. \quad (2)$$

Substituind valoarea lui D din relația (1) în relația (2) obținem :

$$C_A (C_A B) = B. \quad (3)$$

Se arată în mod asemănător că :

$$C_A(C_AD) = D. \quad (4)$$

Complementara complementarei unei mulțimi față de aceeași mulțime de referință este mulțimea însăși.

Alte notații.

În cazul în care se cunoaște mulțimea de referință, se obișnuiește să se noteze complementara unei mulțimi cu o liniuță trasată deasupra literei majuscule, cu care însemnăm mulțimea, sau se folosește o literă c ca indice:

Vom scrie deci :

$$C = \bar{D}, C_AB = \bar{B}, \text{ sau } C_AD = D^c \text{ și } C_AB = B^c.$$

Relațiile (3) și (4) se scriu și :

$$\bar{\bar{B}} = B, \bar{\bar{D}} = D \text{ sau } (B^c)^c = B \text{ și } (D^c)^c = D.$$

4. În mulțimea N a numerelor naturale submulțimea numerelor naturale impare (fără soț) este complementara mulțimii numerelor naturale pare (cu soț).

5. Fie N mulțimea numerelor naturale și submulțimile :

$$M = \{x | x \leq 100\} \text{ și } P = \{x | x > 100\}.$$

Se pot stabili relațiile :

$$C_N M = P \text{ și } C_N P = M,$$

sau :

$$\bar{M} = P; \bar{P} = M.$$

6. Cazuri particulare :

$$C_E E = \emptyset. \quad (5)$$

Aceasta rezultă din definiție. Complementara mulțimii E în raport cu mulțimea E este formată din toate elementele care aparțin lui E dar nu aparțin lui E , adică mulțimea vidă.

$$C_E E = \{x | x \in E \text{ și } x \notin E\}.$$

Din relația (5) luând complementara în ambii membri deducem :

$$C_E \emptyset = C_E(C_E E). \quad (6)$$

După cele arătate în exemplul precedent avem :

$$C_E(C_E E) = E. \text{ Prin urmare, } C_E \emptyset = E.$$

Proprietăți

Dacă $A \subset B \subset E$, atunci $C_E B \subset C_E A$.

Dacă un element aparține mulțimii $C_E B$, atunci el nu aparține mulțimii B și, prin urmare, el nu aparține nici mulțimii A , deoarece $A \subset B$. Dacă un element nu aparține mulțimii A , atunci el aparține mulțimii $C_E A$. Prin urmare, dacă un element aparține mulțimii $C_E B$, el va aparține și mulțimii $C_E A$.

Deci :

$$C_E B \subset C_E A.$$

Să ilustrăm aceste proprietăți printr-un exemplu :
Fie mulțimile :

$$E = \{x | x \in N \text{ și } x \leq 10\};$$

$$B = \{x | x \in N \text{ și } x \leq 6\};$$

$$A = \{x | x \in N \text{ și } x \leq 4\}.$$

Mulțimea E este formată din numerele naturale mai mici sau cel mult egale cu 10 ; B este formată din mulțimea numerelor naturale mai mici sau cel mult egale cu 6 ; A este formată din mulțimea numerelor naturale mai mici sau cel mult egale cu 4.

Să scriem aceste mulțimi enumerînd toate elementele din care sînt alcătuite :

$$E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\},$$

$$B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\},$$

$$A = \{0, 1, 2, 3, 4\}.$$

Este evidentă relația : $A \subset B \subset E$.

După definiția complementarei avem :

$$C_E B = \{x | x \in E \text{ și } x \notin B\},$$

sau :

$$C_E B = \{7, 8, 9, 10\}. \quad (7)$$

În mod asemănător :

$$C_E A = \{x | x \in E \text{ și } x \notin A\}. \quad (8)$$

sau :

$$C_E A = \{5, 6, 7, 8, 9, 10\}. \quad (9)$$

Din relațiile (7) și (9), deducem :

$$C_E B \subset C_E A.$$

1.8. OPERAȚII CU MULȚIMI

1.8.1. INTERSECȚIA

Se numește intersecția mulțimilor A și B mulțimea care este constituită din elemente comune mulțimilor A și B . Intersecția mulțimilor A și B se notează $A \cap B$ și se citește „mulțimea A intersectată cu mulțimea B ”. Simbolul „ \cap ” este simbolul intersecției.

Avem :

$$A \cap B = \{x | x \in A \text{ și } x \in B\}. \text{ (fig. 1.6).}$$

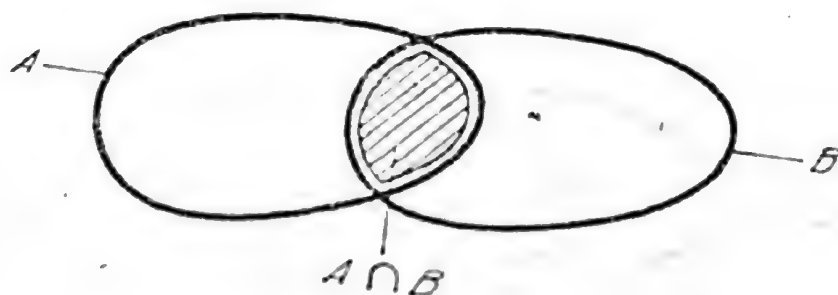


Fig. 1.6

Exemple:

Se dau mulțimile :

A — Mulțimea elevilor care cîntă în corul școlii ;

B — Mulțimea elevilor care poartă ochelari.

Mulțimea $A \cap B$ este formată din elevii care poartă ochelari și care cîntă în corul școlii.

Dacă în mulțimea elevilor care cîntă în corul școlii nu există nici un elev care să poarte ochelari, atunci vom spune că intersecția mulțimilor A și B este mulțimea vidă \emptyset și vom scrie : $A \cap B = \emptyset$.

Dacă intersecția a două mulțimi A și B este mulțimea vidă, mulțimile A și B se numesc disjuncte.

Așadar, dacă două mulțimi A și B nu au elemente comune ele se numesc disjuncte.

1.8.2. PROPRIETĂȚILE INTERSECȚIEI

(1) Se arată destul de simplu, pornind de la definiție că oricare ar fi mulțimea A , avem $A \cap A = A$.

(2) Din figură se observă că $A \cap B \subset A$ și $A \cap B \subset B$.

(3) $A \cap B = B \cap A$ (comutativitatea).

(4) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ (asociativitatea).

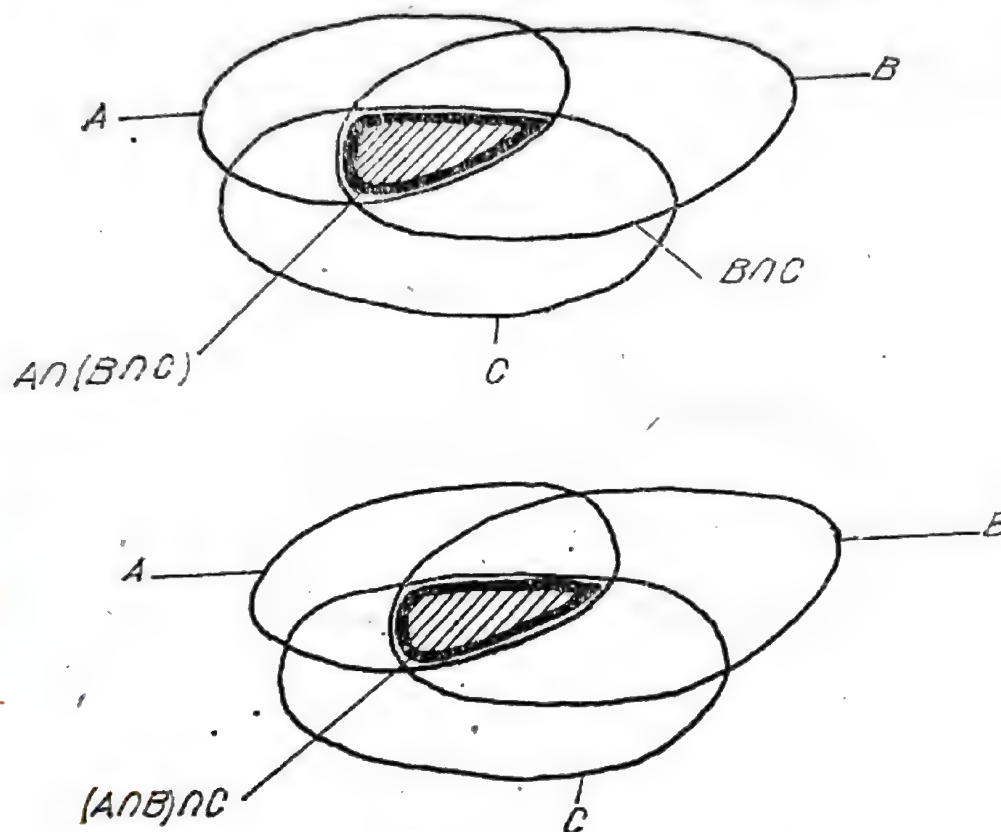


Fig. 1.7

Pentru ilustrarea acestei proprietăți se folosesc diagramele Venn (fig. 1.7).

(5) $A \cap \emptyset = \emptyset$.

(6) Dacă $A \subset B$ atunci $A \cap B = A$.

1.8.3. REUNIUNEA

Reuniunea mulțimii A și a mulțimii B este mulțimea alcătuită din elementele care aparțin cel puțin uneia dintre mulțimile A sau B . Se notează $A \cup B$ și se citește mulțimea A reunită cu mulțimea B .

Dacă un element aparține mulțimii $A \cup B$, atunci el aparține sau mulțimii A sau mulțimii B , dar poate să aparțină ambelor mulțimi.

Exemple (fig. 1.8):

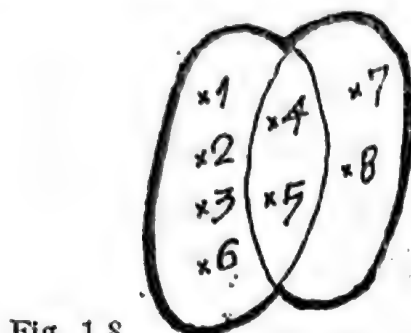


Fig. 1.8

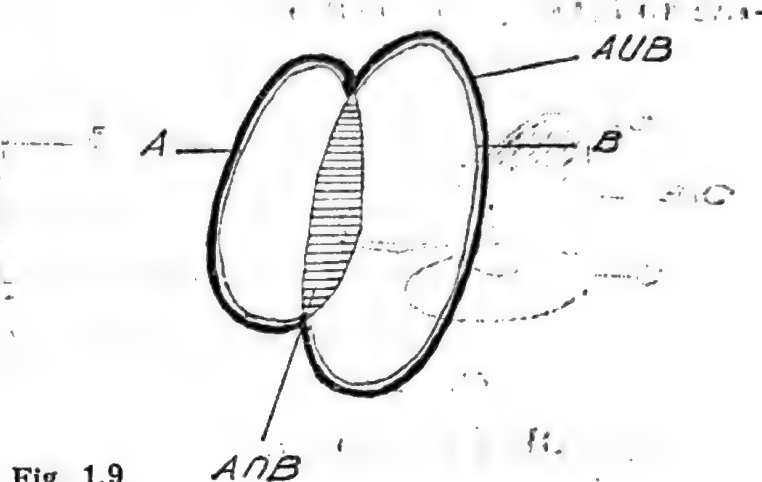


Fig. 1.9

$$A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\},$$

$$B = \{4; 5; 7; 8\}.$$

Avem:

$$A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}.$$

Numărul 4 aparține atât mulțimii A , cât și mulțimii B . În mulțimea $A \cup B$ el se scrie o singură dată.

În general, dacă reprezentăm mulțimile A și B prin porțiuni din plan cuprinse în interiorul a două curbe închise, atunci porțiunea din plan cuprinsă în interiorul conturului îngroșat (fig. 1.8) reprezintă reuniunea celor două mulțimi.

Alte exemple.

Profesorul diriginte al unei clase alcătuiește o listă cu elevii care sînt înscriși la cercul de matematică și la cercul de fizică. Să notăm cu A mulțimea elevilor din această clasă înscriși la cercul de matematici și cu B mulțimea elevilor înscriși la cercul de fizică.

$A \cup B$ este mulțimea elevilor înscriși la cercul de matematică sau la cercul de fizică. Un elev care participă la ambele cercuri aparține atât mulțimii A cât și mulțimii B , aparține deci mulțimii $A \cap B$, dar și mulțimii $A \cup B$.

Prin urmare

$$A \cap B \subset A \cup B \text{ (fig. 1.9).}$$

1.8.4. PROPRIETĂȚILE REUNIUNII

1. Oricare ar fi mulțimile A și B , avem relațiile :

$$A \subset A \cup B; B \subset A \cup B.$$

2. Oricare ar fi mulțimea A , avem relația :

$$A \cup A = A \text{ (idempotența).}$$

3. Oricare ar fi mulțimile A și B , avem relațiile :

$$A \cup B = B \cup A \text{ (comutativitatea).}$$

4. Oricare ar fi mulțimile A , B , C , avem :

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C \text{ (asociativitatea).}$$

1.8.5. DIFERENȚA

Diferența dintre mulțimile A și B este mulțimea elementelor lui A care nu aparțin mulțimii B .

Se notează $A \setminus B$ sau mai simplu $A - B$.

Avem :

$$A \setminus B = \{x | x \in A \text{ și } x \notin B\}.$$

În același mod în care am definit diferența $A \setminus B$, putem să definim diferența dintre mulțimea B și mulțimea A , notată $B \setminus A$, care este formată din elementele lui B ce nu aparțin mulțimii A .

Avem :

$$B \setminus A = \{x | x \in B \text{ și } x \notin A\}.$$

În diagrama următoare (fig. 1.10) conturul plin reprezintă mulțimea $A \setminus B$, iar conturul punctat, mulțimea $B \setminus A$.

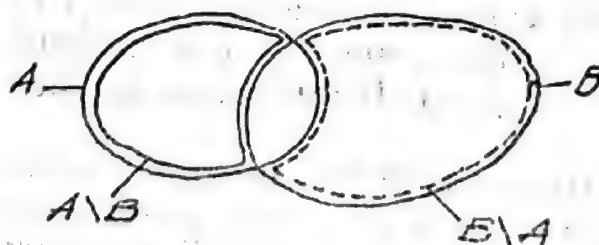


Fig. 1.10

Rezultă imediat că $A \setminus B$ este o parte a mulțimii A , deci $A \setminus B \subset A$, în timp ce $B \setminus A$ este o parte a lui B , adică $B \setminus A \subset B$. Este evident că mulțimile $A \setminus B$ și $B \setminus A$ sînt disjuncte.

Exemple

Într-o clasă sînt elevi care fac parte din echipa de gimnastică a școlii și elevi care fac parte din cercul de activități artistice.

Să notăm :

A = mulțimea elevilor care fac parte din echipa de gimnastică a școlii ;

B = mulțimea elevilor care fac parte din cercul de activități artistice.

Atunci $A \setminus B$ este mulțimea elevilor care fac parte din echipa de gimnastică a școlii, dar nu fac parte din cercul de activități artistice ;

$B \setminus A$ este mulțimea elevilor care fac parte din cercul de activități artistice, dar nu fac parte din echipa de gimnastică a școlii.

1.8.6. DIFERENȚA SIMETRICĂ

Diferența simetrică a două mulțimi A și B este reuniunea mulțimilor disjuncte $A \setminus B$ și $B \setminus A$.

Pentru scrierea diferenței simetrice a două mulțimi se folosește simbolul „ Δ ” :

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Exemplu

Pentru a selecționa elevii care vor participa la un concurs „Din istoria și geografia patriei”, profesorul-diriginte al unei clase face o verificare prealabilă, înregistrînd elevii care au note foarte bune sau la istorie sau la geografie, sau la amîndouă.

Să notăm cu A mulțimea elevilor care au note foarte bune la istorie și cu B mulțimea elevilor care au note foarte bune la geografie. Mulțimea $A \setminus B$ este formată din elevii care au note foarte bune la istorie, dar nu au note foarte bune la geografie. Mulțimea $B \setminus A$ este formată din elevii care au note foarte bune la geografie, dar mai puțin bune la istorie.

Mulțimea elevilor care au note foarte bune la una și numai una din cele două discipline — istorie sau geografie — este :

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Mulțimea $A \Delta B$ care este formată din elevii ce au note foarte bune numai la una din cele două discipline, istorie sau geografie, se numește diferență simetrică.

1.8.7. PROPRIETĂȚILE DIFERENȚEI

1. Dacă $A \subset B$, atunci $A \setminus B$ este mulțimea vidă. Orice element care aparține mulțimii A aparține și mulțimii B . Prin urmare nu există elemente care să aparțină mulțimii A și să nu aparțină mulțimii B .

2. Dacă $A \subset B$, atunci $B \setminus A$ este complementara mulțimii A în raport cu mulțimea B (fig. 1.11).

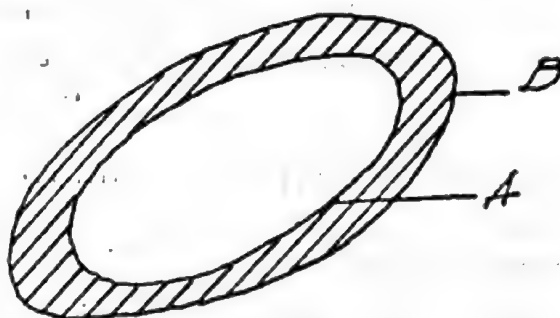


Fig. 1.11

Mulțimea $B \setminus A$ este formată din toate elementele lui B care nu aparțin lui A .

$$B \setminus A = \{x | x \in B \text{ și } x \notin A\}.$$

Prin urmare,

$$B \setminus A = C_B A.$$

3. Diferența mulțimilor nu este asociativă.

Să considerăm trei mulțimi oarecare A, B, C .

Să reprezentăm cu ajutorul diagramelor lui Venn mulțimile $(A \setminus B) \setminus C$ și $A \setminus (B \setminus C)$ (fig. 1.12 și 1.13).

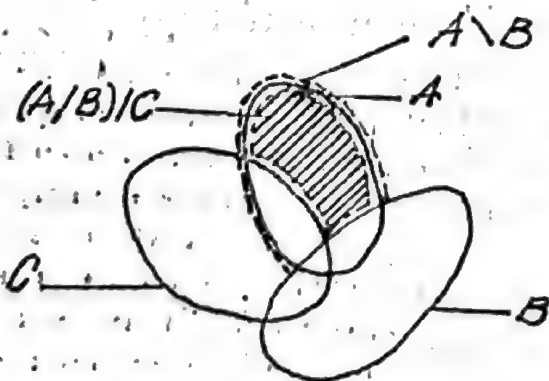


Fig. 1.12

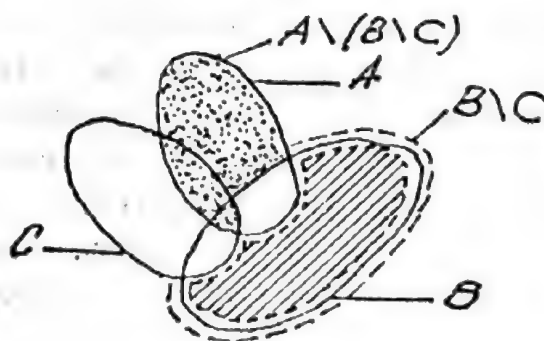


Fig. 1.13

Mulțimea $(A \setminus B) \setminus C$ este reprezentată prin porțiunea hașurată din fig. 1.12 în timp ce $A \setminus (B \setminus C)$ este reprezentată prin porțiunea hașurată din fig. 1.13.

Se remarcă că cele două porțiuni nu coincid.

Prin urmare, $(A \setminus B) \setminus C \neq A \setminus (B \setminus C)$.

4. Dacă $A \cap C = \emptyset$ atunci $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \setminus C)$.

Ilustrarea acestei proprietăți se poate face cu ajutorul diagramelor Venn (fig. 1.14 și 1.15).

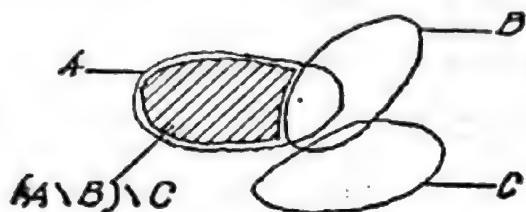


Fig. 1.14

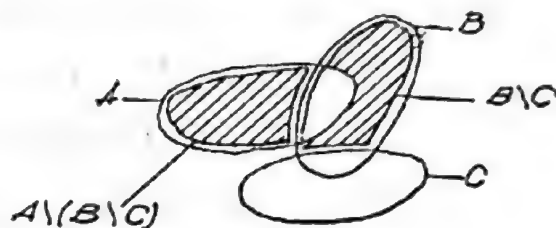


Fig. 1.15

$$(A \setminus B) \setminus C = A \setminus B, \quad A \setminus (B \setminus C) = A \setminus B.$$

1.8.8. DISTRIBUTIVITATEA INTERSECȚIEI FAȚĂ DE REUNIUNE

Dacă se dau mulțimile A , B și C atunci avem relația :

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C),$$

numită distributivitatea lui A față de reuniunea mulțimilor B și C

Pentru a arăta distributivitatea intersecției față de reuniune putem proceda în două moduri :

a) Pe două diagrame (fig. 1.16 și 1.17) reprezentând mulțimile A , B și C figurăm mulțimile :

$$A \cap (B \cup C) \text{ și } (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

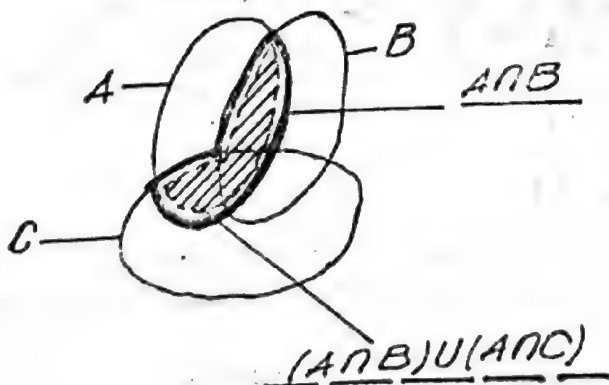


Fig. 1.16

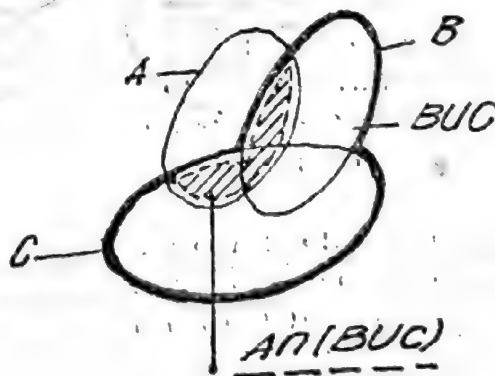


Fig. 1.17

Se compară cele două porțiuni hașurate și se observă că ele coincid.

b) Să arătăm că proprietatea este adevărată pentru trei mulțimi A , B și C .

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\},$$

$$B = \{4, 5, 6, 7\},$$

$$C = \{1, 2, 4, 5, 10\}.$$

Aflăm mai întâi primul membru al egalității.

$$B \cup C = \{1, 2, 4, 5, 6, 7, 10\},$$

$$A \cap (B \cup C) = \{1, 2, 4, 5\}. \quad (1)$$

Se află membrul al doilea al egalității și obținem :

$$A \cap B = \{4, 5\}; \quad A \cap C = \{1, 2, 4, 5\};$$

$$(A \cap B) \cup (A \cap C) = \{1, 2, 4, 5\}. \quad (2)$$

Din compararea relațiilor (1) și (2) se verifică egalitatea :

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

1.9. NUMĂR NATURAL

1.9.1. NOȚIUNEA DE CORESPONDENȚĂ BIUNIVOCĂ

În figura 1.18 sînt desenate diagramele Venn a trei mulțimi. Fiecare din aceste mulțimi are cîte trei elemente. Aceste mulțimi sînt diferite între ele, dar au o proprietate comună : au tot



Fig. 1.18

atîtea elemente. Putem decide dacă două sau mai multe mulțimi au același număr de elemente fără să numărăm elementele mulțimilor respective.

În figura 1.19 sînt desenate diagramele a două mulțimi A și B . Facem să corespundă unui element al mulțimii A un element al

mulțimii B . Vom lua un alt element al mulțimii A și-l vom pune în corespondență cu un element al mulțimii B și așa mai departe. Corespondența dintre elementele celor două mulțimi este arătată prin săgeți care pleacă de la mulțimea A către mulțimea B . Dacă în această operație de corespondență orice element al mulțimii A are un corespondent unic în mulțimea B și fiecare element al mulțimii B este corespondentul unui singur element al mulțimii A , se spune că am stabilit o corespondență biunivocă între elementele celor două mulțimi.

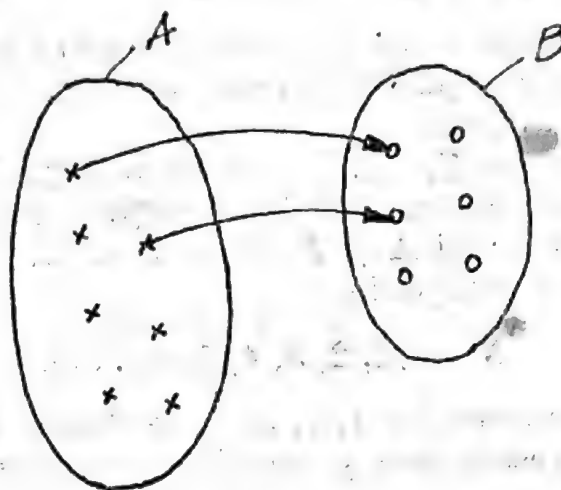


Fig. 1.19

Definiție

Două mulțimi A și B se numesc *echipotente* dacă există o corespondență biunivocă care asociază la fiecare element din A un element unic din B , astfel încât la două elemente distincte din A corespund elemente distincte din B și nu există nici un element în B care să nu fie în corespondență cu un element din A . Se scrie $A \sim B$ (fig. 1.20).

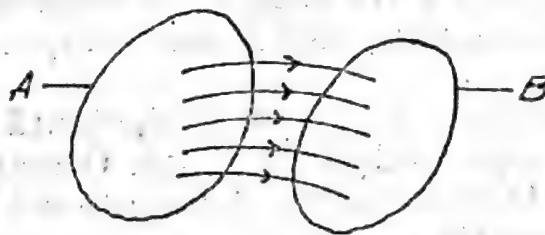


Fig. 1.20

Exemplu

Într-o sală de laborator, elevii efectuează experiențe. Profesorul dorește să afle dacă sînt atîtea scaune cîtî elevi sînt, fără ca să numere elevii sau scaunele. Pentru aceasta el invită elevii să se așeze pe scaune. Dacă nu a mai rămas nici un scaun liber sau nici un elev fără scaun, înseamnă că numărul elevilor este egal cu numărul

rul scaunelor. Între mulțimea elevilor și mulțimea scaunelor există o corespondență biunivocă.

Mulțimi finite. Mulțimi infinite

1. Se consideră mulțimile :

$$A = \{\square, \triangle, \bigcirc\} \text{ și mulțimea } B = \{\overline{\square}, \overline{\triangle}, \overline{\bigcirc}\}.$$

Aceste mulțimi sînt echipotente, deoarece corespondența :

$$\square \rightarrow \overline{\square}, \quad \triangle \rightarrow \overline{\triangle}, \quad \bigcirc \rightarrow \overline{\bigcirc},$$

pe care o putem defini între elementele acestor mulțimi este biunivocă. Există, deci, cel puțin o corespondență biunivocă între elementele acestor mulțimi.

2. Mulțimile $A = \{\square, \triangle, \bigcirc\}$ și $B = \{\square, \bigcirc\}$ nu sînt echipotente deoarece nu putem stabili cel puțin o corespondență biunivocă între elementele lui A și B , unde $B \subset A$.

3. Se consideră mulțimile :

$$N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\},$$

adică mulțimea numerelor 1, 2, 3, ... învățată în școala primară scrisă în ordine crescătoare și mulțimea numerelor cu soț (pare).

$$N' = \{2, 4, 6, 8, 10, \dots\}.$$

Evident, dacă $x \in N'$, atunci $x \in N$ și, prin urmare, $N' \subset N$. Mulțimile N și N' sînt echipotente, deoarece corespondența

$$\begin{array}{ccccccccc} \{ & 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & \dots \} \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ \{ & 1 \cdot 2, & 2 \cdot 2, & 3 \cdot 2, & 4 \cdot 2, & 5 \cdot 2, & 6 \cdot 2, & \dots \} \end{array}$$

pe care o putem stabili între elementele celor două mulțimi este biunivocă. Prin urmare, mulțimea N este echipotentă cu o submulțime a sa proprie.

Definiție. Orice mulțime care este echipotentă cu o submulțime a sa proprie se numește mulțime infinită. O mulțime care nu este infinită este finită. O mulțime finită nu este echipotentă cu nici o submulțime a sa proprie.

Două mulțimi sînt echipotente dacă există (cel puțin) o corespondență biunivocă între elementele celor două mulțimi. Semnificația acestei definiții constă în faptul că ea exprimă matematic proprietatea celor două mulțimi de a avea același număr de elemente fără a utiliza noțiunea de număr și fără a considera că mulțimile sînt finite sau infinite.

Clasa tuturor mulțimilor echipotente cu o mulțime A se numește cardinalul mulțimii A și se scrie $\text{card } A$. În cazul când A este o mulțime finită, cardinalul mulțimii A este numărul de elemente ale mulțimii.

Dacă între elementele a două mulțimi A și B există o corespondență biunivocă, atunci ele au același număr de elemente.

1.9.2. CARDINALUL UNE MULȚIMI

Definiție

Două mulțimi A și B au același cardinal dacă și numai dacă ele sînt echipotente.

Vom scrie $\text{card } A = \text{card } B$ și se citește cardinalul mulțimii A este egal cu cardinalul mulțimii B .

1.9.3. ADUNAREA CARDINALELOR

Definiție

Dacă a și b sînt cardinalele a două mulțimi disjuncte A și B , atunci suma $a + b$ este cardinalul reuniunii celor două mulțimi, $A \cup B$.

Prin urmare dacă :

$A \cap B = \emptyset$ și $\text{card } A = a$, $\text{card } B = b$, atunei $\text{card } (A \cup B) = \text{card } A + \text{card } B = a + b$.

Exemplu

Fie A și B două mulțimi disjuncte, astfel încît $\text{card } A = 3$, $\text{card } B = 2$. Cardinalul reuniunii $A \cup B$ este egal cu 5 (fig. 1.21).

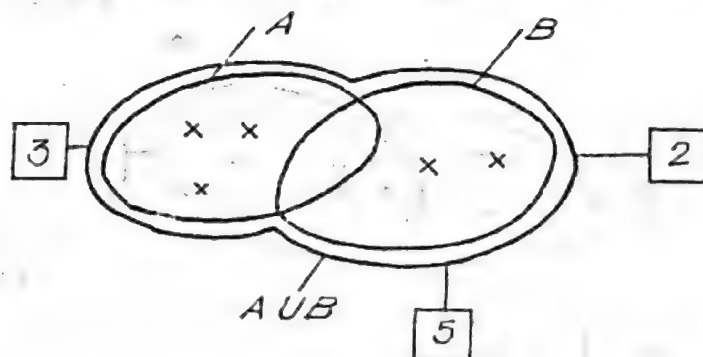


Fig. 1.21

Avem : $\text{card } A = 3$; $\text{card } B = 2$; $\text{card } (A \cup B) = 5$.
 $\text{card } (A \cup B) = \text{card } A + \text{card } B$.

1.9.4. PROPRIETĂȚILE OPERAȚIEI DE ADUNARE A CARDINALELOR

1. Adunarea este comutativă.

$$\text{card} A = a, \text{card} B = b, A \cap B = \emptyset.$$

Din relația $A \cup B = B \cup A$ obținem :

$$\text{card}(A \cup B) = \text{card}(B \cup A),$$

$$\text{card} A + \text{card} B = \text{card} B + \text{card} A$$

$$a + b = b + a$$

2. Adunarea este asociativă.

$\text{card} A = a, \text{card} B = b, \text{card} C = c, A, B$ și C disjuncte două câte două.

Din relația $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ obținem :

$$\text{card}[(A \cup B) \cup C] = \text{card}[A \cup (B \cup C)],$$

sau :

$$\text{card}(A \cup B) + \text{card} C = \text{card} A + \text{card}(B \cup C).$$

$$(\text{card} A + \text{card} B) + \text{card} C = \text{card} A + (\text{card} B + \text{card} C).$$

3. Zero este element neutru pentru adunare.

Din relația $A \cup \emptyset = A$ obținem :

$$\text{card}(A \cup \emptyset) = \text{card} A$$

sau :

$$\text{card} A + \text{card} \emptyset = \text{card} A$$

$$a + \text{card} \emptyset = a. \quad (1)$$

Din relația (1) obținem : $\text{card} \emptyset = 0$.

Cardinalul mulțimii vide este numărul natural 0.

1.9.5. OPERAȚII CU CARDINALE ÎN CAZUL CÎND MULȚIMILE NU SÎNT DISJUNCTE

Să considerăm două mulțimi A și B (fig. 1.22).



Fig. 1.22

Avem :

$$\text{card} A = 5$$

$$\text{card} B = 4$$

$$\text{card}(A \cap B) = 2.$$

Din figură, avem :

$$\text{card}(A \cup B) = 7 \text{ și } \text{card}(A \cap B) = 2$$

Se obține : $\text{card } A + \text{card } B = \text{card}(A \cup B) + \text{card}(A \cap B)$,
sau : $\text{card}(A \cup B) = \text{card } A + \text{card } B - \text{card}(A \cap B)$.

Exemple

1. Se consideră diagramele din fig. 1.23. Să se găsească :

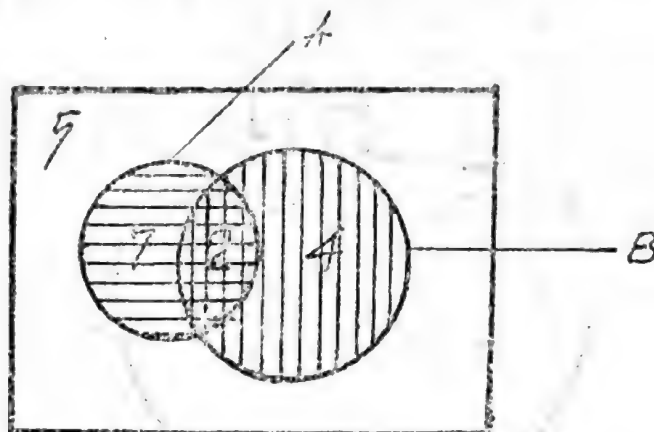


Fig. 1.23

$\text{card}(A \cap B)$, $\text{card } A$, $\text{card}(B \cap \bar{A})$, $\text{card } \bar{A}$, $\text{card}(\overline{A \cup B})$.

Soluție : $\text{card}(A \cap B) = 2$; $\text{card } A = 7 + 2 = 9$; $\text{card}(B \cap \bar{A}) = 4$; $\text{card } \bar{A} = 5 + 4 = 9$; $\text{card}(\overline{A \cup B}) = 5$.

2. Într-un grup de 35 de elevi, 15 au studiat algebra, 22 au studiat geometria, 14 au studiat trigonometria, 11 au studiat algebra și geometria, 8 au studiat geometria și trigonometria, 5 au studiat algebra și trigonometria și 3 au studiat toate subiectele. Câți elevi nu au studiat nici o disciplină.

Soluție

Să reprezentăm cu ajutorul diagramelor Venn (1.24) mulțimile elevilor care studiază algebra, geometria, trigonometria. Se scrie apoi numărul 3 în porțiunea comună celor 3 cercuri. Vom scrie apoi 2 în porțiunea comună reprezentând trigonometria și algebra, deoarece 5 elevi au studiat algebra și trigonometria și prin urmare trebuie să scădem din această cifră numărul 3 care reprezintă numărul elevilor care au studiat toate disciplinele. Se obține în acest mod numai numărul elevilor care au studiat numai algebra și trigonometria și nu au studiat geometria. Continuând în același mod, se obțin toate datele trecute în fig. 1.24.

Numărul tuturor elevilor care au studiat aceste discipline este 30. Dacă scoatem acest număr din 35, se obține numărul elevilor care nu au studiat nici o disciplină.

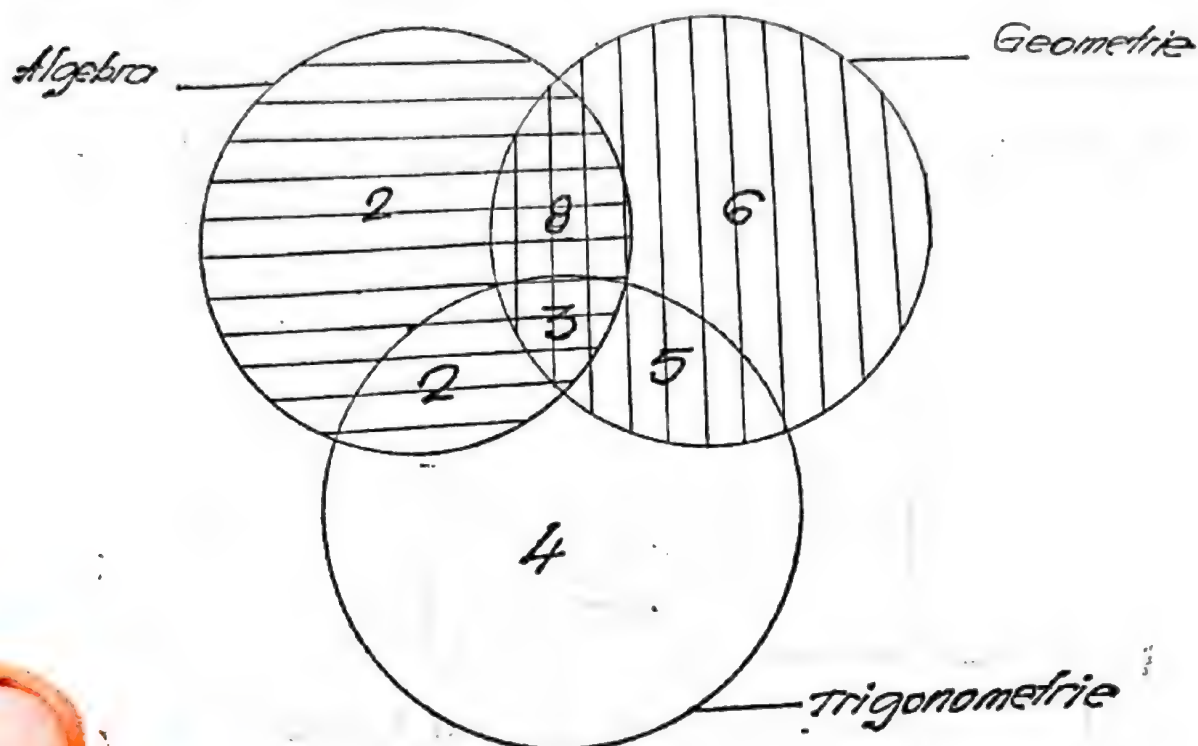


Fig. 1.24

1.9.6. FORMAREA SUCCESIVĂ A NUMERELOR NATURALE

Se consideră mulțimea vidă, notată cu litera \emptyset . Zero este cardinalul mulțimii vide.

$$0 = \text{card } \emptyset$$

1 — este cardinalul mulțimii $\{0\}$.

$$1 = \text{card } \{0\}.$$

Numărul 2 este cardinalul mulțimii $\{0; 1\}$.

$$2 = \text{card } \{0; 1\}.$$

Numărul 3 este cardinalul mulțimii $\{0; 1; 2\}$.

$$3 = \text{card } \{0, 1, 2\}.$$

Procedînd în același mod vom obține succesiv

$$4 = \text{card } \{0, 1, 2, 3\}.$$

$$5 = \text{card } \{0, 1, 2, 3, 4\} \text{ etc.}$$

O mulțime M , care este echipotentă cu mulțimea $\{0, 1, 2, \dots, n-1\}$, are același cardinal n .

$$\text{card } M = n.$$

Mulțimea cu elemente $0; 1; 2; 3; \dots; n; \dots$ se numește mulțimea numerelor naturale. Mulțimea numerelor naturale se notează cu N și se scrie :

$$N = \{0, 1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$$

1.9.7. REPREZENTAREA NUMERELOR NATURALE PE AXA NUMERICĂ

Desenăm o dreaptă (d) și un segment unitate u și luăm pe această dreaptă un punct O numit origine și convenim să purtăm la dreapta punctului O , segmentul u de-a lungul dreptei (d), de un număr oarecare de ori. Se obțin punctele $A, B, C, D, E \dots$ (fig. 1.25).

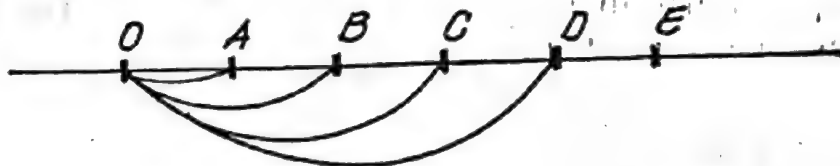


Fig. 1.25

Avem $OA = 1u$, $OB = 2u$, $OC = 3u \dots$

Prin urmare, punctelor A, B, C, D, E, \dots le corespund numerele $1, 2, 3 \dots$ care sînt în mod unic determinate. Unui număr natural îi corespunde un singur punct pe dreaptă; la numere naturale diferite corespund puncte diferite. Dintre două numere naturale date, mai mare este numărul căruia îi corespunde un punct pe axă așezat mai la dreapta :

$$1 < 2 < 3 \dots$$

1.9.8. MULȚIME FINITĂ

Dacă se numără 15 elevi ai unei clase, desemnînd succesiv fiecare elev printr-un număr se stabilește de fapt o corespondență biunivocă dintre mulțimea elevilor și mulțimea primelor 15 numere naturale plecînd de la 1. Cele două mulțimi au același cardinal, numărul 15.

Dacă mulțimea M este finită, atunci cardinalul său este numărul n care arată câte elemente are mulțimea M .

Vom scrie $\text{card } M = n$.

1.9.9. ADUNAREA NUMERELOR NATURALE

Să considerăm numerele naturale 3 și 2. Pentru a calcula suma lor procedăm astfel :

Formăm două mulțimi disjuncte A și B care au 3 și, respectiv, 2 elemente (fig. 1.26).

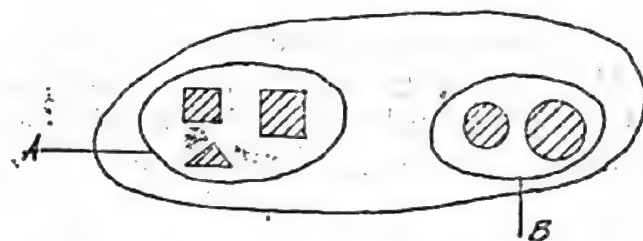


Fig. 1.26

Avem :

$$\text{card}A = 3; \text{card}B = 2.$$

Formăm reuniunea mulțimilor A și B și obținem o nouă mulțime $A \cup B = C$, care are 5 elemente; $\text{card}C = 5$.

Aplicăm proprietatea referitoare la adunarea cardinalelor și obținem :

$$\text{card}A + \text{card}B = \text{card}(A \cup B) = \text{card}C.$$

$$3 + 2 = 5.$$

Prin urmare, operația de adunare a numerelor naturale se reduce la operația de adunare a cardinalelor mulțimilor finite.

1.9.10. SCĂDEREA NUMERELOR NATURALE

Considerăm o mulțime A formată din 5 elemente.

Să formăm o submulțime B , inclusă în A , care are două

elemente. Avem : $3 + 2 = 5$, egalitate care se mai scrie $3 = 5 - 2$;
 în general dacă se consideră două mulțimi A și B , avînd $B \subset A$:
 $\text{card}(A \setminus B) = \text{card}A - \text{card}B$ (fig. 1.27).

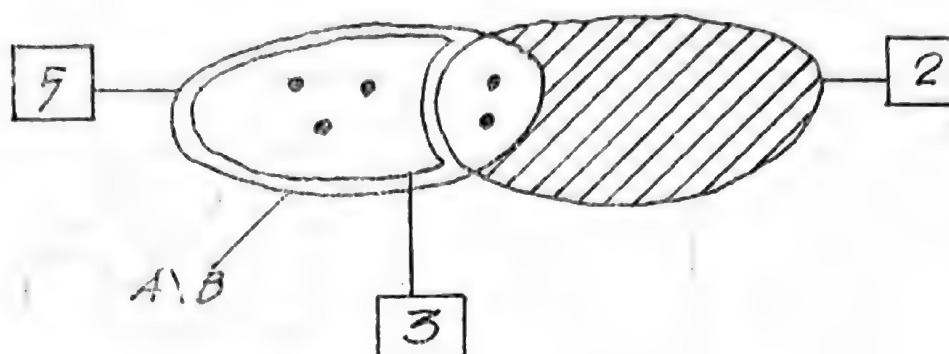


Fig. 1.27

1.9.11. ÎNMULȚIREA NUMERELOR NATURALE

Fie mulțimile :

$$A = \{\square, \square\}, B = \{\circ, \circ\}, C = \{\triangle, \triangle\},$$

$$D = A \cup B \cup C = \{\square, \square, \circ, \circ, \triangle, \triangle\}.$$

Avem : $\text{card}A = \text{card}B = \text{card}C = 2$; $\text{card}D = 6$.

Din relația :

$\text{card}A + \text{card}B + \text{card}C = \text{card}(A \cup B \cup C) = \text{card}D$, deducem :

$$2 + 2 + 2 = 6.$$

Suma $2 + 2 + 2$ se poate scrie $3 \cdot 2$ și se numește produsul numerelor naturale 3 și 2.

Se scrie : $3 \cdot 2 = 6$ sau $6 = 3 \cdot 2$.

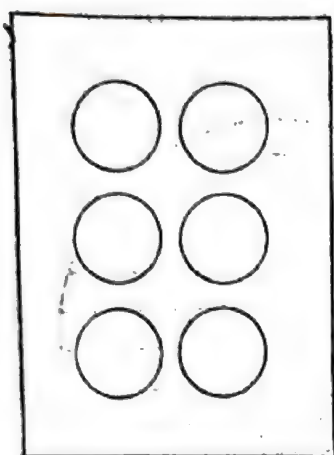
Operația care asociază la două numere naturale 2 și 3 numărul 6 se numește înmulțire.

1.9.12. PROPRIETĂȚILE ÎNMULȚIRII

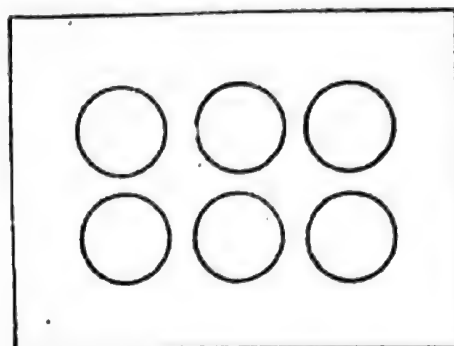
a) Înmulțirea numerelor naturale este comutativă

$$3 \cdot 2 = 6 \text{ (fig. 1.28 a)} \quad 2 \cdot 3 = 6 \text{ (fig. 1.28 b)}$$

$$3 \cdot 2 = 2 \cdot 3 = 6$$



a



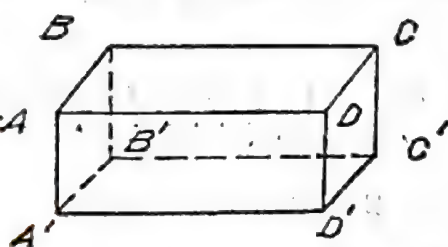
b

Fig. 1.28

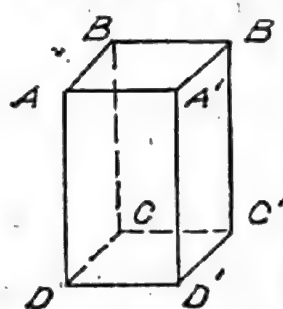
Mai general putem scrie :

$$a \cdot b = b \cdot a.$$

b) Înmulțirea numerelor naturale este asociativă.
Volumul paralelipipedului $ABCD A' B' C' D'$ (fig. 1.29) poate fi



a.



b.

Fig. 1.29

calculat în două moduri : considerind bază dreptunghiul $ABCD$ sau $DCC'D'$.

$V = (4 \cdot 2) \cdot 3$ (fig. 1.29 a), $V = 4 \cdot (2 \cdot 3)$ (fig. 1.29 b),
și avem :

$$(4 \cdot 2) \cdot 3 = 4 \cdot (2 \cdot 3).$$

În general $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.

c) Înmulțirea numerelor este distributivă față de adunare.
Să considerăm două mulțimi disjuncte A și B , avînd :

$$\text{card}A = 4 \cdot 2; \text{card}B = 4 \cdot 3; \text{card}A \cup B = 4 \cdot 5.$$

Din relațiile :

$$\text{card}(A \cup B) = \text{card}A + \text{card}B \text{ (fig. 1.30, a și b),}$$

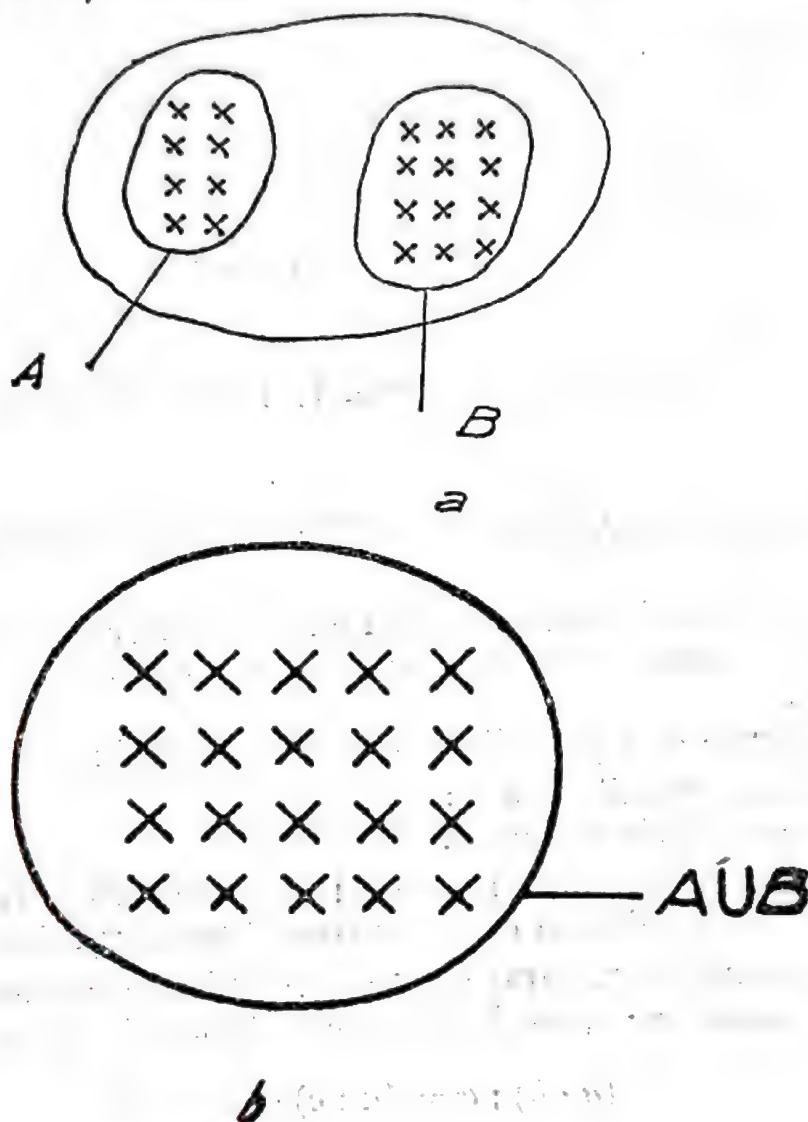


Fig. 1.30

obținem :

$$4 \cdot (2 + 3) = 4 \cdot 2 + 4 \cdot 3.$$

În general : $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c.$

1.9.13. OPERAȚII CU PUTERI

Pentru a ridica un număr natural a la o putere de exponent număr natural n diferit de 0, se calculează produsul a n factori egali cu a .

Numărul n se numește exponentul puterii iar a baza puterii.

Se verifică ușor următoarele proprietăți :

1. Produsul puterilor cu aceeași bază

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}; \quad a, m, n \in N.$$

2. Puterea unei puteri

$$(a^n)^m = a^{nm}.$$

3. Puterea unui produs

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n.$$

4. Cîtul a două puteri cu aceeași bază

$$a^m : a^n = a^{m-n}. \quad (m > n)$$

5. $a^0 = 1, a \in N$

$$a^m : a^m = a^{m-m} = a^0; \quad a^m : a^m = 1. \text{ Prin urmare } a^0 = 1.$$

1.9.14. DIVIZIBILITATEA NUMERELOR NATURALE

Un număr natural a este divizibil cu un număr natural b ($b \neq 0$) dacă există un număr natural c , astfel încît : $a = b \cdot c$.

Proprietăți

Dacă numerele a, b sînt divizibile cu c , atunci :

1. $a + b$ este divizibil cu c ;

2. $a - b$ este divizibil cu c ;

3. Dacă un număr natural a este divizibil cu un număr natural b , atunci el este divizibil cu orice divizor al numărului b .

4. Dacă un număr natural a este divizibil cu un număr natural c , atunci produsul $a \cdot b$, cu $b \in N$, este divizibil cu c , și avem :

$$(a \cdot b) : c = (a : c) \cdot b.$$

1.9.15. CRITERII DE DIVIZIBILITATE

Un număr este divizibil cu 10 dacă ultima sa cifră este zero.

Un număr este divizibil cu 2 dacă ultima sa cifră este zero, sau un număr cu soț.

Un număr este divizibil cu 5 dacă ultima sa cifră este zero sau 5.

Un număr este divizibil cu 3 sau cu 9 dacă suma cifrelor sale este un număr divizibil cu 3 sau cu 9.

Un număr este divizibil cu 25 dacă ultimele sale două cifre sînt : 00, 25, 75, 50.

1.9.16. ECUAȚII ÎN N

Să considerăm egalitatea $3x + 2 = 8$. Această egalitate este adevărată numai pentru anumite valori date variabilei x .

O egalitate de forma $ax + b = c$; $a, b, c, x \in N$, care este adevărată numai pentru anumite valori ale lui x , se numește ecuație. Dacă $x = 1$, atunci avem $3 \cdot 1 + 2 = 5 \neq 8$ și, prin urmare, egalitatea nu este adevărată. Dacă $x = 2$, atunci avem : $3 \cdot 2 + 2 = 8$ și egalitatea este adevărată. Numărul natural 2 pentru care egalitatea este adevărată se numește soluția ecuației.

1.9.17. EXERCITII REZOLVATE

Exemplul 1

Să se scrie, enumerînd elementele din care sînt constituite, mulțimile :

- 1°) Mulțimea A a literelor din care este alcătuit cuvîntul **p e p e n e**;
- 2°) Mulțimea B a cifrelor cu care este scris numărul 110 110;
- 3°) Mulțimea C a zilelor unei săptămîni.

Soluție

$$1^\circ) A = \{p, n, e\}$$

În cuvîntul **p e p e n e** literele p și e apar de mai multe ori. În mulțimea A ele se scriu o singură dată.

$$2^\circ) B = \{1; 0\}$$

$$3^\circ) C = \{\text{luni, marți, miercuri, joi, vineri, sîmbătă, duminică}\}.$$

Exemplul 2

Fie E mulțimea elevilor din clasa a V-a, premianți ai unei școli. Petrișor și Ionel nu sînt premianți. Faceți o diagramă și arătați că Petrișor și Ionel nu fac parte din mulțimea E .

Soluție

Vom trasa mai întâi o curbă închisă care reprezintă mulțimea E (fig. 1.31.).

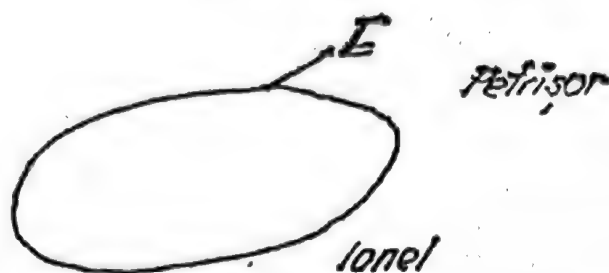


Fig. 1.31

Deoarece există un număr mare de premianți în clasele a V-a ale unei școli, nu vom desena nimic în interiorul curbei închise. Petroșor și Ionel, deoarece nu sînt premianți, vor fi reprezentați prin două puncte în exteriorul curbei.

Exemplul 3

Să se alcătuiască diagrama Venn pentru mulțimea $E = \{x \mid x \text{ este un număr impar mai mic decît } 10\}$.
Să se indice că $18 \notin E$.

Soluție

Elementele mulțimii E sînt numerele 1, 3, 5, 7, 9. Prin urmare trebuie să plasăm 5 puncte în interiorul curbei închise ce reprezintă mulțimea E . De unde rezultă diagrama din fig. 1.32.

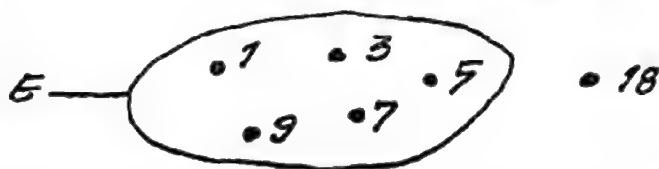


Fig. 1.32

Punctul reprezentînd numărul 18 este așezat în exteriorul curbei închise.

Exemplul 4

Să notăm :

A mulțimea locuitorilor orașului București.

B mulțimea locuitorilor din Republica Socialistă România.

C mulțimea locuitorilor din Europa.

Să se reprezinte aceste trei mulțimi prin diagrame.

Soluție

Avem: $A \subset B \subset C$, de unde rezultă diagrama din fig. 1.33.



Fig. 1.33]

Orice locuitor al orașului București este și locuitor al Republicii Socialiste România. Orice locuitor al României este și locuitor al Europei.

Exemplul 5

$A = \{x \mid x \text{ este elev premiant al școlii noastre}\}$

$B = \{x \mid x \text{ este elev care cântă în corul școlii noastre}\}$

Să se afle $A \cup B$ și apoi să se facă diagrama.

Soluție

$A \cup B$ este format din elementele care aparțin mulțimii A sau mulțimii B .

Deci: $A \cup B = \{x \mid x \text{ este elev premiant sau elev care cântă în corul școlii}\}$ (fig. 1.34).

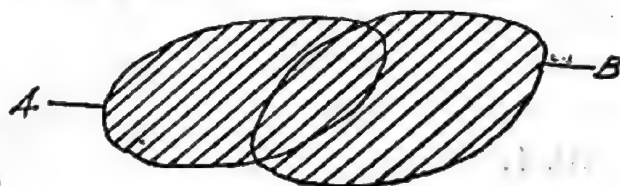


Fig. 1.34]

Mulțimile A și B pot avea elemente comune. Un elev care cântă în corul școlii poate fi și premiant.

Mulțimea $A \cup B$ este formată din porțiunea hașurată.

Exemplul 6

Fie $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$,

$B = \{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.

Să se afle $A \cap B$ și apoi să se alcătuiască diagrama.

Soluție

$$A \cap B = \{5, 6, 7\} \text{ (fig. 1.35).}$$

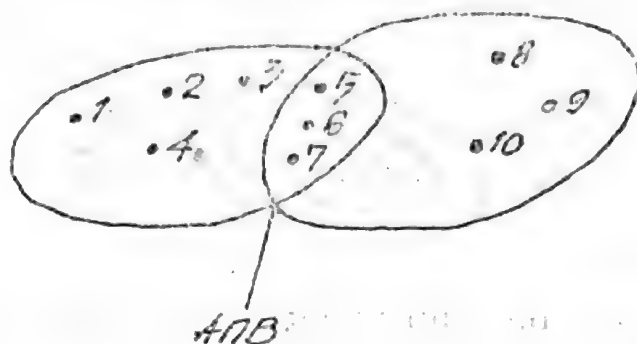


Fig. 1.35

Exemplul 7

Se consideră trei mulțimi date prin diagramele lor (fig. 1.36).

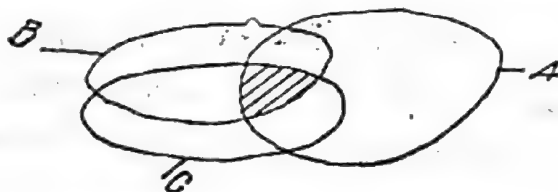


Fig. 1.36

Să se traseze intersecția lor.

Exemplul 8

Se consideră mulțimile :

$$A = \{x \mid x \text{ număr natural mai mic decât } 10\};$$

$$B = \{x \mid x \text{ număr natural impar mai mic decât } 10\}.$$

Să se afle $C_A B$. Să se scrie toate elementele mulțimii $C_A B$.
Să se alcătuiască diagrama.

Soluție

$$\text{Avem: } A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\},$$

$$B = \{1, 3, 5, 7, 9\}.$$

$$C_A B = \{0, 2, 4, 6, 8\},$$

$$C_A B = \{x \mid x \text{ număr natural par mai mic decât } 10\} \text{ (fig. 1.37).}$$

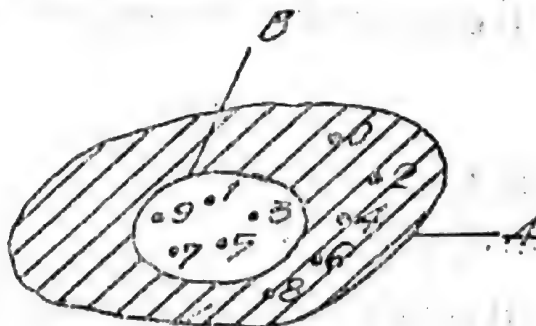


Fig. 1.37

Exemplul 9

Se consideră diagramele din figurile 1.38 și 1.39.



Fig. 1.38

Să se hașureze, reproducând de fiecare dată figura :

- a) $A \cap B$; b) $A \cup B$; c) $A - B$; d) $A \Delta B$; e) $(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)$.

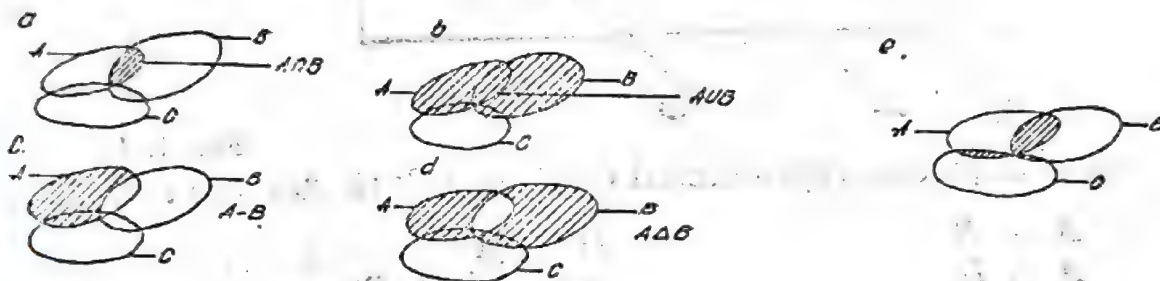


Fig. 1.39

Exemplul 10

Se consideră E o mulțime de referință și A, B două părți ale lui E . Folosind diagramele Venn să se arate că mulțimile $A \cap B$ și $C_E(A \cup B)$ sînt disjuncte (fig. 1.40).

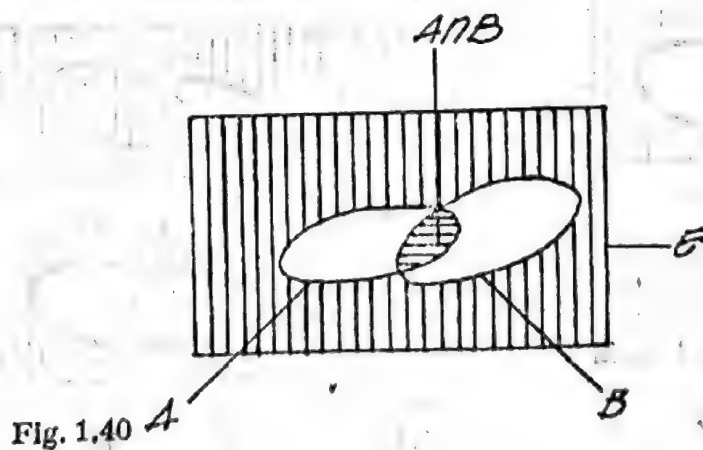


Fig. 1.40

Soluție

În diagrama din fig. 1.40 mulțimea $A \cap B$ este reprezentată prin hașuri orizontale, $C_E(A \cup B)$ este reprezentată prin hașuri verticale.

Se observă că nici o parte nu este hașurată în același timp și vertical și orizontal.

$$\text{Deci: } (A \cap B) \cap C_A(A \cup B) = \emptyset.$$

Exemplul 11

Se consideră diagrama din fig 1.41

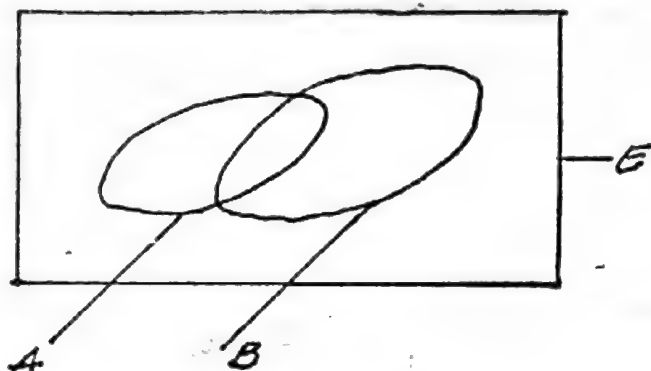


Fig. 1.41

Să se hașureze, reproducând de fiecare dată desenul :

a) $A - B$

b) $A \triangle B$

c) $C_E B$

d) $C_E A$

e) $C_E (A \cap B)$

f) $C_E (A \cup B)$

Soluție (fig. 1.42)

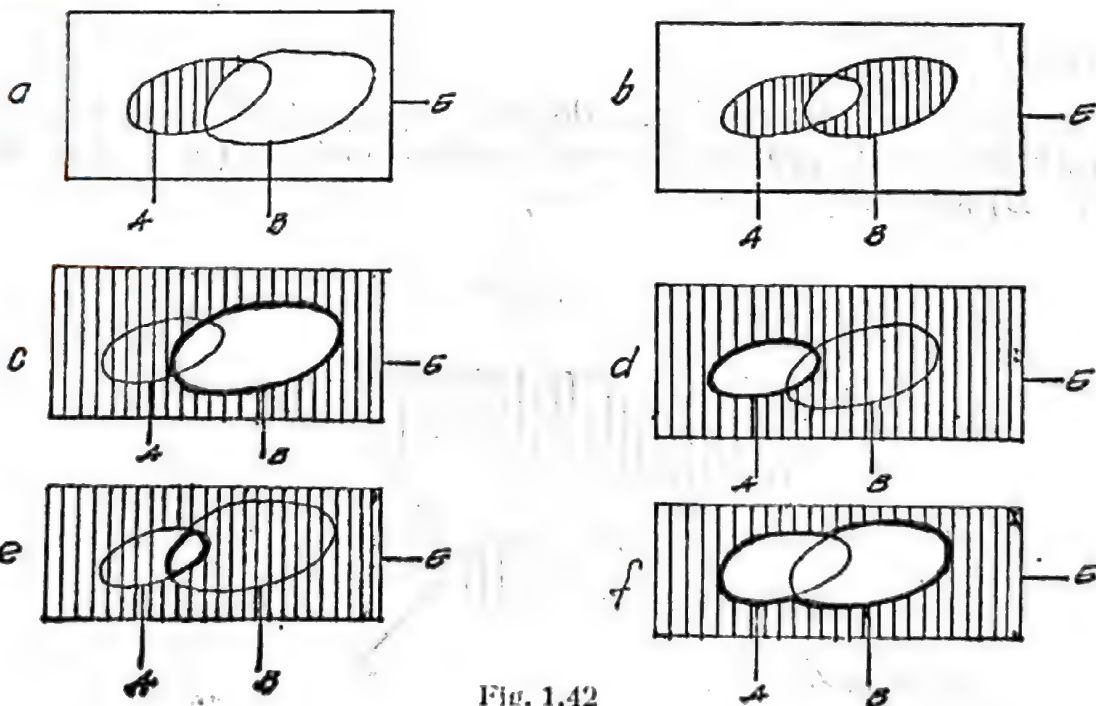


Fig. 1.42

Exemplul 12

Se consideră mulțimile :

$$A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\},$$

$$B = \{3; 5; 6; 7; 9; 10\}.$$

Să se afle $A \triangle B$ și $B \triangle A$. Să se alcătuiască apoi diagramele.

Soluție (fig. 1.43).

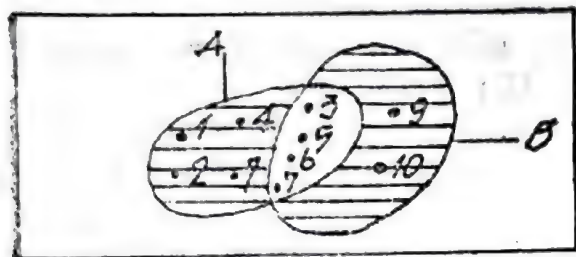


Fig. 1.43

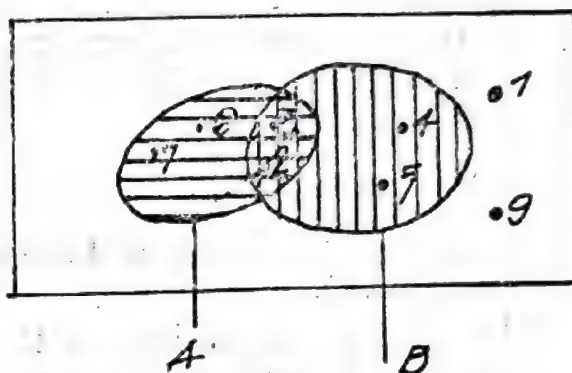


Fig. 1.44

$$A \triangle B = \{1; 2; 4; 9; 10\},$$

$$B \triangle A = \{9; 10; 1; 2; 4\}.$$

Exemplul 13

Se dau diagramele din fig. 1.44. Se cere :

$\text{card} A$, $\text{card}(A \cap B)$, $\text{card}(A \cup B)$, $\text{card}(\overline{A \cup B})$.

Soluție

Mulțimea A este reprezentată prin hașuri orizontale iar mulțimea B prin hașuri verticale, și avem :

$$\text{card} A = 4, \text{card}(A \cap B) = 2,$$

$$\text{card}(A \cup B) = 6, \text{card}(\overline{A \cup B}) = 2.$$

1.9.18. EXERCITII ȘI PROBLEME PROPUSE

1. Să se scrie mulțimea literelor din care este alcătuit cuvântul **m a m a**.

2. Să se scrie mulțimea literelor din care este alcătuit cuvântul **t a t a**.

3. Se dă mulțimea $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Care din următoarele afirmații sînt adevărate :

a) $3 \in A$; b) $4 \notin A$; c) $5 \in A$; d) $4 \in A$.

4. Să se scrie mulțimea A a literelor din care este alcătuit cuvîntul $c a r$ și mulțimea B a literelor din care este alcătuit cuvîntul $a c$.

Să se arate care din următoarele afirmații sînt adevărate :

a) $A \subset B$; b) $A = B$; c) $A \supset B$; d) $A \in B$.

5. Arătați care din următoarele mulțimi sînt scrise corect.

a) $A = \{1; 2; 3; 4\}$; b) $B = \{1; 3; 3; 5\}$;

c) $C = \{\square, \triangle, \bigcirc, \square\}$.

6. Se dau mulțimile :

$A = \{x \mid x \text{ locuitor al Pămîntului care a vizitat anul trecut planeta Marte}\}$,

$B = \{x \mid x \text{ oraș capitală a R.S.R.}\}$.

$C = \{x \mid x \text{ număr natural divizor al lui } 4\}$.

Arătați care din aceste mulțimi este mulțimea vidă și care este mulțimea cu un singur element.

7. Să se reprezinte cu ajutorul diagramelor Venn mulțimile :

$A = \{1, 2, 3, 4\}$,

$B = \{2, 3, 5, 6, 7\}$,

$C = \{6, 7, 8, 9, 10\}$.

8. Să se reprezinte mulțimile :

$A = \{1, 4, 5, 7, 8\}$,

$B = \{1, 4, 9, 10\}$,

$C = \{1, 2, 3, 4\}$,

completînd diagramele Venn desenate (fig. 1.45).

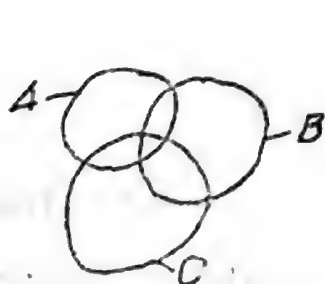


Fig. 1.45

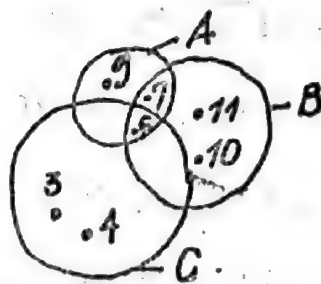


Fig. 1.46

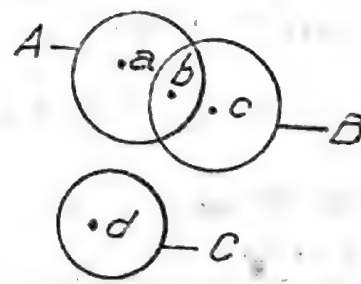


Fig. 1.47

9. În fig. 1.46 sînt reprezentate cu ajutorul diagramelor Venn mulțimile A, B, C .

Să se scrie mulțimile A, B, C enumerînd toate elementele din care sînt alcătuite.

10. Să se arate în ce relație sînt elementele a, b, c, d, e față de mulțimile A, B, C (fig. 1.47).

11. Să se scrie submulțimile proprii ale mulțimii :

$$A = \{a, 1, b\}.$$

12. Se dau mulțimile : $X = \{1, 2, 3, 4\},$

$$Y = \{4, 5, 6, 7, 2, 3, 1\}.$$

Să se scrie toate submulțimile A care verifică dubla incluziune $X \subset A \subset Y$.

13. Se dă mulțimea : $X = \{1, 2, 3, 4\}.$

Să se scrie toate submulțimile proprii ale mulțimii X care conțin elementul 1.

14. În fig. 1.48 este reprezentată printr-o diagramă Venn o

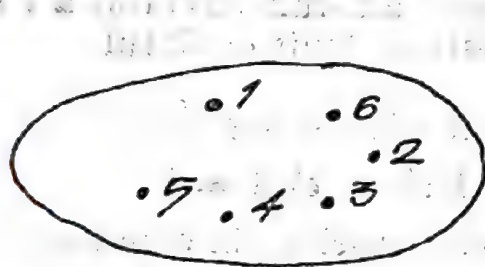


Fig. 1.48

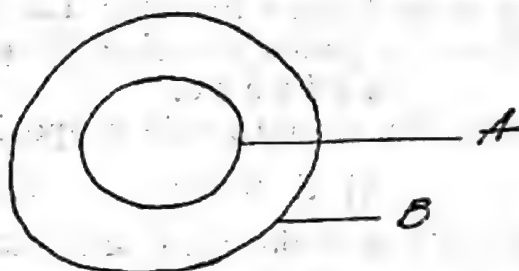


Fig. 1.49

mulțime. Să se determine cu ajutorul altor două diagrame două submulțimi disjuncte ale mulțimii A . Să se scrie aceste submulțimi enumerînd elementele din care sînt alcătuite.

15. Să se scrie toate mulțimile A care verifică relațiile :

$$\{1, 2, 4\} \subset A \text{ și } A \subset \{7, 1, 8, 2, 4\}.$$

16. Se dau mulțimile :

$$A = \{2, 3, 4\} \text{ și } B = \{x, 2\}.$$

Să se determine x astfel încît să fie satisfăcută relația $B \subset A$.

17. Să se reprezinte grafic cu ajutorul diagramelor Venn mulțimile :

$$A = \{1, 2, 3, 4\}, \quad B = \{2, 3\}.$$

Ce relație există între mulțimile A și B (fig. 1.49) ?

18. Se dau mulțimile :

A — mulțimea literelor din care este alcătuit cuvântul *c a r*;

B — mulțimea literelor din care este alcătuit cuvântul *a c a r*.

Care din următoarele propoziții sînt adevărate :

$$1. A \subset B; \quad 2. A = B; \quad 3. B \supset A.$$

19. Se dau mulțimile :

A — mulțimea literelor din care este alcătuit cuvântul *m a r e*;

B — mulțimea literelor din care este alcătuit cuvântul *r a m e*.

Care din următoarele propoziții sînt adevărate :

$$1) A = B; \quad 2) A \subset B.$$

20. Se dau mulțimile :

A — mulțimea literelor din care este alcătuit cuvântul
p e r d e l e;

B — mulțimea literelor din care este alcătuit cuvântul *r e p e d e*

Să se arate că avem relația : $B \subset A$.

21. Se dau mulțimile :

A — mulțimea literelor din care este alcătuit cuvântul *a v i z*;

B — mulțimea literelor din care este alcătuit cuvântul
a v i z a r e.

Care din următoarele propoziții sînt adevărate :

$$a) A \supset B; \quad b) A \subset B; \quad c) A = B$$

22. Să se scrie, prin enumerarea elementelor din care sînt alcătuite, mulțimile :

$A = \{x \mid x \text{ divide numărul } 9\},$

$B = \{x \mid x \text{ număr natural mai mic decît } 20, \text{ care se împarte fără rest la } 4\}.$

23. Arătați care din următoarele proprietăți definesc o mulțime :

a) x este elev silitor al clasei în care învață;

b) x este un locuitor al planetei Pămînt;

c) x este un elev inteligent din școala noastră.

24. Se dă mulțimea $A = \{2+2; 2 \times 2 \times 2\}$. Să se arate care din următoarele afirmații sînt adevărate :

a) $2 \in A;$

b) $4 \notin A;$

c) $8 \in A.$

25. Se dau mulțimile :

$$A = \{a; b; c; d\},$$

$$B = \{1; 2\},$$

$$C = \{\{1\}; \{2\}; \{1; 2\}\}.$$

Să se arate care din următoarele propoziții sînt adevărate și care sînt false :

- a) $B \in A$;
- b) $B \in C$;
- c) $\{1\} \in B$;
- d) $\{1\} \in C$.

26. Să se arate care din următoarele afirmații sînt adevărate :

- a. $24 \in \{x \mid x \text{ multiplu al numărului } 4\}$,
- b. $3 \in \{x \mid x \text{ divizor al numărului } 9\}$,
- c. $14 \in \{x \mid x \text{ divizor al numărului } 36\}$.

27. Să se scrie în mod mai simplu mulțimile

$$A = \{4+4, 5-3, 2 \times 3, 5 \times 2\},$$

$$B = \{5-4, 3 \times 2+1, 6+2 \times 2\}.$$

28. Să se determine elementele x, y astfel încît să avem satisfăcute egalitățile :

$$\{1, 2, x, y\} = \{1, 2, 4, 5\}.$$

29. Să se arate că oricare ar fi obiectele a, b, c avem :

$$\{a, b, b, c\} = \{a, b, c\}.$$

30. Se dă mulțimea :

$$A = \{\{x\}, \{x; y\}\}.$$

Să se arate care din următoarele afirmații sînt adevărate și care sînt false :

- a) $\{x\} \subset A$;
- b) $\{x\} \notin A$;
- c) $\{x\} = x$;
- d) $\{x\} \in A$.

31. Se dă mulțimea $A = \{x \in N \mid x < 5\}$.

Cu ajutorul diagramei Venn să se reprezinte grafic mulțimea.
Care din următoarele propoziții sînt adevărate :

- a) $4 \in A$;
- b) $6 \in A$;
- c) $2 \notin A$.

32. Să se scrie mulțimea numerelor naturale mai mici decît numărul natural 5.

33. Se dă mulțimea :

$$A = \{x \in N \mid 1 \leq x \leq 8\}.$$

Să se scrie mulțimea A , enumerând elementele din care este alcătuită.

34. Se dă mulțimea : $A = \{x \in N \mid 1 < x < 8\}$. Să se scrie mulțimea A enumerând elementele din care este alcătuită.

35. Se dau mulțimile :

$$A = \{x \in N \mid 1 \leq x \leq 5\}; \quad B = \{x \in N \mid 1 < x \leq 5\}.$$

Să se scrie aceste mulțimi enumerând elementele din care sînt alcătuite.

36. Se dau mulțimile :

$$A = \{x \in N \mid 1 < x < 5\};$$

$$B = \{x \in N \mid 1 \leq x \leq 5\}.$$

Care din următoarele propoziții sînt adevărate :

1) $A \subset B$;

2) $B \subset A$;

3) $A = B$.

37. Se dă mulțimea $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

Să se scrie o submulțime X a lui A , formată din numere pare și o submulțime Y , formată din numere impare.

38. Să se determine mulțimea :

$$A = \{x \in N \mid x = 3n; n = 1, 2, 3, 4\}.$$

39. Să se determine mulțimea :

$$A = \{x \in N \mid x = 3n - 1, n = 1, 2, 3\}.$$

40. Se dau mulțimile :

$$A = \{x \in N \mid x = 2n; n = 1, 2, 3, 4\}$$

$$B = \{x \in N \mid x = 2n + 1; n = 1, 2, 3, 4\}.$$

Să se scrie aceste mulțimi enumerând elementele din care sînt alcătuite.

Să se arate care din următoarele afirmații sînt adevărate și care sînt false :

a) $A \subset B$; b) $B \supset A$; c) A și B nu au elemente comune.

41. Se dau mulțimile :

$$A = \{x \in N \mid x = n + 2; n = 1, 2, 3, 4, 5\};$$

$$B = \{x \in N \mid x = n + 3; n = 0, 1, 2, 3, 4, 5\}.$$

Să se arate care din următoarele afirmații sînt adevărate :

a) $A \subset B$; b) $A = B$; c) $B \subset A$.

42. Se dau mulțimile :

$$A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}, B = \{4, 5, 6, 7, 8\}, C = \{2, 3\}.$$

Să se scrie aceste mulțimi indicând o proprietate caracteristică a elementelor lor.

43. Se dau mulțimile :

$$A = \{3, 5, 7, 9, 11\}, B = \{4, 7, 10, 13\}.$$

Să se scrie mulțimile A și B indicând o proprietate caracteristică a elementelor lor.

44. Se dă mulțimea :

$$A = \{x | x = 3n + 2; n = 1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Să se arate care din următoarele afirmații sînt adevărate și care sînt false :

$$a) 17 \in A; \quad b) 26 \in A; \quad c) 44 \in A.$$

45. Se dau mulțimile :

$$A = \{1, 2, 3, 4\}, \quad B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Să se afle $A \cup B$.

46. Se dau mulțimile :

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\},$$

$$B = \{5, 6, 7, 8, 9\}.$$

Să se afle $A \cap B$.

47. În figura 1.50 sînt reprezentate cu ajutorul diagramelor Venn mulțimile A , B și C .

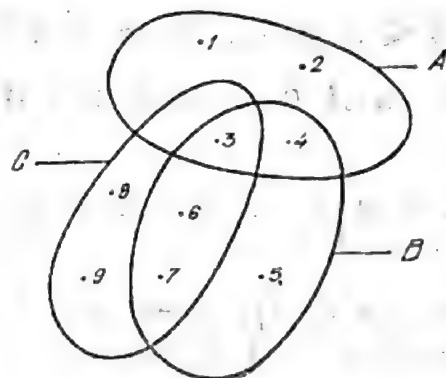


Fig. 1.50

Să se afle :

$$\begin{aligned} &A \cap B; \quad A \cap C; \quad B \cap C; \\ &A \cup B; \quad A \cup C; \quad B \cup C; \\ &A \cap (B \cap C); \quad (A \cup B) \cup C. \end{aligned}$$

48. Se dau mulțimile :

$$A = \{0, 1, 2, 3\}; B = \{2, 3, 4, 5\}; C = \{0, 3, 6\}.$$

Să se determine mulțimile :

$$M = A \cup (B \cap C); N = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

49. Se dau mulțimile :

$$A = \{x \in N \mid 1 \leq x \leq 4\}; B = \{5; 6\}.$$

Să se scrie mulțimea $A \cup B$, indicând o proprietate caracteristică a elementelor sale.

50. Să se verifice cu ajutorul diagramelor Venn proprietatea de asociativitate a reuniunii mulțimilor (fig. 1.51) :

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C.$$

51. Să se verifice cu ajutorul diagramelor Venn proprietatea de asociativitate a intersecției (fig. 1.52).

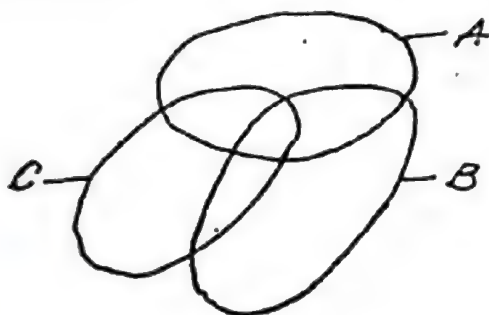


Fig. 1.51



Fig. 1.52

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C).$$

52. $A = \{x \in N \mid 3 \leq x \leq 7\}$, $B = \{x \in N \mid 5 \leq x \leq 10\}$.

Să se scrie mulțimea $A \cap B$, indicând o proprietate caracteristică a elementelor.

53. $A = \{x \in N \mid 2 \leq x \leq 5\}$, $B = \{x \in N \mid 5 \leq x \leq 7\}$.
Să se scrie mulțimea $A \cap B$.

54. $A = \{x \in N \mid 6 < x < 8\}$, $B = \{x \in N \mid 8 < x < 10\}$.
Să se determine mulțimea $A \cap B$.

55. $A = \{x \in N \mid 3 < x < 5\}$, $B = \{x \in N \mid 5 < x < 7\}$.
Să se scrie mulțimea $A \cup B$.

56. $A = \{x \in N \mid 5 \leq x < 7\}$, $B = \{x \in N \mid 7 \leq x < 9\}$.
Să se determine mulțimea $A \cup B$.



57. $A = \{x \in N | 5 \leq x\}$, $B = \{x \in N | x \leq 7\}$.

Să se afle mulțimea $A \cap B$. Să se scrie mulțimea $A \cup B$, indicînd o proprietate caracteristică a elementelor sale.

58. $A = \{x \in N | 3 < x < 5\}$, $B = \{x \in N | 5 < x < 9\}$.

Să se scrie mulțimea $A \cup B$ ca o diferență de mulțimi.

59. Se dau mulțimile :

$$A = \{x \in N | 3 < x\} \quad B = \{x \in N | x \leq 7\}.$$

Să se determine mulțimea $A \cup B$.

60. Se dau mulțimile :

$$P = \{x \in N | x \text{ număr par}\};$$

$$Q = \{x \in N | x \text{ număr fără soț}\}.$$

Să se determine mulțimile :

$$P \cup Q \text{ și } P \cap Q.$$

61. Se dau mulțimile :

$$A = \{x \in N | x > 5\}; \quad B = \{x \in N | x \geq 3\}.$$

Să se scrie mulțimile : $A \cup B$; $A \cap B$ indicînd o proprietate caracteristică a elementelor lor.

62. Se dau mulțimile :

$$A = \{a; 1; 2\}, \quad B = \{0, 1, 2, 4\}.$$

Să se determine a astfel încît să avem egalitatea :

$$A \cup B = \{x \in N | x \leq 4\}.$$

63. Se dau mulțimile :

$$A = \{x, y, 2\}, \quad B = \{1, 2, 3, 4\}.$$

Să se determine x și y astfel încît să avem egalitatea :

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

64. Fie mulțimile :

$$A = \{a, 1, 2\}, \quad B = \{2, 3, a\}.$$

Să se determine a astfel încît să avem egalitatea :

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

65. Se dau mulțimile :

$$A = \{x \in N | 1 \leq x \leq a\}, \quad B = \{x \in N | a \leq x \leq 6\}.$$

Să se determine a astfel încât să fie satisfăcută egalitatea $A \cap B = \{4\}$.

Să se scrie apoi $A \cup B$ indicând o proprietate caracteristică a elementelor.

66. Se dau mulțimile :

$$A \cap B = \{3\}, \quad A \cap C = \{7\}.$$

Să se determine mulțimea : $A \cup (B \cap C)$.

67. Fie mulțimile :

$$A \cup B = \{x \in \mathbb{N} | 1 \leq x \leq 4\}, \quad A \cup C = \{x \in \mathbb{N} | 1 \leq x \leq 5\}.$$

Să se determine mulțimea : $A \cup (B \cap C)$.

68. Fie mulțimile :

$$A = \{1, 2, 3\}, \quad B = \{2, 4, 5\}.$$

Cu ajutorul diagramelor Venn (fig. 1.53) să se arate că :

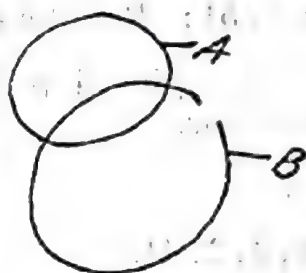


Fig. 1.53

$$A \subset A \cup B, \quad A \cap B \subset A, \quad A \cap B \subset B.$$

69. Să se arate că dacă : $\{a\} \cap C = \{a\}$, atunci avem relația : $a \in C$.

70. Se consideră mulțimea :

$$A = \{x \in \mathbb{N} | 3 \leq x \leq 7\} \setminus \{4\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{N} | 4 \leq x \leq 8\} \setminus \{5\}.$$

Să se determine mulțimile : $A \cap B$ și $A \cup B$.

71. Să se determine mulțimea X cunoscând că ea satisface simultan condițiile :

$$X \cup \{1, 2, 3\} = \{1, 2, 3, 4, 5\};$$

$$X \cap \{1, 2, 3\} = \{1, 2\}.$$

72. Să se determine mulțimea $X \subset \{1, 5, 6, 2\}$, cunoscând că :

$$X \cap \{1, 5, 6, 2\} = \{1, 2\}.$$

73. Se dau mulțimile :

$$A = \{1, 2, 3, 4\}, \quad B = \{3, 4, 5, 6\}.$$

$$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}.$$

Să se determine mulțimile : $C_E A$ și $C_E B$.

74. Se dau mulțimile ;

$$A = \{x \in \mathbb{N} | x \leq 8\}, \quad B = \{x \in \mathbb{N} | 2 \leq x \leq 8\},$$

$$E = \{x \in \mathbb{N} | x \leq 10\}.$$

Să se determine $C_E A$ și $C_E B$.

75. Se consideră mulțimile :

$$E = \{1, a, c, d\}, \quad F = \{b, d, 2, c, 7\}, \quad G = \{b, x, a, d\}.$$

Să se determine mulțimile : $E \cup F$; $E \cup G$; $F \cup G$;
 $E \cap (F \cup G)$; $F \cap G$; $C_E(E \cap G)$.

76. A — este mulțimea literelor din care este alcătuit cuvântul **R a d u**.

B — este mulțimea literelor din care este alcătuit cuvântul **d a u**. Să se afle $C_A B$.

77. A — este mulțimea literelor din care este alcătuit cuvântul **c a r t e**. B — este mulțimea literelor din care este alcătuit cuvântul **a r t e**. Să se arate că mulțimea $C_A B$ are un singur element.

78. X — este mulțimea literelor din care este alcătuit cuvântul **a r b o r e**;

Y — este mulțimea literelor din care este alcătuit cuvântul **a e r**;

Z — este mulțimea literelor din care este alcătuit cuvântul **b o b**,

Să se verifice egalitatea : $C_X Y = Z$; $C_X Z = Y$.

79. Se dă mulțimea :

$$A = \{2; 3; 4; 5; 6\}.$$

Să se scrie și în alt mod mulțimea A indicînd o proprietate.

80. În mulțimea E a persoanelor adulte se notează cu : A , mulțimea bărbaților ; B , mulțimea femeilor ; C , mulțimea persoanelor care poartă ochelari ; D , mulțimea persoanelor care poartă pălărie.

Enumerați cîte o proprietate caracteristică a mulțimilor ;

$$A \cap B, C \cap D, C_E A, C_E B, C_E D.$$

$$\begin{aligned} 81. \text{ e: } E &= \{x \in N, x \leq 8\} \\ B &= \{x \in N, 0 \leq x \leq 6\} \\ C &= \{x \in N, 3 \leq x \leq 7\} \\ A &= \{x \in N, 5 \leq x \leq 8\}. \end{aligned}$$

a) Să se determine : $C_E B$, $C_E C$, $C_E(A \cup C)$, $C_E A$, $C_E C$.

b) Să se verifice relația :

$$C_E(A \cup C) = C_E A \cap C_E C.$$

82. Folosind relația din problema precedentă (punct b) să se determine $C_E(A \cup B)$, dacă se dau mulțimile :

$$C_E A = \{1, 2, 3, 4\}, C_E B = \{1, 2, 3, 5\}.$$

83 a) Se consideră mulțimea : $E = \{a, b, c, d, e\}$ și submulțimile :

$C_E A = \{a, b, c\}$, $C_E B = \{b, c, d\}$. Să se determine în două moduri mulțimile : $A \cup B$ și $A \cap B$.

84. Să se determine mulțimea :

$$A = \left\{ x \in N \mid \frac{4x^2 + 6x + 8}{2x + 3} \in N \right\}.$$

85. Să se determine mulțimea :

$$A = \left\{ x \in N \mid -1 < \frac{x-5}{2} < +2 \right\}.$$

86. Să se determine mulțimea :

$$A = \{x \in N \mid (x-1) + (3x+2) - 2x = 5\}.$$

87. Să se determine mulțimile A și B știind că sînt îndeplinite condițiile :

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\};$$

$$A \cap B = \{1, 2\};$$

$$A - B = \{5\}.$$

88. Să se determine elementele mulțimii :

$$A = \left\{ x \in N \mid x = \frac{2u+1}{2u-3}; u \in N \right\}.$$

89. Să notăm :

A — mulțimea divizorilor unui număr a ;

B — mulțimea divizorilor unui număr b .

Se știe că :

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9\} ;$$

$$A \cap B = \{1, 2, 4, 5\} ;$$

$$A - B = \{7, 3\}.$$

Folosind diagramele Venn, să se determine a și b .

90. Se consideră mulțimile :

$$A = \{x \in N ; x \leq 10\} ;$$

$$B = \left\{ \frac{\sqrt{63} - \sqrt{45}}{\sqrt{7} - \sqrt{5}}, \frac{\sqrt{125} + \sqrt{75}}{\sqrt{5} + \sqrt{3}} \right\} ;$$

$$C = \left\{ \frac{\sqrt{12} + \sqrt{80}}{\sqrt{3} + \sqrt{5}}, \frac{\sqrt{15} - \sqrt{125}}{\sqrt{3} - \sqrt{5}} \right\}.$$

Să se arate care din următoarele propoziții sînt adevărate :

$$p_1 : A \subset B ; p_2 : A = B ; p_3 : B \subset A ; p_4 : C \subset A ;$$

$$p_5 : C \cup B \subset A.$$

Cardinalul mulțimii

91. Fiind date mulțimile :

$$A = \{\square, \triangle, ?\}, \quad B = \{a, b, c, d\}, \quad C = \{0\}.$$

Să se calculeze card A , card B , card C .

92. Se dau mulțimile :

$$A = \{a, b, c, d, e\},$$

$$B = \{c, d, e, f, g\}.$$

Să se afle : card $(A \setminus B)$; card $(B \setminus A)$.

93. Care este numărul de elemente ale mulțimii :

$$A = \{x \in N | 0 \leq x \leq 100\}.$$

94. Să se afle cardinalul mulțimilor :

$$A = \{x \in N | 3 \leq x \leq 33\},$$

$$B = \{x \in N | 1 \leq x \leq 81\}.$$

95. Mulțimea A are 43 elemente, mulțimea B are 20 elemente, iar mulțimea $A \cup B$ are 63 elemente. Sînt disjuncte aceste mulțimi?

96. Mulțimea A are 14 elemente, mulțimea B are 16 elemente, iar mulțimea $A \cup B$ are 20 elemente. Sînt disjuncte mulțimile A și B ?

Să se calculeze numărul de elemente al mulțimii $A \cap B$.

97. Se dă mulțimea $A = \{1; 2; 3\}$. Să se scrie mulțimea numerelor cuprinse între 100 și 300 formate cu elemente ale mulțimii A luate ca cifre.

98. În figura 1.54 sînt reprezentate prin diagramele Venn mulțimile A și B .

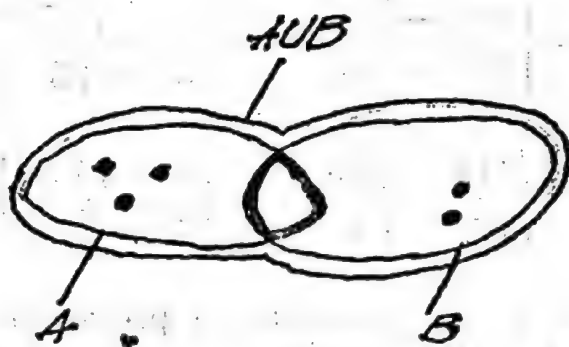


Fig. 1.54

Să se afle :

$\text{card } A$; $\text{card } B$; $\text{card } (A \cup B)$. Să se verifice relația :
 $\text{card } (A \cup B) = \text{card } A + \text{card } B$.

99. Cu ajutorul diagramelor Venn desenate în fig. 1.55. să se

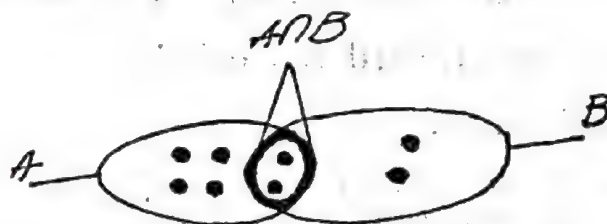


Fig. 1.55

afle : $\text{card } A$, $\text{card } B$, $\text{card } (A \setminus B)$, $\text{card } (A \cap B)$.

Să se verifice relația : $\text{card } (A \cup B) = \text{card } A + \text{card } B - \text{card } (A \cap B)$.

100. În fig. 1.56 sînt reprezentate cu ajutorul diagramelor Venn mulțimile A și B . Să se calculeze : $\text{card } A$; $\text{card } B$;
 $\text{card } A \cup B$; $\text{card } (A \setminus B)$.

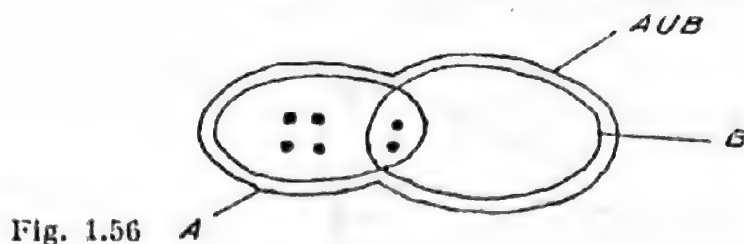


Fig. 1.56

Să se verifice apoi formula :

$$\text{card}(A \cup B) = \text{card } A + \text{card } B - \text{card}(A \cap B).$$

101. În figura 1.57 se indică diagrama unor mulțimi și numărul elementelor scrise în fiecare mulțime.

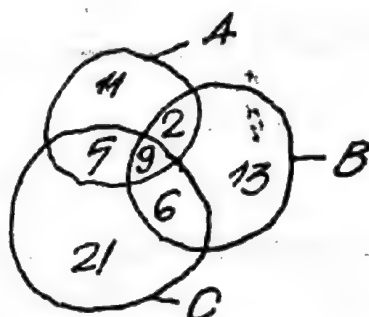


Fig. 1.57

Să se afle :

$\text{card } A$, $\text{card } B$, $\text{card}(\overline{A \cup B \cup C})$,
 $\text{card}(A \cap B)$, $\text{card}(A \cap B \cap C)$,
 $\text{card } \bar{A}$, $\text{card } \bar{B}$, $\text{card } \bar{C}$,

102. Se dau diagramele din fig. 158.

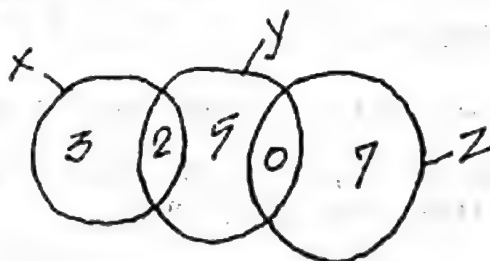


Fig. 1.58

Să se afle :

$\text{card } X$, $\text{card } Y$, $\text{card } Z$,
 $\text{card}(X \cup Y \cup Z)$
 $\text{card } \bar{X}$, $\text{card } \bar{Y}$, $\text{card } \bar{Z}$,
 $\text{card}(Y \cap Z)$, $\text{card}(X \cap Y)$.

103. Se dau diagramele din fig. 1.59.

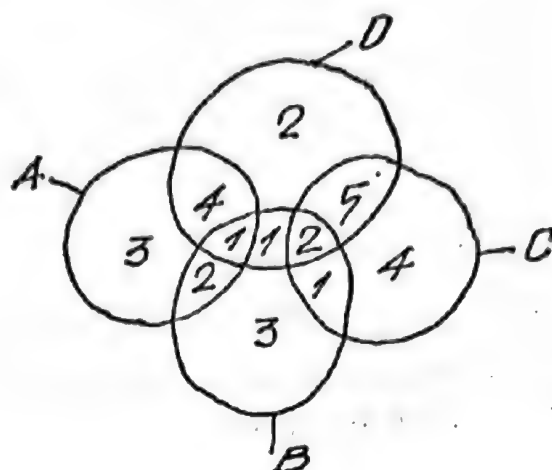


Fig. 1.59

Să se afle : $\text{card}(A \cap B \cap C)$,

$\text{card}(B \cap C \cap D)$, $\text{card}(\overline{A \cap B})$,

$\text{card}(A \cup B \cup C)$.

104. În fig. 1.60 sînt reprezentate cu ajutorul diagramelor

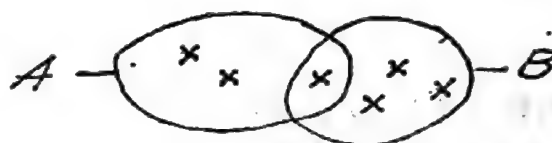


Fig. 1.60

Venn mulțimile A și B . Să se afle : $\text{card } A$, $\text{card } B$, $\text{card}(A \setminus B)$, $\text{card}(A \cap B)$.

Să se verifice apoi relația : $\text{card}(A \setminus B) = \text{card } A - \text{card}(A \cap B)$.

105. Se dau mulțimile :

$$A = \{x \in \mathbb{N} | x < 5\} \text{ și } B = \{x \in \mathbb{N} | 5 < x < 10\}.$$

Să se afle : $\text{card } A$, $\text{card } B$, $\text{card}(A \cup B)$ și să se verifice relația : $\text{card}(A \cup B) = \text{card } A + \text{card } B$.

106. Se dau mulțimile :

$$A = \{x \in \mathbb{N} | x < 10\},$$

$$B = \{x \in \mathbb{N} | 10 < x < 15\}.$$

Se poate spune, fără a determina mulțimea $A \cup B$, că egalitatea : $\text{card}(A \cup B) = \text{card } A + \text{card } B$ este adevărată? De ce?

107. Se consideră mulțimile :

$$A = \{x \in N | 3 \leq x \leq 10\},$$

$$B = \{x \in N | 5 \leq x \leq 15\}.$$

Să se afle : $\text{card } A$, $\text{card } B$, $\text{card } (A \cap B)$, $\text{card } (A \cup B)$.

Să se verifice relația : $\text{card } (A \cup B) = \text{card } A + \text{card } B -$
 $-\text{card } (A \cap B)$.

108. Se dă mulțimea :

$$M = \{x \in N | x = 2n + 1, n = 1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Să se determine mulțimile :

$$A = \{x \in M | x \leq 3\},$$

$$B = \{x \in M | x \leq 10\}.$$

109. Se dă $\text{card } A = 18$, $\text{card } B = 24$, $\text{card } (A \cup B) = 36$.

Să se afle :

$$\text{card } (A \cap B), \text{card } (A \setminus B), \text{card } (B \setminus A).$$

110. Se dau mulțimile :

$$A = \{1, 2, 3, 4\}, B = \{3, 4, 5, 6\}.$$

Să se determine mulțimile :

$$C = \{(x; y) | x \in A; y \in A; 2x + y \in B\},$$

$$D = \{(x; y) | x \in A; y \in A; x + y \in B\},$$

$$S = \{(x; y) | x \in A; y \in A; x + y \in B \text{ și } 2x - y \in B\}.$$

Să se afle :

$$\text{card } C, \text{card } D, \text{card } (C \cap D), \text{card } (C \cup D), \text{card } S.$$

111. Mai mulți pionieri au luat masa de seară la cantină. S-au servit 35 fripturi și 40 prăjituri. Cunoscând că 10 pionieri au mâncat fiecare câte o friptură și câte o prăjitură și că 5 pionieri nu au mâncat nici fripturi și nici prăjituri, să se afle numărul pionierilor care au fost la cantină.

112. Mai mulți pionieri au intrat într-o cofetărie și au comandat : 20 prăjituri, 10 sticle cico-cola și 14 sticle pepsi-cola. Să se afle numărul pionierilor, știind că toți au comandat, dar că 5 dintre ei nu au comandat prăjitură ci au băut cico-cola, iar 6 au băut pepsi-cola (evident, niciun pionier nu a băut și pepsi-cola și cico-cola ci numai un fel de băutură).

113. Într-o tabără sînt 172 pionieri, care au participat la trei concursuri : șah, desen și atletism. Se știe că fiecare pionier a participat la cel puțin un concurs, dar avînd posibilitatea să parti-

cipe la toate trei ; 84 pionieri au luat parte numai la cite un concurs dintre care 23 numai la şah, 19 numai la desen, 21 pionieri au participat la toate concursurile ; 110 au concurat la atletism din care 41 şi la cel de şah.

Se cere :

- numărul de participanţi la atletism ;
- numărul de participanţi la şah ;
- numărul celor care au participat la şah sau desen ;
- numărul participanţilor şi la şah şi la desen ;

Indicaţie

În interiorul diagramelor se scrie numărul de elemente al fiecărei mulţimi (fig. 1.61).

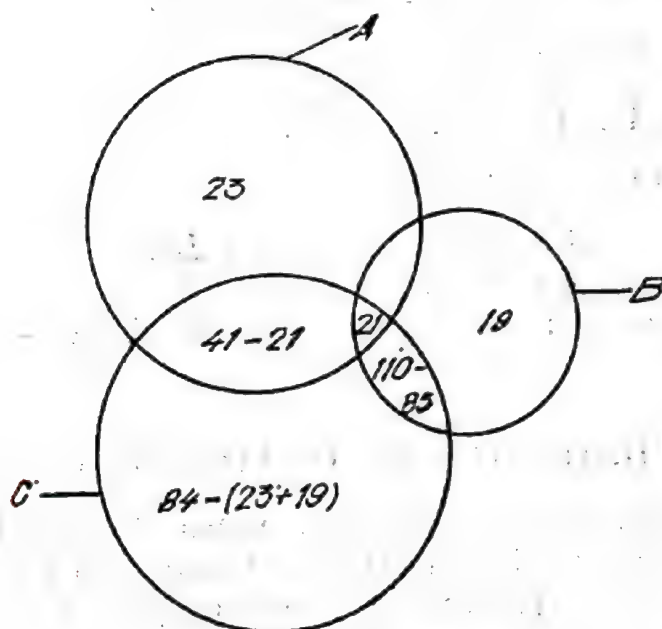


Fig. 1.61

114. Elevii unei şcoli au organizat mai multe acţiuni :

Strângerea plantelor medicinale, la care au participat 43 elevi, îngrijirea grădinii pomicole a şcolii, la care au participat 38 elevi, amenajarea bazei sportive, la care au participat 45 elevi.

Cunoscînd că 10 elevi au luat parte la toate acţiunile, 20 elevi au participat la strângerea plantelor medicinale şi la îngrijirea grădinii, 15 elevi au participat şi la îngrijirea grădinii şi la amenajarea bazei sportive şi 18 au luat parte la strângerea plantelor şi amenajarea bazei sportive, să se afle numărul pionierilor care au luat parte la fiecare activitate.

115. Fiind date mulțimile :

$$A = \{x \in N | x = 2n + 1; n = 1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$B = \{x \in N | x = 2n - 1; n = 1, 2, 3, 4, 5\}.$$

Să se scrie mulțimea $A \cap B$, indicându-se o proprietate caracteristică a elementelor ei.

116. Se dă mulțimea :

$$A = \{1, 2, 3, 4\}.$$

Să se scrie toate submulțimile X ale lui A care verifică relația : $\{1, 2\} \subset X$ și apoi să se afle numărul de elemente al acestor submulțimi.

117. Să se determine mulțimile A și B care satisfac relațiile :

$$A \setminus B = \{1, 2\}, \quad A \cap B = \{3, 4\},$$

$$B \setminus A = \{5, 6\}, \quad A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Să se afle : $\text{card}(A \cup B)$; $\text{card}(A \cap B)$.

118. Dacă A , B și C sînt trei mulțimi date, exprimați fiecare porțiune hașurată cu ajutorul operațiilor \cup , \cap , $-$. (fig. 1.62).

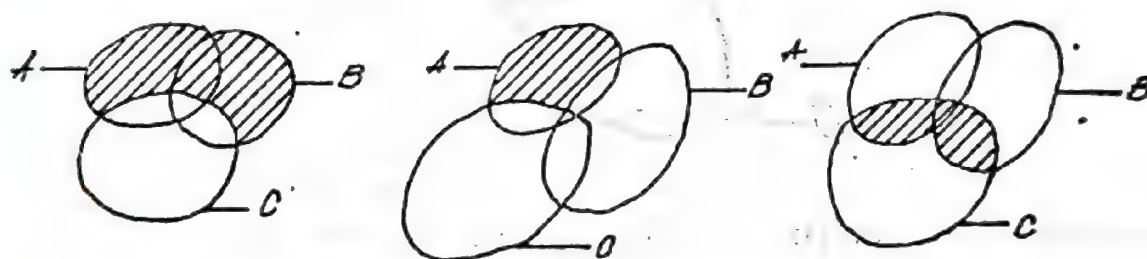


Fig. 1.62

119. Să se arate cu ajutorul diagramelor Venn că dacă

$$A \subset B, \text{ atunci : } C_B A = B \setminus A.$$

120. Să se exprime cu ajutorul operațiilor \cup , \cap , C , porțiunile hașurate din diagramele desenate în figurile 1.63 și 1.64.

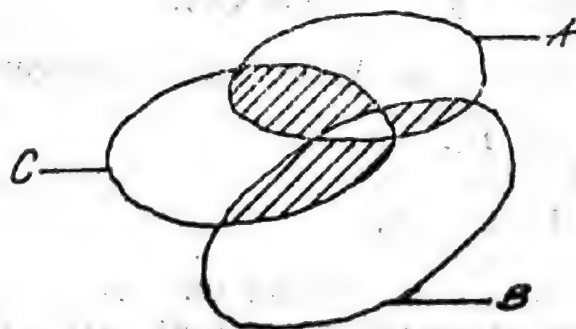


Fig. 1.63

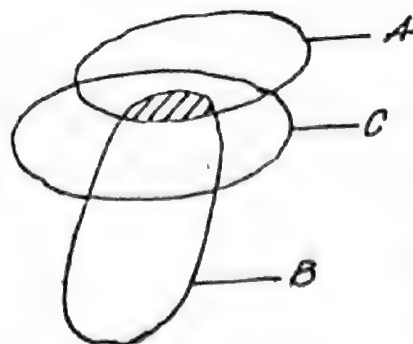


Fig. 1.64

121. În diagrama desenată în fig. 1.65 să se hașureze porțiunea

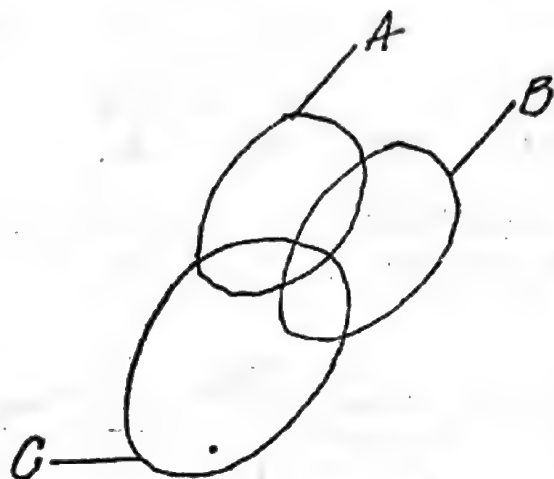


Fig. 1.65

care reprezintă mulțimea : $(A \setminus B) \setminus C$.

122. Cu ajutorul diagramelor Venn, să se verifice dacă este adevărată egalitatea :

$$(B \cap A) \cup (B \cap C) = B \setminus (A \setminus C), \text{ oricare ar fi mulțimile } A, B, C.$$

123. Să se verifice, cu ajutorul diagramelor Venn, dacă sînt adevărate egalitățile :

$$(A \cap B) \setminus (B \setminus C) = (B \cap A) \cap (A \cap C),$$

$$(A \cap B) \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \setminus (B \setminus C).$$

124. Folosind diagramele Venn, să se demonstreze relațiile :

$$A = (A \setminus B) \cup (A \cap B),$$

$$A \setminus B = A \setminus (A \cap B),$$

$$(A \setminus B) \cup C = (A \cup C) \setminus B.$$

125. Să se scrie mulțimea cifrelor cu care sînt scrise numerele 11 413 și 431. Să se arate că aceste mulțimi sînt egale.

126. Se dă mulțimea $A = \{4, 0, 3\}$. Să se scrie, indicând o proprietate caracteristică, mulțimea tuturor numerelor cuprinse între cel mai mic și cel mai mare număr natural de trei cifre, scrise cu ajutorul elementelor mulțimii A , luate ca cifre.

Operații cu numere naturale

127. În exercițiul care urmează, marcați printr-un cerculeț una din literele A, B, C, D sau E , care corespunde răspunsului corect :

$85 + 27 =$	$58 + 87 =$
A. $80 + 20 + 5 + 7$	A. $58 + 2 + 80 + 7$
B. $85 + 25 + 7$	B. $58 + 80 + 2 + 5$
C. $85 + 5 + 7$	C. $50 + 87 + 8 + 2$
D. $80 + 25 + 5 + 7$	D. $58 + 80 + 0 + 2$

$78 \times 3 =$	$72 : 6 =$
A. $(70 \times 8) + 3$	A. $(60 : 4) + (12 : 2)$
B. $(70 \times 3) + 8$	B. $(72 : 3) : 3$
C. $(70 + 8) \times 3$	C. $(60 : 6) - (12 : 6)$
D. $70 + (8 \times 3)$	D. $(60 : 6) + (12 : 6)$
E. $70 \times 3 + 8 \times 3$	

128. În exercițiul care urmează, folosiți proprietățile operațiilor pentru a afla cât mai rapid rezultatul.

Să se calculeze produsele :

$$803 \times 49, 546 \times 480, 2109 \times 5040.$$

129. Să se calculeze citurile :

$$197 \times 500 : 50; \quad 437 \times 500 : 500;$$

$$14\,200 : 25; \quad 3\,500 : 125.$$

130. Să se calculeze rapid produsele :

a) $(17 \cdot 25) \cdot 4 =$

b) $16 \cdot 21 \cdot 625 \cdot 3 =$

131. Să se calculeze :

$$3100 : 25.$$

Socotiți mai întâi în minte și apoi scrieți rezultatul.

132. Să se calculeze mintal suma :

$$462 + 56 =$$

133. Să se găsească procedeul cel mai simplu de calcul :

a) $74 \cdot 2 + 26 \cdot 2 =$

$$b) (124 \cdot 5) + (136 \cdot 5) =$$

$$c) (273 \cdot 8) + (427 \cdot 8) =$$

134. Folosind proprietățile operațiilor să se calculeze sumele și diferențele următoare :

$$a) 146 - 134 + 137$$

$$b) 235 + 47 + 7 + 265 + 3$$

$$c) (1337 + 488) + 663$$

$$d) 1\,199 + 406$$

$$e) (357 + 476) - 257$$

$$f) (826 - 438) - 126$$

135. Să se aplice proprietățile și apoi să se calculeze :

$$19600 : 25 : 98, 5 \cdot 200 : (13 \cdot 25),$$

$$14 \cdot 400 : (15 \cdot 16 \cdot 12).$$

136. Să se calculeze, în modul cel mai simplu, următoarele :
 $(75 \cdot 224 \cdot 10) : 25, (343 \cdot 300 \cdot 27) : 100.$

137. Să se afle produsul sumei numerelor a și b cu numărul c , dacă :

$$a) a = 14, b = 6, c = 30;$$

$$b) a = 15, b = 10, c = 8.$$

138. Să se afle produsul diferenței numerelor x și y cu numărul a , dacă :

$$a) x = 25, y = 10, a = 4;$$

$$b) x = 1044, y = 44, a = 15.$$

139. Să se afle produsul sumei numerelor a și b cu diferența acestor numere, dacă :

$$a) a = 14, b = 4;$$

$$b) a = 125, b = 25.$$

140. Să se aplice proprietățile operațiilor pentru a calcula diferențele :

$$a) 4291 - (2191 - 1015);$$

$$b) 6247 - (3227 - 2070).$$

$$141. \text{ Să se calculeze : } (4051 - 2145) - 1051.$$

$$142. \text{ Să se scadă din numărul } 7273 \text{ suma numerelor } 1173 \text{ și } 396 : \\ 7273 - (1173 + 396).$$

143. Să se calculeze :

$$E = (210 \cdot 3 + 180 \cdot 2) : (21 \cdot 3 + 18 \cdot 2)$$

Socotiți mai întâi în minte și apoi scrieți rezultatul.

Indicație : Se va observa că : $210 \cdot 3 + 180 \cdot 2 = (21 \cdot 3 + 18 \cdot 2) \cdot 10$.

144. Să se calculeze în modul cel mai simplu cîțul :

$$E = (216 \cdot 57 + 184 \cdot 25) : (27 \cdot 57 + 23 \cdot 25)$$

145. Să se afle numerele naturale a , b și c , dacă :

$$ab = 60, ac = 90; b + c = 10.$$

146. Să se afle numerele naturale x , y și z , cunoscînd că :

$$2xy = 300, 2xz = 100, y - z = 10.$$

147. Să se afle numerele naturale m , n , p și q , dacă :

$$mn = 40, mp = 60, mq = 30, n + p - q = 7.$$

Ecuații și inecuații în N

148. Să se rezolve ecuațiile :

$$x + 1347 = 2477;$$

$$1300 + x = 1800.$$

149. Să se rezolve ecuațiile : $x - 3050 = 1000$; $z + 187 = 397$; $343 - t = 300$.

150. Să se determine mulțimea valorilor x care satisfac inegalitățile :

$$x + 5 < 28; x - 5 < 25.$$

151. Să se rezolve ecuațiile :

$$a) 4x = 60, 3a = 90, 5x = 125;$$

$$b) x : 4 = 5, x : 7 = 7, 18 : x = 3.$$

152. Să se rezolve ecuațiile :

$$4x + 5 = 13; \quad 13 - 4x = 5;$$

$$8 + x - 5 = 10; \quad 10 + 2x - 3 = 9.$$

153. Să se rezolve ecuațiile :

$$400 - (x + 300 - 10) = 10;$$

$$(1000 - 862) - 277 + (4280 - x) = 0$$

154. Să se afle valoarea necunoscută x care verifică ecuațiile :

$$2x - 318 = x;$$

$$x + 315 = 2x + 208;$$

$$506 - x = 873 - 2x.$$

155. Să se determine mulțimea A :

$$A = \{x \in \mathbb{N} | 2x - 1 < 9\}$$

156. Să se rezolve ecuațiile :

$$501(x - 594) = 164 - 289;$$

$$\{[(8x - 98) : 2 \cdot 56] \cdot 36 - 268\} : 500 = 4;$$

$$348 - [220 - (2x - 277) + 31] : 2 = 295;$$

$$400 - [300 - (4x + 100) + 120] = 15000;$$

$$[(5x + 1) \cdot 8 \cdot 15 + 90] : 45 = 63$$

$$200 - 18 : (372 : 3x - 1) - 28 = 166$$

157. Să se determine numărul natural x cunoscând că numărul $x + 4$ este succesorul numărului 14.

158. Se dă numărul natural $x + 2$.

Să se scrie trei numere naturale care sînt succesive lui.

159. Să se determine numărul natural $x \in \{1, 2, 6, 9\}$, care satisface ecuația : $x + x + 5 = 9$.

160. Să se scrie mulțimea tuturor numerelor de forma $x + 4$, dacă $x \in \{1, 4, 8, 16\}$.

Probleme rezolvate cu ajutorul ecuațiilor în \mathbb{N}

161. Numărul x se înmulțește cu 4 și se obține numărul 60. Să se afle numărul x .

162. La ce număr trebuie să-l împărțim pe 75, pentru a obține numărul 25 ?

163. Dacă scădem din numărul 14 306 un număr x se obține numărul 10 306.

Să se afle x .

164. Dacă mărim de trei ori un număr și la rezultat adăugăm numărul 15, se obține numărul 54.

Să se afle numărul.

165. Dacă împărțim 45 la un număr necunoscut și adăugăm la rezultat 25 obținem numărul 40, să se afle numărul necunoscut.

166. Vîrsta tatălui este de două ori mai mare decît vîrsta fiului. Amîndoi au împreună vîrsta de 60 ani.

Ce vîrstă are fiecare ?

167. O mamă este mai în vîrstă decît fiul ei cu 20 ani. Amîndoi au împreună 40 de ani.

Ce vîrstă are fiecare ?

Capitolul 2

BAZE DE NUMERAȚIE

2.1. SISTEME DE NUMERAȚIE

Numărul este o noțiune abstractă. Cifra este semnul grafic sau simbolul numărului. Simbolurile folosite pentru a reprezenta numerele au fost diferite în antichitate de la un popor la altul. Mai multe popoare au folosit liniile pentru a reprezenta numerele (fig. 2.1).

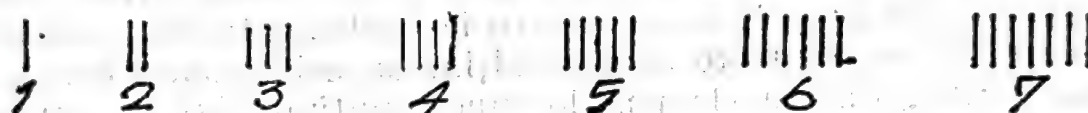


Fig. 2.1

Egiptenii au folosit procedeul grupării acestor linii pentru a recunoaște numerele de la 1 la 9 (fig. 2.2).



Fig. 2.2

Pentru notația grupării de 10 elemente, egiptenii au folosit simbolul \cap , babilonienii au folosit simbolul $<$, iar romanii au folosit simbolul X.

În sistemul nostru de scriere, numit zecimal, un număr natural se scrie cu ajutorul a zece cifre. Acestea sînt: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Ele sînt semnele grafice sau simbolurile primelor zece numere naturale. Orice număr natural se scrie cu ajutorul unor combinații de cifre după reguli bine stabilite. Sistemul zecimal folosește procedeul formării de grupe (submulțimi) avînd fiecare cîte zece elemente. Zece grupe de un ordin inferior formează o unitate de ordin superior.

Putem însă grupa elementele unei mulțimi și în alte moduri. De exemplu, în figura 2.3 26 de cerușe pot fi grupate în trei moduri diferite.

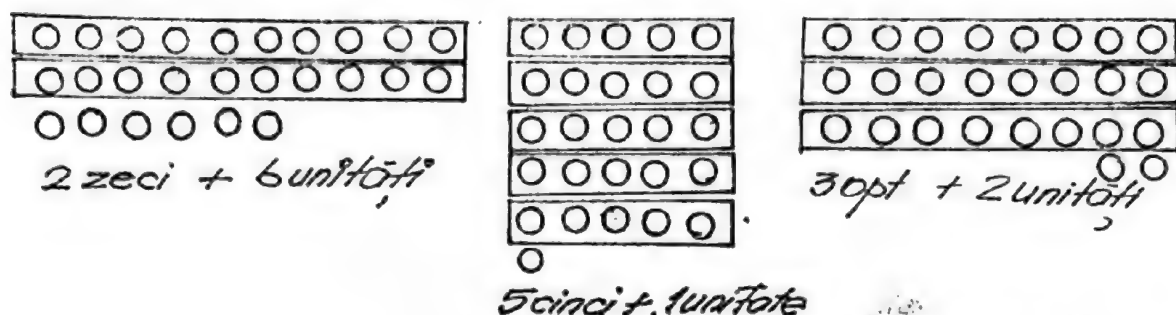


Fig. 2.3

Numărarea elementelor se poate face în mai multe moduri, care au dat naștere la diferite *sisteme de numerație*.

Pentru a număra elementele unei mulțimi, se formează submulțimi finite disjuncte (fără elemente comune) ale unei mulțimi date, submulțimi care au același număr de elemente, ultima dintre acestea putând avea un număr mai mic de elemente decât celelalte.

Numărul de elemente al submulțimilor echipotente care s-au format prin gruparea elementelor unei mulțimi date se numește baza sistemului de numerație.

În funcție de numărul de elemente pe care le conțin aceste submulțimi, sistemele de numerație au primit diferite denumiri: zecimal, binar etc. sau, cum se mai spune: cu baza zece, cu baza doi etc.

Așa, de exemplu, sistemul de numerație cu baza cinci are ca punct de plecare formarea de submulțimi disjuncte având același număr de elemente cu mulțimea degetelor de la o mână.

Sistemul binar (cu baza doi), care se folosește la codificarea informațiilor pentru mașinile de calcul, se bazează pe formarea de submulțimi cu câte două elemente.

Numărul de elemente al unei astfel de submulțimi indică și numărul de cifre care se folosesc în cazul fiecărui sistem de numerație. După cum știm, în sistemul zecimal se folosesc cele zece cifre arabe; în sistemul cu baza cinci se folosesc cinci cifre: 0, 1, 2, 3, 4, în sistemul cu baza doi se folosesc două cifre: 0 și 1.

2.2. NUMERAȚIA ÎN BAZA 10

Dacă mulțimea are mai mult de zece elemente, pentru a număra elementele ei formăm mulțimi disjuncte de câte zece elemente.

Exemplul 1

Să scriem în baza 10 numărul care arată câte elemente are mulțimea A (fig. 2.4).

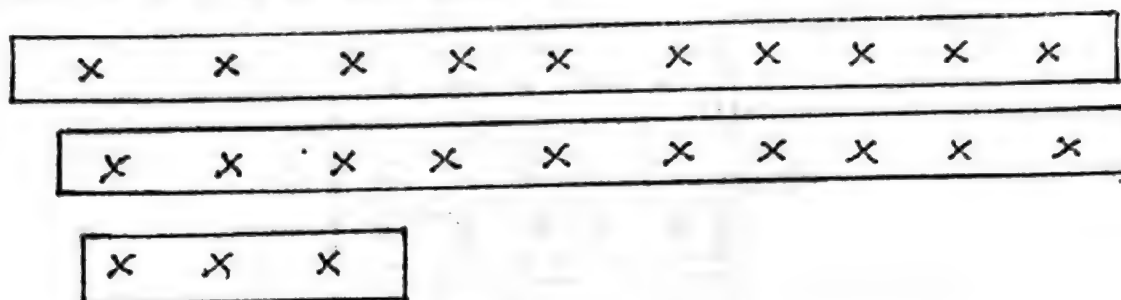


Fig. 2.4

Se observă că s-au format două submulțimi de câte 10 elemente și au mai rămas trei elemente.

2 zeci + 3 elemente

Sub cele două grupe cu 10 elemente sînt așezate cele trei elemente care nu au putut fi grupate într-o nouă submulțime de 10 elemente.

Deasupra sînt așezate submulțimile cu câte 10 elemente. Astfel, numărul de elemente din mulțimea dată se scrie 23.

Cifra 3 ocupă primul loc din partea dreaptă, locul unităților, iar cifra 2 locul al doilea — de la dreapta spre stînga — al zecilor, sau locul zecilor.

Cifra 2, care ocupă primul loc în scrierea numărului, va arăta numărul de grupe (submulțimi), de câte zece elemente fiecare, care s-au putut forma din mulțimea dată.

Cifra 3 ne arată numărul de elemente ale mulțimii A care au rămas negrupate.

2.3. NUMERAȚIA ÎN ALTE BAZE

Exemplul 2

Să scriem în sistemul cu baza cinci numărul care arată câte elemente sînt în mulțimea A (fig. 2.5).

Vom proceda — ca și în cazul sistemului zecimal — cu deosebirea că submulțimile disjuncte vor avea câte cinci elemente.

Urmînd un procedeu asemănător, se formează patru submulțimi disjuncte, avînd fiecare câte cinci elemente, și mai rămîn trei elemente (care nu pot forma o grupă cu cinci elemente).

4 cinci + 3 unități

Prin convenție numărul de elemente al mulțimii date se scrie :

43_5

Numărul 43_5 se poate scrie ca o sumă de produse dintre fiecare cifră a numărului cu o putere a lui 5, exponentul puterii fiind egal

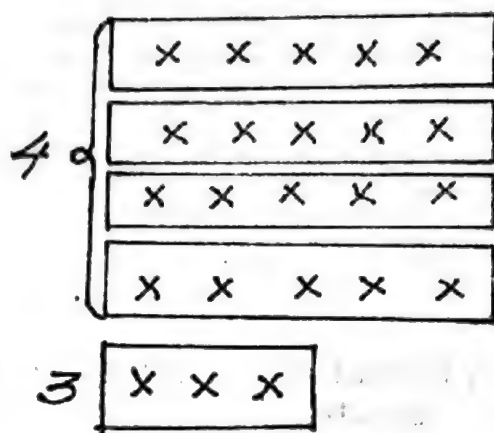


Fig. 2.5

cu numărul de ordine al locului ocupat de cifra respectivă în numărul dat, acest număr de ordine fiind socotit de la dreapta spre stînga :

$$43_5 = 4 \cdot 5^1 + 3 = 23_{10}$$

În sistemul zecimal de numerație vom scrie numerele ca o sumă de termeni putere ai numărului 10 și folosind cifrele : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

De exemplu :

$$254 = (2 \times 10^2) + (3 \times 10^1) + (4 \times 10^0)$$

(Reamintim că $10^0 = 1$)

În baza 5 de numerație vom scrie numerele ca o sumă de termeni puteri ale numărului 5, folosind numai cifrele 0, 1, 2, 3, 4.

De exemplu :

$$44_5 = (4 \times 5^1) + (4 \times 5^0)$$

$$148_5 = (1 \times 5^2) + (4 \times 5^1) + (8 \times 5^0)$$

$$244_5 = (2 \times 5^2) + (4 \times 5^1) + (4 \times 5^0)$$

La fel vom scrie și numerele :

$$10\,326 = 10\,000 + 300 + 20 + 6, \text{ sau ca o sumă de produse :}$$

$$10\,326 = 1 \cdot 10\,000 + 0 \cdot 1000 + 3 \cdot 100 + 2 \cdot 10 + 6 \text{ sau,}$$

folosind puterile lui 10 :

$$10\,326 = 1 \cdot 10^4 + 0 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 6.$$

Se observă că fiecare cifră are o dublă semnificație : indică numărul submulțimilor și poziția pe care o ocupă de la dreapta spre stînga — fie în reprezentarea cu diagrame, fie în scrierea pozițională.

Alte exemple :

$$102_5 = 1 \cdot 5^2 + 0 \cdot 5 + 2 = 25 + 2 = 27,$$

$$102_5 = 27.$$

$$\begin{aligned} 101111_2 &= 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2 + 1 = \\ &= 32 + 0 + 8 + 4 + 2 + 1 = 47. \end{aligned}$$

Deci, $101111_2 = 47$.

$$\begin{aligned} 1232_7 &= 1 \cdot 7^3 + 2 \cdot 7^2 + 3 \cdot 7 + 2 = 343 + 98 + 21 + 2 = \\ &= 464. \end{aligned}$$

Notatie

1) Dacă se cere să se scrie un număr de două cifre în sistemul zecimal, convenim ca cifrele lui să le notăm tot prin litere, dar numărul să fie scris astfel : \overline{ab} .

În această notatie a este cifra zecilor, iar b este cifra unităților. Prin urmare :

$$\overline{ab} = a \cdot 10 + b = 10a + b.$$

Dacă se cere să scriem un număr de trei cifre în sistemul zecimal, vom scrie :

$$\overline{abc} = 100a + 10b + c.$$

2) Dacă se cere să scriem un număr de patru cifre, într-un sistem de numerație cu baza 4, convenim ca cifrele lui să le notăm tot prin litere și numărul să fie scris în felul următor \overline{abcd}_4 . Numărul poate fi scris ca o sumă de puteri ale numărului 4 astfel :

$$\overline{abcd}_4 = a \cdot 4^3 + b \cdot 4^2 + c \cdot 4 + d.$$

2.4. TRANSFORMAREA BAZELOR

1. Transformarea unui număr, dat într-o bază oarecare, în sistemul de numerație cu baza 10.

Pentru a transforma un număr scris într-o bază oarecare într-un număr cu baza zece, se scrie numărul dat ca o sumă de produse dintre fiecare cifră a numărului dat și o putere a bazei date și se efectuează apoi operațiile de înmulțire și adunare în baza 10.

Exemplul 1

Să se scrie 3214_5 în baza 10.

$$\begin{aligned}\text{Soluție : } 3214_5 &= 3 \cdot 5^3 + 2 \cdot 5^2 + 1 \cdot 5 + 4 \cdot 5^0 = \\ &= (3 \times 125) + (2 \times 25) + (1 \times 5) + (4 \times 1) = \\ &= 434.\end{aligned}$$

Exemplul 2

Alcătuieți o diagramă cu 18 obiecte. Scrieți numărul corespunzător în baza 5 și apoi în baza 8.

Soluție :

$$\begin{array}{ccccccccc} \times & \times & \times & \times & \times & & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times & & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times & & & & \times & \times & & & & \\ & \times & \times & \times & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & & & & \end{array}$$

33_5

22_8

3 cinci + 3 unități | 2 opt + 2 unități

2. Scrierea unui număr cu baza de numerație zece ca un număr cu altă bază de numerație.

Să considerăm, de exemplu, numărul 339, pe care vrem să-l scriem în baza 5.

Dacă numărul va fi scris în baza 5, va trebui să cunoaștem diferitele puteri ale numărului 5 :

$$5^0 = 1; 5^1 = 5; 5^2 = 25; 5^3 = 125; 5^4 = 625 \dots$$

Cea mai mare putere a numărului 5, care nu este mai mare decât numărul dat, este 5^3 .

Această putere a lui 5, adică $5^3 = 125$, poate fi scăzută din numărul 339 de două ori și rămîne rest 89, care este mai mic decît 125 :

$$\begin{array}{r} 339 - \\ 125 \\ \hline 214 - \quad 2 \times 125 = 2 \cdot 5^3. \\ 125 \\ \hline 89 \end{array}$$

Prin urmare dintr-o mulțime de 339 obiecte putem forma două grupe a câte $5^3 = 125$ obiecte.

Următoarea putere a lui 5 este $5^2 = 25$. Acest număr poate fi scăzut din 89 de trei ori și rămîne 14 :

$$\begin{array}{r} 89 - \\ 25 \\ \hline 64 - \\ 25 \quad 3 \times 25 = 3 \cdot 5^2. \\ \hline 39 - \\ 25 \\ \hline 14. \end{array}$$

Prin urmare, din cele 89 de obiecte rămase, putem forma trei grupe de câte $5^2 = 25$ obiecte.

Din cele 14 obiecte rămase putem forma două grupe a câte 5 obiecte și mai rămîn 4 obiecte :

$$\begin{array}{r} 14 - \\ 5 \\ \hline 9 - \quad 2 \times 5 = 2 \cdot 5. \\ 5 \\ \hline 4 \end{array}$$

Numărul 339 se mai poate scrie :

$$\begin{aligned} 339 &= 2 \cdot 125 + 3 \cdot 25 + 2 \cdot 5 + 4 = & (\alpha) \\ &= 2 \cdot 5^3 + 3 \cdot 5^2 + 2 \cdot 5 + 4 \cdot 5^0 = 2324_5. \end{aligned}$$

Egalitățile (α) pot fi scrise astfel :

$$\begin{aligned} 339 &= 5 \cdot (2 \cdot 25 + 3 \cdot 5 + 2) + 4 \\ &= 5 \cdot 67 + \boxed{4} \\ 67 &= 2 \cdot 25 + 3 \cdot 5 + 2 \\ &= 5(2 \cdot 5 + 3) + 2 \\ &= 5 \cdot 13 + \boxed{2} \end{aligned}$$

$$13 = 2 \cdot 5 + \boxed{3}$$

$$2 = 0 \cdot 5 + \boxed{2}$$

Procedeul schimbării bazei de numerație depinde deci de împărțirea succesivă la 5 a cîturilor parțiale, astfel :

$$339 = 67 \cdot 5 + 4 \quad (c)$$

$$67 = 13 \cdot 5 + 2 \quad (b)$$

$$13 = 2 \cdot 5 + 3 \quad (a)$$

Dacă substituim pe (a) în (b) și apoi pe (b) în (c), obținem :

$$339 = 67 \cdot 5 + 4$$

$$67 = (2 \cdot 5 + 3) \cdot 5 + 2 = 2 \cdot 5^2 + 3 \cdot 5 + 2$$

$$13 = 2 \cdot 5 + 3$$

$$339 = (2 \cdot 5^2 + 3 \cdot 5 + 2) \cdot 5 + 4 = \\ = 2 \cdot 5^3 + 3 \cdot 5^2 + 2 \cdot 5 + 4 = 2324_5$$

Se observă că cifrele în care se scrie numărul căutat în baza 5 se obțin din împărțirile consecutive la 5 a resturilor parțiale după următorul algoritm :

$$\begin{array}{r|l} 339 & 5 \\ \hline 30 & 67 \\ \hline 39 & 5 \\ 35 & 17 \\ \hline \textcircled{4} & 15 \\ & \textcircled{2} \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 67 & 5 \\ \hline 5 & 13 \\ 17 & 10 \\ \hline 15 & \textcircled{3} \\ & \textcircled{2} \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 13 & 5 \\ \hline 10 & \textcircled{2} \\ & \textcircled{2} \end{array} \quad 339 = 2324_5$$

Pentru a transforma un număr exprimat în sistemul de numerație cu baza zece într-un sistem cu baza a , se împarte la început numărul și apoi cîturile consecutive la a ; resturile acestor împărțiri consecutive considerate în ordine inversă (primul rest fiind ultima cifră a numărului și ultimul rest obținut prima cifră) vor reprezenta cifrele numărului exprimat în baza a .

2.5. DIFERITE ALTE BAZE DE NUMERAȚIE

Din cele ce am arătat anterior, rezultă că pentru fiecare bază de numerație a , numerele folosite pentru scrierea numerelor naturale sînt $0, 1, 2, 3, 4 \dots a - 1$.

Să considerăm numerele de la 0 la 10, în diverse baze de numerație. Avem :

Baza :	10	3	4	5	6	7
1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2
3	3	10_3	3	3	3	3
4	4	11_3	10_4	4	4	4
5	5	12_3	11_4	10_5	5	5
6	6	20_3	12_4	11_5	10_6	6
7	7	21_3	13_4	12_5	11_6	10_7
8	8	22_3	20_4	13_5	12_6	11_7
9	9	100_3	21_4	14_5	13_6	12_7
10	10	101_3	22_4	20_5	14_6	13_7

Legătura dintre numerele exprimate în diferite baze de numerație

$$10_3 = (1 \cdot 3) + (0 \cdot 1) = 3$$

$$10_4 = (1 \cdot 4) + (0 \cdot 1) = 4$$

$$10_5 = (1 \cdot 5) + (0 \cdot 1) = 5$$

$$10_6 = (1 \cdot 6) + (0 \cdot 1) = 6$$

$$10_7 = (1 \cdot 7) + (0 \cdot 1) = 7$$

$$10_8 = (1 \cdot 8) + (0 \cdot 1) = 8$$

2.6. OPERAȚII CU NUMERE ÎN DIFERITE BAZE

Regulile de calcul pentru adunarea, scăderea, înmulțirea și împărțirea numerelor întregi scrise într-o bază b , oricare ar fi această bază, sînt asemănătoare cu regulile pentru baza 10. Ele se bazează pe tabelele de adunare și înmulțire ale numerelor în baza în care lucrăm. Alcătuirea acestor tabele se face în același mod ca și pentru baza 10.

Astfel în baza doi, în care cifrele sînt 0 și 1, tabelele de adunare și înmulțire sînt următoarele :

Tabela de adunare

+	0	1
0	0	1
1	1	10

Tabela de înmulțire

×	0	1
0	0	0
1	0	1

În tabela de adunare rezultatul adunării a două cifre este trecut la intersecția liniilor și coloanelor în care se găsesc cele două cifre care se adună.

De exemplu pentru a afla rezultatul adunării elementului 1 din coloana 1 și elementului 1 din linia 1, se construiesc, prin punctele care marchează aceste elemente, linii paralele cu linia verticală care trece prin prima cifră și linia orizontală ce trece prin a doua cifră.

+	0	1
0		
1	— — — —	10

În mod asemănător putem construi tabelele de adunare și înmulțire a numerelor în altă bază de numerație ca de exemplu baza 3.

Tabela de adunare				Tabela de înmulțire			
+	0	1	2	×	0	1	2
0	0	1	2	0	0	0	0
1	1	2	10	1	0	1	2
2	2	10	11	2	0	2	11

O unitate de ordin superior se notează în sistemul cu baza trei, 10 și se formează din 3 unități de ordin inferior.

Procedeele de calcul bazate pe proprietățile operațiilor cu numere scrise în sistemul zecimal se extind fără dificultate la operații cu numere scrise în alte baze de numerație.

Să calculăm suma : $9 + 8$.

Pentru a calcula această sumă, vom scrie :

$$9 + 8 = 9 + (1 + 7) = (9 + 1) + 7 = 10 + 7 = 17.$$

Am scris numărul 8 ca o sumă formată dintr-o unitate și numărul 7 (și vom folosi proprietatea de asociativitate pentru a afla în continuare rezultatul). În continuare am luat o unitate de la 8 și am adăugat-o lui 9 în scopul de a forma o „zece”; adică o unitate de ordin superior.

Putem proceda și în alt mod, astfel :

$$9 + 8 = (7 + 2) + 8 = 7 + 10 = 17.$$

Prin urmare am luat de la numărul 9 două unități pe care le-am adăugat lui 8, pentru a obține o unitate de ordin superior. În sistemul zecimal o unitate de ordin superior este formată din 10 unități de ordin inferior.

Pentru a aduna două numere scrise în baza 5, vom proceda în mod asemănător.

Exemplu :

Să se calculeze :

$$4_5 + 3_5 = 4_5 + (1_5 + 2_5) = (4_5 + 1_5) + 2_5.$$

Am luat de la numărul 3 o unitate pe care am adăugat-o lui 4 pentru a obține o unitate de ordin superior, unitate pe care o notăm cu 10_5 .

$$4_5 + 1_5 = 10_5.$$

Dacă la aceasta adăugăm 2_5 (două unități) vom obține 12_5 .

$$10_5 + 2_5 = 12_5.$$

Prin urmare, $4_5 + 3_5 = 12_5$. În mod asemănător avem :

$$4_5 + 4_5 = 4_5 + 1_5 + 3_5 = 13_5$$

Pentru adunarea numerelor în baza 5 vom alcătui o tabelă, astfel :

+	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	10_5
2	2	3	4	10_5	11_5
3	3	4	10_5	11_5	12_5
4	4	10_5	11_5	12_5	13_5

Acest tabel va fi utilizat mai departe, în operațiile cu numere în baza 5.

Exemplu :

Să se calculeze suma numerelor 432_5 și 243_5 . Să se facă verificarea în baza 10.

Pentru a efectua această sumă vom scrie mai întâi cele două numere, ca o sumă de produse dintre cifrele semnificative ale celor două numere și puteri ale numărului 5.

$$432_5 = (4 \times 5^2) + (3 \times 5^1) + (2 \times 5^0).$$

$$243_5 = (2 \times 5^2) + (4 \times 5^1) + (3 \times 5^0).$$

Dacă adunăm cifrele de același ordin obținem :

$$\begin{aligned} (432_5 + 243_5) &= ((4 \times 5^2) + (3 \times 5^1) + (2 \times 5^0)) + \\ &+ ((2 \times 5^2) + (4 \times 5^1) + (3 \times 5^0)) = \\ &= ((4 \times 5^2) + (2 \times 5^2)) + ((3 \times 5^1) + (4 \times 5^1)) + \\ &+ ((2 \times 5^0) + (3 \times 5^0)) = \\ &= (6 \times 5^2) + (7 \times 5^1) + (5 \times 5^0). \end{aligned}$$

Ultimul termen al acestei sume 5×5^0 reprezintă cinci unități care în sistemul în bază 5 formează o unitate de ordin superior pe care o adăugăm termenului 7×5^1 și obținem : 8×5^1 .

Prin urmare avem :

$$432_5 + 243_5 = (6 \times 5^2) + (8 \times 5^1) + (0 \times 5^0).$$

Termenul al doilea din suma obținută are opt unități de ordin superior. Din cele opt unități de ordin superior, luăm 5 unități care formează o unitate de ordin imediat următor și mai rămân 3 unități. Unitatea de ordin imediat superior o adăugăm termenului 6×5^2 și obținem 7×5^2 .

Prin urmare avem :

$$432_5 + 243_5 = (7 \times 5^2) + (3 \times 5^1) + (0 \times 5^0).$$

Din cele 7 unități de ordinul lui 5^2 , luăm 5 și formăm o unitate de ordin imediat superior, adică 5^3 , și mai rămân două unități de ordinul 5^2 .

$$432_5 + 243_5 = (1 \times 5^3) + (2 \times 5^2) + (3 \times 5^1) + (0 \times 5^0).$$

Este ușor de remarcat că suma din partea dreaptă a semnului egal reprezintă numărul 1230 scris în baza 5, sau :

$$432_5 + 243_5 = 1230_5.$$

Tehnica de calcul poate fi notată sintetic astfel :

$$\begin{array}{r} 432_5 \\ 243_5 \\ \hline 1230_5 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
 \text{Verificare :} & 432_5 = (4 \times 5^2) + (3 \times 5^1) + (2 \times 5^0) & = 117 \\
 & 243_5 = (2 \times 5^2) + (4 \times 5^1) + (3 \times 5^0) & = 73 \\
 \hline
 & 1230_5 = (1 \times 5^3) + (2 \times 5^2) + (3 \times 5^1) + & \\
 & + (0 \times 5^0) & = 190
 \end{array}$$

Exemplu :

Să se afle diferența :

$$211_5 - 142_5.$$

Pentru a calcula această diferență vom proceda în mai multe etape, ca și în cazul adunării a două numere.

Se scriu mai întâi descăzutul și scăzătorul ca sumă de produse ale cifrelor semnificative cu care sînt scrise cele două numere și puterile numărului 5.

$$211_5 = (2 \times 5^2) + (1 \times 5^1) + (1 \times 5^0),$$

$$142_5 = (1 \times 5^2) + (4 \times 5^1) + (2 \times 5^0).$$

Observăm că nu este posibilă scăderea în sistemul cu baza 5 a unităților de la scăzător din unitățile de același ordin de la descăzut.

Vom lua de la descăzut o unitate de ordinul 5^2 și o vom aduna cu o unitate de ordin imediat inferior.

$$211_5 = (1 \times 5^2) + (11_5 \times 5^1) + (1 \times 5^0). \quad (a)$$

De la ordinul 5^1 vom lua o unitate, pe care o vom transforma în unitate de ordin inferior, și vom obține :

$$211_5 = (1 \times 5^2) + (10_5 \times 5^1) + (11_5 \times 5^0). \quad (b)$$

$$142_5 = (1 \times 5^2) + (4 \times 5^1) + (2 \times 5^0)$$

Operația de scădere se efectuează calculînd în baza 5 diferențele termenilor de la descăzut și scăzător de același ordin.

$$\begin{aligned}
 211_5 - 142_5 &= ((1 \times 5^2) + (10_5 \times 5^1) + (11 \times 5^0)) - \\
 &\quad - ((1 \times 5^2) + (4 \times 5^1) + (2 \times 5^0)) = \\
 &= (1 \times 5^2 - 1 \times 5^2) + (10_5 \times 5^1 - 4 \times 5^1) + \\
 &\quad + (11_5 \times 5^0 - 2 \times 5^0) = \\
 &= (1 \times 5^1) + (4 \times 5^0) = 14_5.
 \end{aligned}$$

2.7. ÎMPĂRȚIREA NUMERELOR ÎN BAZA 5

Să se calculeze : $1133_5 : 4_5$.

Vom efectua mai întâi produsele :

$$1_5 \cdot 4_5 = 4_5$$

$$2_5 \cdot 4_5 = 13_5$$

$$3_5 \cdot 4_5 = 22_5$$

$$4_5 \cdot 4_5 = 31_5$$

Se observă că un multiplu al numărului 4_5 apropiat sau mai mic decât 11_5 este numărul 4_5 .

Prin urmare, putem afla primul rest parțial :

$$\begin{array}{r|l} 1133_5 & 4_5 \\ \underline{4_5} & 132 \\ 23_5 & \\ \underline{22_5} & \\ 13_5 & \end{array}$$

Mai departe, observăm că cel mai mare multiplu al numărului 4_5 mai mic decât 23_5 este $4_5 \cdot 3_5 = 22_5$, care se scade din 23_5 și se obține 1, lângă care se adaugă cifra următoare a deîmpărțitorului, adică numărul 3. Numărul 13_5 este multiplu al împărțitorului $13_5 : 4_5 = 2_5$.

Prin urmare,

$$1133_5 : 4_5 = 132_5$$

$$\begin{aligned} \text{Verificare : } (1133)_5 &= 1 \cdot 5^3 + 1 \cdot 5^2 + 3 \cdot 5 + 3 = 125 + 25 + \\ &+ 15 + 3 = 168 \end{aligned}$$

$$168 : 4 = 42$$

$$(132)_5 = 1 \cdot 5^2 + 3 \cdot 5 + 2 = 25 + 15 + 2 = 42$$

2.8. OPERAȚII BINARE

Operațiile aritmetice în sistemul binar au la bază următoarele reguli : $1 + 1 = 10$; $1 \cdot 1 = 1$.

Pentru a efectua operații cu numere scrise în baza de numerație 2, vom aplica aceleași principii de calcul ca și în cazul numerelor în baza 5.

Exemplu :

Să se efectueze produsul 11×101

Soluție :

Verificare :

$$\begin{array}{r}
 11 \times 101 \\
 \hline
 11 \\
 111 \\
 \hline
 1111
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{l}
 11 = 1 \cdot 2 + 1 = 2 + 1 = 3 \\
 101 = 1 \cdot 2^2 + 1 = 4 + 1 = 5 \\
 101 \times 11 = 5 \times 3 = 15 \\
 1111 = 2^3 + 2^2 + 2 + 1 = \\
 = 8 + 4 + 2 + 1 = 15
 \end{array}$$

Se scriu cifrele de același ordin, una sub alta și se efectuează înmulțirile, ținând seama de tabela înmulțirii corespunzătoare ordinului respectiv.

Scrierea unui număr în baza 10 în sistemul cu baza 2

Exemplul 1.

Să se scrie în baza 2 numărul 147. Vom proceda astfel :
 $147 = X_2$. După algoritmul stabilit avem :

$$\begin{array}{r}
 147 \mid 2 \\
 \hline
 1 \mid 73 \quad 2 \\
 \hline
 \quad 1 \mid 36 \quad 2 \\
 \hline
 \qquad 0 \mid 18 \quad 2 \\
 \hline
 \qquad \quad 0 \mid 9 \quad 2 \\
 \hline
 \qquad \qquad 1 \mid 4 \quad 2 \\
 \hline
 \qquad \qquad \quad 0 \mid 2 \quad 2 \\
 \hline
 \qquad \qquad \qquad 0 \mid 1
 \end{array}
 \qquad
 X = 1001 \ 00 \ 11$$

Exemplul 2.

Printre hirtiile unui matematician a fost găsită autobiografia lui. Ea începe cu următoarele rînduri :

„Eu am terminat universitatea la vîrsta de 44 ani. După un an, fiind un tînăr de 100 de ani, m-am însurat cu o fată de 34 ani. Diferența neînsemnată de vîrstă dintre noi — de numai 11 ani — a contribuit la comunitatea noastră de interese și idei.

Peste câțiva ani aveam deja o mică familie cu 10 copii. Salariul meu era de 200 ruble, din care $1/10$ îi dădeam surorii mele, așa încît, cu copiii, am trăit cu 130 ruble pe lună”.

Cum pot fi explicate contradicțiile curioase dintre numerele prezentate în acest fragment.

(I. I. Pelerman — „Aritmetica distractivă”)

Secretul rezolvării este trădat de fraza : „după un an (peste 44 ani), fiind un tînăr de 100 ani...” de unde rezultă că datele problemei nu corespund unui sistem zecimal. Dacă, prin adăugarea unei unități, numărul 44 se transformă în 100, aceasta înseamnă că cifra 4 este cea mai mare în acest sistem și prin urmare baza sistemului este 5. Transformînd numerele din sistemul cu baza 5 în cel zecimal, constatăm că biografia nu conține nici un fel de contradicții.

„Eu am terminat universitatea la vîrsta de 24 ani. După un an m-am însurat, fiind tînăr de 25 ani, cu o fată de 19 ani. Diferența mică de vîrstă dintre noi de numai 6 ani — a contribuit la comunitatea noastră de interese și idei.

Peste câțiva ani aveam deja o mică familie cu 5 copii. Salariul meu lunar era de 50 ruble din care $1/5$ îi dădeam surorii așa încît noi cu copiii am trăit cu 40 ruble pe lună.”

Și misterul s-a risipit...

2.9. EXERCIIȚII ȘI PROBLEME

1. Să se scrie numerele corespunzătoare fiecărei mulțimi de obiecte într-o bază indicată de numărul de obiecte din fiecare grupă.

a) $\begin{array}{cccc} \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & & \end{array}$ b) $\begin{array}{ccccccc} \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & & & & \end{array}$ c) $\begin{array}{ccc} \times & \times & \times \\ \times & \times & \times \\ \times & \times & \end{array}$

2. Să se deseneze diagramele corespunzătoare numerelor scrise mai jos :

a) 22_3 ; b) 11_2 ; c) 14_5 ; d) 23_6 .

3. Să se scrie în baza 10 numerele :

a) 1011_2 ; b) 473_8 ; c) 2201_3 ; d) 102_3 ; e) 1011_2
f) 1212_3 ; g) 1211_3 ; h) 1010_2 ; i) 403_6 .

4. Să se scrie în baza de numerație 5 numerele (scrise în baza zece):

a) 382; b) 917; c) 1 000.

5. Să se scrie în baza 5 sumele :

$$\begin{aligned} &1 \cdot 5^2 + 4 \cdot 5^3 + 2 \cdot 5^2 + 1 \cdot 5^0, \\ &4 \cdot 5^3 + 3 \cdot 5^2 + 1 \cdot 5 + 2 \cdot 5^0, \\ &3 \cdot 5^3 + 2 \cdot 5^2 + 1 \cdot 5 + 2 \cdot 5^0. \end{aligned}$$

6. Să se transforme numerele : 324 ; 427 ; 576 ; 257 ; 2003 scrise în baza 10, în baze scrise în dreptul parantezelor :

$$\begin{aligned} 324 &= (\quad)_4 & 576 &= (\quad)_8 \\ 427 &= (\quad)_6 & 257 &= (\quad)_7 \end{aligned}$$

7. Să se efectueze adunarea și apoi să se facă verificarea, transformând numerele în baza 10.

$$\begin{array}{r} a) \quad 42_5 \\ + 34_5 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} b) \quad 44_5 \\ + 23_5 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} c) \quad 302_5 \\ + 402_5 \\ \hline \end{array}$$

8. Să se efectueze scăderile următoare și apoi să se verifice rezultatele în baza 10 :

$$\begin{array}{r} a) \quad 143_5 \\ - 31_5 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} b) \quad 312_5 \\ - 123_5 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} c) \quad 1321_5 \\ - 403_5 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} d) \quad 3204_5 \\ - 1342_5 \\ \hline \end{array}$$

9. Să se efectueze produsele :

$$a) 342_5 \times 4_5; \quad b) 243_5 \times 3_5; \quad c) 32_5 \times 43_5$$

10. Să se efectueze împărțirile :

$$a) 143_5 : 4_5; \quad b) 3042_5 : 4_5; \quad c) 43201_5 : 41_5$$

11. Să se alcătuiască tabela adunării a două numere în baza 8 :

	1	2	3	4	5	6	7
1							
2							
3							
4							
5							
6							
7							

12. Folosind rezultatele de la punctul precedent, să se efectueze adunările și scăderile următoare :

$$\begin{array}{r} a) \quad 147_8 \\ + 324_8 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} b) \quad 347_8 \\ - 135_8 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} c) \quad 256_8 \\ + 103_8 \\ \hline \end{array}$$

Să se verifice apoi rezultatele folosind scrierea numerelor corespunzătoare în baza 10.

13. Să se alcătuiască tabelele adunării și înmulțirii a două numere în baza 4 :

a)	<table><tr><td>+</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr><tr><td>1</td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>2</td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>3</td><td></td><td></td><td></td></tr></table>	+	1	2	3	1				2				3				b)	<table><tr><td>.</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr><tr><td>1</td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>2</td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>3</td><td></td><td></td><td></td></tr></table>	.	1	2	3	1				2				3			
+	1	2	3																																
1																																			
2																																			
3																																			
.	1	2	3																																
1																																			
2																																			
3																																			

14. Folosind rezultatele de la punctul precedent, să se calculeze :

$$a) \begin{array}{r} 121_4 \\ + 302_4 \\ \hline \end{array} \quad b) \begin{array}{r} 132_4 \\ - 123_4 \\ \hline \end{array} \quad c) \begin{array}{r} 103_4 \\ \times 21_4 \\ \hline \end{array}$$

15. Să se efectueze în baza 2 operațiile :

$$a) \begin{array}{r} 1111_2 \\ + 1011_2 \\ \hline \end{array} \quad b) \begin{array}{r} 10011 \\ + 10111 \\ \hline \end{array} \quad c) \begin{array}{r} 110101 \\ - 11011 \\ \hline \end{array}$$

$$d) \begin{array}{r} 1101_2 \\ \times 11_2 \\ \hline \end{array} \quad e) \begin{array}{r} 10110_2 \\ - 1101_2 \\ \hline \end{array}$$

16. Să se demonstreze identitatea :

$$11001_2 \cdot 120_3 + 1011_2 \cdot 132_5 = 837_{10}.$$

17. Să se transforme în sistemul cu baza 2 numărul 487_{10} .

18. Să se determine x din egalitatea :

$$111_2 + 111_3 + 111_4 + 111_5 + 111_6 + 111_7 + 111_8 + 111_9 = x_{10} + 111_{11} + 111_{12}.$$

19. Se consideră în baza 10 numerele :

$$N_1 = \overline{xyz \, xyz \, xyz}$$

$$N_2 = \overline{xyz \, xyz}$$

Să se arate că $\frac{N_1}{N_2}$ este constant.

20. Să se rezolve ecuațiile :

$$X \cup \{1, 2, 3\} = \{1, 2, 3, x, 9\};$$

$$X \cap \{2, 3, 4\} = \emptyset; x \in N^*,$$

știind că x verifică relația :

$$\frac{\overline{12x} + \overline{13x} + \overline{15x}}{\overline{43x}} = 1.$$

21. Se dă produsul : $11 \cdot 121 = 1331$.

În ce bază de numerație are loc înmulțirea?

22. Să se afle bazele sistemului de numerație din următoarele ecuații :

$$11_x + 22_x = 111_{10}$$

$$11_x + 22_x = 21_{10}$$

23. Să se arate că oricare ar fi a, b , numere naturale $1 \leq a; b \leq 9$:

a) $\overline{abbab} - 2b$ se divide cu 7;

b) $\overline{abbab} - 2b$ se divide cu 11;

c) $\overline{abbab} - 9b$ se divide cu 13.

24. Să se afle numerele N de trei cifre care în baza 11 se scriu \overline{xoy} , iar în baza 10 se scriu \overline{yoz} .

25. Să se găsească numărul de patru cifre a, b, c, d , știind că $\frac{\overline{abcd}}{\overline{ad}} = \overline{abc} (b + c - a)^2$.

Capitolul 3

NUMERE ÎNTREGI

3.1. JOCUL PERECHILOR

Să considerăm un joc care constă din aruncarea a două zaruri, unul alb și altul negru.

Prin convenție vom admite că punctele zarului alb sînt cîștiguri, iar cele ale zarului negru sînt pierderi. Scorul unui jucător se stabilește după numărul de puncte pe care le are în plus zarul alb, față de zarul negru.

Dacă, de exemplu, jucătorul *A* a aruncat zarurile și a obținut patru puncte pe zarul alb și două puncte pe zarul negru, convenim să reprezentăm rezultatul acestei aruncări prin perechea (4, 2). Elementele acestei perechi, care sînt 4 și 2, se mai numesc și termenii perechii. Primul element al perechii, numărul 4, reprezintă numărul de puncte al zarului alb, cel de al doilea element al perechii numărul 2, numărul de puncte al zarului negru.

Scorul jucătorului la această aruncare este după convenția stabilită $4 - 2 = 2$ puncte cîștigate. Jucătorul *A* cîștigă două puncte. Vom însemna rezultatul acestei aruncări $+2$. Vom avea deci cîștiguri cînd primul element al perechii este mai mare decît al doilea.

Să presupunem că un alt jucător, *B*, aruncă zarurile și obține 2 puncte pe zarul alb și 4 puncte pe zarul negru, rezultat pe care-l reprezentăm prin perechea (2, 4).

După convenția stabilită jucătorul, *B* pierde $4 - 2 = 2$ puncte. Vom însemna rezultatul acestei aruncări -2 .

Să presupunem că un al treilea jucător *C* aruncă zarurile și obține două puncte pe zarul alb și două puncte pe zarul negru, rezultat care este caracterizat de perechea (2,2). După convenția stabilită anterior, jucătorul *C* nici nu cîștigă și nici nu pierde puncte. Spunem că perechea (2,2) este neutră.

3.2. PERECHI ECHIVALENTE

Să presupunem că jucătorul A aruncă zarurile și realizează un câștig caracterizat de perechea $(5, 3)$ și că jucătorul B realizează și el un câștig reprezentat de perechea $(3, 1)$.

Câștigul primului jucător este $5 - 3 = 2$ puncte, iar al celui de al doilea jucător $3 - 1 = 2$ puncte. Cei doi jucători realizează câștiguri egale.

Vom scrie : $5 - 3 = 3 - 1$, sau : $5 + 1 = 3 + 3$.

Perechile $(5, 3)$ și $(3, 1)$, care reprezintă același câștig de două puncte, le numim echivalente.

Fie perechile $(1, 3)$ și $(2, 4)$. Fiecare din aceste perechi reprezintă câte o pierdere de două puncte. Perechile $(1, 3)$ și $(2, 4)$, care reprezintă pierderile de două puncte, le vom numi echivalente.

Vom scrie :

$$4 - 2 = 3 - 1 = 2$$

Două perechi (a, b) și (c, d) se numesc echivalente dacă :

$$a + d = b + c.$$

Se scrie $(a, b) \sim (c, d)$ și se citește : „perechea (a, b) este echivalentă cu perechea (c, d) ”.

Exemple :

1. Să se arate că $(6, 2) \sim (4, 0)$.

Perechile $(6, 2)$ și $(4, 0)$ sînt echivalente deoarece :

$$6 + 0 = 2 + 4$$

2. Să se determine x , astfel încît să avem :

$$(x, 3) \sim (4, 2).$$

Din relația de echivalență avem :

$$x + 2 = 4 + 3,$$

sau :

$$x = 7 - 2 = 5.$$

3.3. NOȚIUNEA DE NUMĂR ÎNTREG

Să considerăm trei aruncări ale celor două zaruri caracterizate de perechile :

$$(4, 2), (5, 3), (2, 0).$$

Se verifică ușor că aceste perechi sînt echivalente și reprezintă un câștig de două puncte :

$$(4,2) \sim (5,3) \sim (2,0).$$

Toate perechile echivalente cu perechea $(2,0)$ alcătuiesc o clasă pe care o notăm cu $\overline{(2,0)}$ sau numărul întreg $+2$.

Definiție Se numește număr întreg clasa tuturor perechilor de numere naturale echivalente cu o pereche dată (a, b) . Se notează numărul întreg $\overline{(a, b)}$.

Se dă perechea $(5,3)$. Dacă scădem din ambii termeni ai acestei perechi același număr 1, se obține perechea $(4,2)$ care este echivalentă cu $(5,3)$.

Se verifică ușor relația :

$$5 + 2 = 4 + 3.$$

Dacă scădem din ambii termeni numărul 3 se obține o pereche $(2,0)$ echivalentă cu prima :

$$5 + 0 = 3 + 2.$$

Regulă Dacă scădem din ambii termeni ai unei perechi (a, b) același număr natural c ($c \leq a$ și $c \leq b$) se obține o pereche echivalentă cu prima :

$$(a, b) \sim (a - c, b - c).$$

Într-adevăr, se verifică relația :

$$a + b - c = a + b - c.$$

Aplicînd această proprietate putem afla totdeauna o pereche, echivalentă cu o pereche dată, care are unul din termenii săi numărul zero.

Exemplul 1

Fie perechea $(5,4)$. Scădem din ambii termeni ai perechii $(5,4)$ numărul 4 și obținem :

$$(5,4) \sim (5 - 4, 4 - 4) \text{ sau } (5,4) \sim (1,0).$$

Clasa tuturor perechilor echivalente cu perechea $(1,0)$ este numărul întreg $\overline{(1,0)}$ sau $+1$.

Vom scrie : $\overline{(1,0)} = +1$.

Exemplul 2

Fie perechea $(4,5)$. Să scădem din ambii termeni numărul 4 și obținem :

$$(4,5) \sim (4-4, 5-4)$$

sau :

$$(4,5) \sim (0,1).$$

Clasa tuturor perechilor echivalente cu perechea $(0,1)$ este numărul întreg $\overline{(0,1)}$ sau -1 .

Vom scrie :

$$\overline{(0,1)} = -1.$$

Exemplul 3

Fie perechea $(8,8)$. Dacă scădem din ambii termeni ai perechii numărul 8, obținem :

$$(8,8) \sim (8-8, 8-8)$$

sau :

$$(8,8) \sim (0,0).$$

Clasa tuturor perechilor echivalente cu perechea $(0,0)$ se numește numărul întreg $\overline{(0,0)}$ sau 0.

Se scrie : $\overline{(0,0)} = 0$.

Perechea de elemente care are un termen egal cu zero se numește cel mai simplu reprezentant al numărului întreg.

Exemple :

a) Perechile $(1,0)$, $(2,0)$, $(3,0)$, $(4,0)$ reprezintă numerele întregi : $+1$; $+2$; $+3$; $+4$; ...

Vom scrie : $\overline{(1,0)} = +1$, $\overline{(2,0)} = +2$, $\overline{(+3,0)} = +3$ etc.

În general, dacă $a \in N$, atunci numerele $+a$, 0 și $-a$ sînt reprezentate de perechile : $(a, 0)$, $(0,0)$ și $(0, a)$, sau :

$$\overline{(a, 0)} = +a, \overline{(a, a)} = 0, \overline{(0, a)} = -a.$$

Exemplul 4.

a) Cel mai simplu reprezentant al numărului -3 este perechea $(0,3)$.

Vom scrie : $\overline{(0,3)} = -3$.

b) Cel mai simplu reprezentant al numărului $+4$ este perechea $(4,0)$.

Vom scrie :

$$\overline{(4,0)} = +4.$$

c) Cel mai simplu reprezentant al numărului 0 este perechea $(0,0)$.

Vom scrie : $\overline{(0,0)} = 0$.

Perechile $\dots (0,3), (0,2), (0,1), (0,0), (1,0), (2,0), (3,0) \dots$ reprezintă numerele întregi : $-3, -2, -1, 0, +1, +2, +3$, sau : \dots

$$\overline{(0,3)} = -3, \overline{(0,2)} = -2, \overline{(0,1)} = -1, \overline{(0,0)} = 0, \overline{(1,0)} = +1, \\ \overline{(2,0)} = +2, \overline{(3,0)} = +3.$$

Numerele : $\dots -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, \dots$ formează o nouă mulțime pe care o vom nota cu Z și care se numește mulțimea numerelor întregi.

Vom scrie :

$$Z = \{ \dots -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, \dots \}.$$

Numărul întreg $+4$ face parte din mulțimea Z . Vom scrie : $+4 \in Z$. Numerele $-3, -2, -1$ se numesc întregi negative. Numerele : $+1, +2, +3, \dots$ se numesc întregi pozitive.

Numărul zero 0 nu este considerat nici pozitiv și nici negativ.

Mulțimea numerelor întregi este nesfârșită.

Orice număr natural poate fi considerat ca un număr întreg pozitiv.

Mulțimea numerelor naturale este prin urmare inclusă în mulțimea numerelor întregi.

Vom scrie : $N \subset Z$.

3.4. MODULUL UNUI NUMĂR ÎNTREG

Să considerăm de exemplu numerele întregi -5 și -4 .

Un număr întreg se scrie cu ajutorul unui număr natural prevăzut cu semnul $+$ (plus) sau $-$ (minus).

În exemplul dat mai sus, 5 este numărul natural cu care este scris numărul întreg -5 și 4 este numărul natural cu care este scris numărul -4 .

Spunem că 5 este modulul (valoarea absolută) a numărului -5 , iar 4 este modulul (valoarea absolută) a numărului -4 .

Pentru notația modulului unui număr întreg se folosesc două bare verticale între care se scrie numărul întreg. De exemplu modulul numărului întreg -5 se scrie: $|-5| = 5$.

3.5. REPREZENTAREA MULȚIMII NUMERELOR ÎNTREGI PE O DREAPTĂ

Pe o dreaptă pe care s-a ales un punct origine și un sens de măsurat segmentele, unui număr natural dat îi corespunde un singur punct (fig. 3.1).

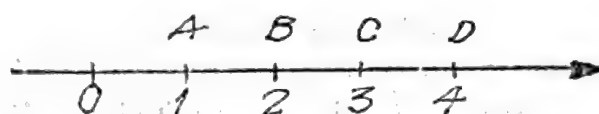


Fig. 3.1

Convenim să reprezentăm numerele întregi pozitive prin puncte așezate pe axa numerică la dreapta originii O .

Pentru a reprezenta pe dreapta numerică numărul pozitiv $+3$, se aplică următorul procedeu. Se alege ca unitate de măsură un segment $\overline{OA} = u$ și se măsoară începând din punctul O pe dreapta numerică xy la dreapta lui O un segment \overline{OM} a cărui lungime este egală cu 3 unități:

$$\overline{OM} = 3\overline{OA} = 3u \text{ (fig. 3.2).}$$

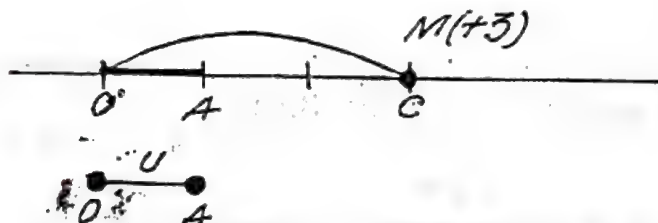


Fig. 3.2

Punctul M reprezintă pe dreapta numerică numărul întreg $+3$.

Convenim să reprezentăm numerele întregi negative prin puncte așezate la stînga originii O .

Aplicînd un procedeu analog cu cel stabilit pentru reprezentarea pe axa numerică a numerelor întregi pozitive, pentru a reprezenta pe dreapta numerică numărul -4 , vom proceda astfel:

Se măsoară începînd din punctul O și la stînga lui O un segment \overline{ON} egal cu $4u$ sau $\overline{ON} = 4\overline{OA} = 4u$ (fig. 3.3).



Fig. 3.3

Punctul N reprezintă pe axa numerică numărul -4 .
Să reprezentăm pe axa numerică numerele :

$$-4, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, +4.$$

După convenția stabilită vom obține punctele :
 $Q, R, N, M ; 0, A, B, C, D$, reprezentate în figura 3.4.

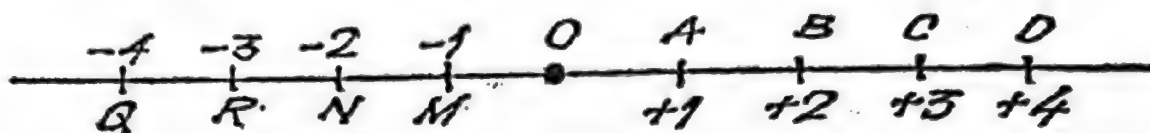


Fig. 3.4

Unui număr întreg îi corespunde un singur punct pe dreaptă.
La două puncte diferite corespund numere diferite.

În figura 3.5 punctele T și T' reprezintă imaginea pe axa numerică a numerelor a și $-a$.

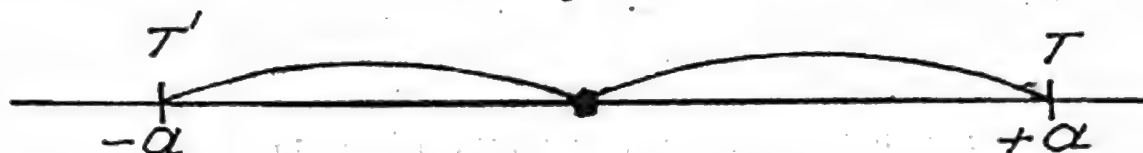
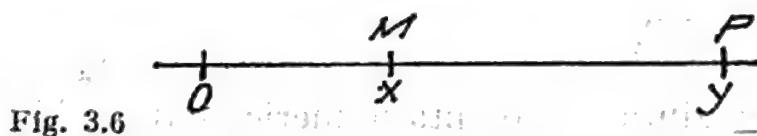


Fig. 3.5

3.6. COMPARAREA NUMERELOR ÎNTREGI PE AXA NUMERICĂ

Dându-se numerele naturale x și y , pe axa numerelor le corespund punctele M , respectiv P (fig. 3.6).



Am văzut că dacă $x < y$, atunci punctul M se află pe axa numerică la stînga punctului P . Această convenție o vom considera adevărată și pentru numerele întregi.

Convenim să considerăm că dintre două numere întregi este mai mare acela căruia îi corespunde pe axa numerică un punct mai la dreapta și mai mic, acela căruia îi corespunde un punct mai la stînga.

Fiind date numerele întregi a și b , căror le corespund pe axă punctele A , respectiv B , atunci $a < b$, dacă A se găsește la stînga lui B .

Punctele care corespund pe axa numerică la numere negative sînt așezate pe axă mai la stînga decît punctul O (fig. 3.7).

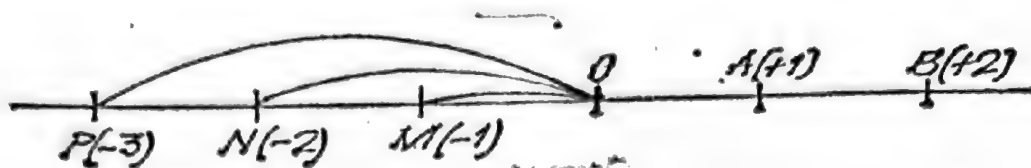


Fig. 3.7

Orice număr întreg negativ este mai mic decît numărul 0 , sau :

$$-3 < 0, -2 < 0, -1 < 0.$$

Un punct oarecare care corespunde unui număr negativ este așezat mai la stînga decît orice punct care corespunde unui număr pozitiv.

Orice număr negativ este mai mic decît un număr pozitiv (fig. 3.8).

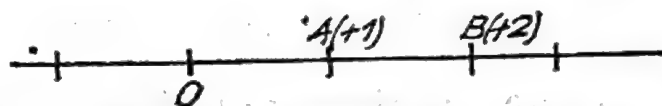


Fig. 3.8

Să considerăm pe axa numerică două puncte A și B care corespund numerelor întregi $+1$ și $+2$.

Avem :

$$OA = |+1| = 1; OB = |+2| = 2; \overline{OB} > \overline{OA}.$$

Punctul B este așezat pe axă numerică mai la dreapta decît punctul A .

După convenția stabilită :

$$+1 < +2 \text{ și } |+1| < |+2|.$$

În general dacă $+a$ și $+b$ sînt două numere pozitive cu $|+a| < |+b|$, atunci punctul care corespunde pe axa numerică numărului $+b$ se află mai la dreapta decît punctul care corespunde numărului $+a$ (fig. 3.9).

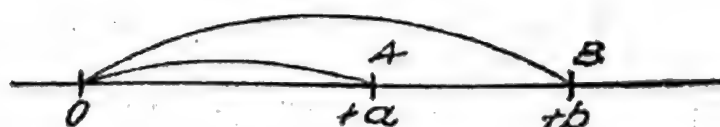


Fig. 3.9

$$|+a| = OA, |+b| = OB, |+b| > |+a|, \\ +a < +b.$$

Dintre două numere întregi pozitive este mai mare acela care are valoarea absolută mai mare și este mai mic acela care are valoarea absolută mai mică.

Să luăm acum două puncte M și P care corespund numerelor întregi -4 și -2 (fig. 3.10).

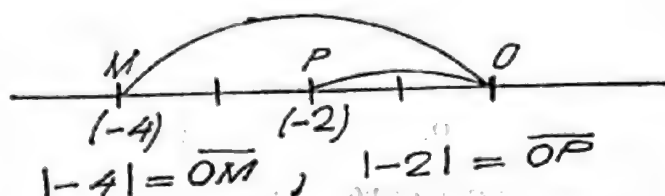


Fig. 3.10

Din relația $OM > OP$, deducem: $|-4| > |-2|$.

Punctul M care corespunde numărului întreg (-4) se află mai la stînga decît punctul P care corespunde numărului (-2) .

După convenția stabilită:

$$-4 < -2.$$

Dintre două numere negative este mai mic acela care are valoarea absolută mai mare și este mai mare acela care are valoarea absolută mai mică.

Exemplu:

Să considerăm numerele întregi:

$$-6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, +4, +5, +6.$$

După convenția stabilită putem scrie:

$$-6 < -5 < -4 < -3 < -2 < -1 < 0 < +1 < +2 < +3 < \\ < +4 < +5 < +6.$$

3.7. ADUNAREA NUMERELOR ÎNTREGI

Să considerăm două aruncări a zarurilor caracterizate de perechile: $(4, 1)$ și $(2, 1)$.

Numărul total al punctelor cîștigate în cele două aruncări este $4+2=6$. Numărul punctelor pierdute este: $1+1=2$. Vom nota rezultatul a două aruncări ale celor două zaruri prin perechea $(6, 2)$.

Convenim să reprezentăm operația de compunere a două aruncări consecutive prin operația de adunare a celor două perechi $(4,1)$ și $(2,1)$. Suma perechilor $(4,1)$ și $(2,1)$ este perechea $(6,2)$, ce caracterizează rezultatul celor două aruncări a zarurilor.

Vom scrie :

$$(4,1) + (2,1) = (6,2).$$

Definiție Suma a două perechi de numere naturale este o pereche de numere naturale care are primul termen egal cu suma primilor termeni ai perechilor date și cel de al doilea termen egal cu suma celorlalți doi termeni ai perechilor date.

Exemplu

Să se afle numărul natural x , astfel încât să avem satisfăcută egalitatea :

$$(x, 3) + (2,1) = (5,4).$$

Soluție: Din definiția sumei a două perechi de numere naturale avem

$$(x, 3) + (2,1) = (x + 2, 3 + 1).$$

sau :

$$(x + 2, 4) = (5,4).$$

Două perechi sînt egale dacă au termenii corespondenți egali:

$$x + 2 = 5 \text{ și, deci, } x = 3.$$

Observație

Operația de adunare a perechilor (a, b) și (c, d) este o operație între clasele de perechi echivalente cu perechile date.

Să considerăm perechile echivalente :

$$(2, 3) \sim (3,4) \text{ și } (1,5) \sim (3,7).$$

Avem :

$$(2,3) + (1,5) = (3,8)$$

$$(3,4) + (3,7) = (6,11).$$

Din cele două egalități se verifică ușor că :

$$(3,8) \sim (6,11).$$

Dacă într-o operație de adunare a două perechi de numere naturale se înlocuiesc perechile date cu perechi echivalente, se obțin sume care sînt perechi echivalente. Operația de adunare a perechilor este deci o adunare între clase.

Putem scrie :

$$(\overline{2,3}) + (\overline{1,5}) = (\overline{3,8}).$$

1. Să considerăm următoarele numere întregi pozitive :

$$(\overline{2,0}) = +2 \text{ și } (\overline{3,0}) = +3.$$

Avem :

$$(\overline{2,0}) + (\overline{3,0}) = (\overline{5,0}),$$

sau :

$$(+2) + (+3) = +5. \quad (1)$$

Din egalitatea (1), deducem :

$$|+5| = |+2| + |+3|.$$

Modulul sumei este egal cu suma modulelor.

2. Fie numerele întregi negative :

$$(\overline{0,3}) = -3, (\overline{0,4}) = -4.$$

După regula de adunare a perechilor avem :

$$(\overline{0,3}) + (\overline{0,4}) = (\overline{0,7}),$$

sau :

$$(-3) + (-4) = -7. \quad (2)$$

Din egalitatea (2), deducem :

$$|-7| = |-4| + |-3|.$$

Modulul sumei este egal cu suma modulelor celor doi termeni.

Definiție Suma a două numere întregi, care au același semn, este un număr întreg care are semnul comun celor două numere întregi și modulul (valoarea absolută) egal cu suma modulelor numerelor.

3.8. SUMA A DOUĂ NUMERE ÎNTREGI DE SEMNE CONTRARE

1. Se dau numerele întregi :

$$(\overline{4,0}) = +4 \text{ și } (\overline{0,3}) = -3$$

Din definiția adunării claselor avem :

$$(\overline{4,0}) + (\overline{0,3}) = (\overline{4,3}).$$

Dacă scădem din ambii termeni ai perechii $(4,3)$ numărul 3, se obține o pereche echivalentă :

$$(4,3) \sim (1,0).$$

Prin urmare avem :

$$(\overline{4,0}) + (\overline{0,3}) = \overline{(1,0)}$$

sau :

$$(+4) + (-3) = +1. \quad (3)$$

Din egalitatea (3), deducem :

$$|+1| = |+4| - |-3|.$$

2. Fie numerele întregi :

$$(\overline{0,6}) = -6 ; (\overline{3,0}) = +3.$$

Avem :

$$(\overline{0,6}) + (\overline{3,0}) = \overline{(3,6)},$$

sau : $(\overline{3,6}) \sim (\overline{0,3}).$

Prin urmare :

$$(\overline{0,6}) + (\overline{3,0}) = \overline{(0,3)},$$

sau : $(-6) + (+3) = -3. \quad (4)$

Din egalitatea (4) rezultă că :

$$|-3| = |-6| - |+3|.$$

Definiție Suma a două numere întregi care au semne opuse este un număr întreg care are semnul numărului cu valoarea absolută cea mai mare, iar valoarea absolută egală cu diferența valorilor absolute ale celor două numere.

3. Două numere întregi se numesc opuse dacă au aceeași valoare absolută și semne contrare.

Exemple

$$-5 \text{ și } 5 ; -4 \text{ și } +4 ; -1 \text{ și } +1.$$

Dacă a este un număr natural oarecare, numerele $-a$ și $+a$ se numesc opuse.

Să considerăm două numere întregi opuse :

$$(\overline{3,0}) = +3 \text{ și } (\overline{0,3}) = -3$$

Din operația de adunare a perechilor avem :

$$(\overline{3,0}) + (\overline{0,3}) = (\overline{3,3}),$$

sau :

$$(\overline{3,0}) + (\overline{0,3}) = (\overline{0,0}),$$

sau :

$$(+3) + (-3) = 0.$$

Suma a două numere întregi opuse este numărul întreg zero.
Suma unui număr întreg cu numărul zero este numărul însuși :

$$(\overline{3,0}) + (\overline{0,0}) = (\overline{3,0}),$$

sau :

$$(+3) + 0 = +3.$$

Vom folosi în toate exercițiile cu numere întregi regulile și definițiile stabilite în acest paragraf fără a mai recurge la reprezentarea numerelor întregi prin perechi.

3.9. PROPRIETĂȚILE OPERAȚIEI DE ADUNARE A NUMERELOR ÎNTEGI

1. Adunarea este comutativă :

$$(+3) + (-5) = -2; (-5) + (+3) = -2$$

$$(+3) + (-5) = (-5) + (+3)$$

$$\boxed{a + b = b + a.}$$

2. Adunarea este asociativă.

$$(+3) + ((-5) + (+2)) = (+3) + (-3) = 0$$

$$((+3) + (-5)) + (+2) = (-2) + (+2) = 0.$$

Prin urmare :

$$(+3) + ((-5) + (+2)) = ((+3) + (-5)) + (+2)$$

$$(a + b) + c = a + (b + c).$$

3. Zero este element neutru pentru adunare

$$(+3) + 0 = (+3) = +3$$

$$a + 0 = 0 + a = a.$$

4. Orice număr întreg admite un număr opus.

$$(+3) + (-3) = 0$$

sau :

$$(+a) + (-a) = 0.$$

3.10. SCĂDEREA NUMERELOR ÎNTREGI

Diferența a două numere întregi a și b se scrie $x = a - b$ și înțelegem că prin această operație trebuie să găsim un număr întreg x care, adunat cu numărul întreg b , să dea numărul întreg a .

$$x + b = a.$$

Să se calculeze diferența numerelor întregi -6 și -4
Vom scrie :

$$(-6) - (-4) = x$$

Trebuie să găsim numărul întreg x , care adunat cu -4 să ne dea -6 , adică :

$$x + (-4) = -6.$$

Adunăm în ambele părți ale acestei egalități numărul $+4$ și obținem :

$$(x + (-4)) + (+4) = (-6) + (+4).$$

Suma din membrul stîng al acestei egalități o mai putem scrie și astfel :

$$x + ((-4) + (+4)) = (-6) + (+4),$$

sau :

$$x = (-6) + (+4)$$

Deci : $(-6) - (-4) = (-6) + (+4) = -2$

Într-adevăr, $(-2) + (-4) = -6$

Pentru a scădea două numere întregi, adunăm primul număr întreg cu opusul celui de al doilea număr întreg.

Exemple : a) $(-2) - (-3) = (-2) + (+3) = +1$

b) $(+7) - (-2) = (+7) + (+2) = +9$

3.11. REPREZENTAREA OPERAȚIILOR PE AXA NUMERICĂ

a) *Adunarea numerelor întregi.*

Să presupunem că un mobil oarecare se deplasează din punctul O , mai întîi spre dreapta 3 unități pînă în punctul A . Din punctul A se deplasează în continuare încă două unități spre dreapta pînă în punctul B .

Urmărind fig. 3.11, observăm că punctului B îi corespunde pe

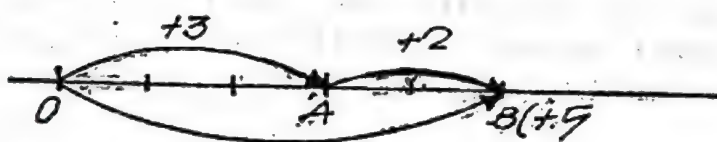


Fig. 3.11

axa numerică numărul întreg $+5$.

Vom scrie : $(+3) + (+2) = +5$.

Să presupunem că un mobil s-a deplasat din punctul O spre stînga 3 unități pînă în punctul C și apoi din C iarăși spre stînga 2 unități pînă în punctul D (fig. 3.12).

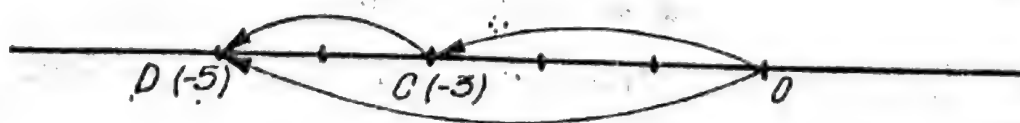


Fig. 3.12

Punctului D îi corespunde numărul întreg -5 .

Vom scrie : $(-3) + (-2) = -5$.

Mobilul se deplasează acum din O spre dreapta 5 unități până în punctul A și din acest punct spre stânga 2 unități, până în punctul B (fig. 3.13).

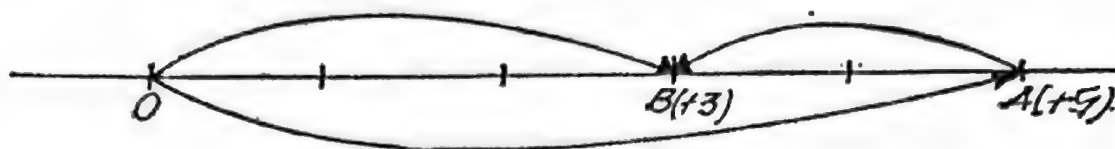


Fig. 3.13

Punctului B îi corespunde numărul întreg $+3$.

Vom scrie : $(+5) + (-2) = +3$.

b) *Opusul sumei a două numere întregi*

Să arătăm pe axa numerică suma numerelor întregi $(+4)$ și (-7) .

Din punctul O mobilul se deplasează spre dreapta 4 unități până în punctul A și apoi din punctul A spre stânga 7 unități până în punctul B . Punctului B îi corespunde numărul întreg -3 .

Vom scrie :

$$(+4) + (-7) = -3 \text{ (fig. 3.14).}$$

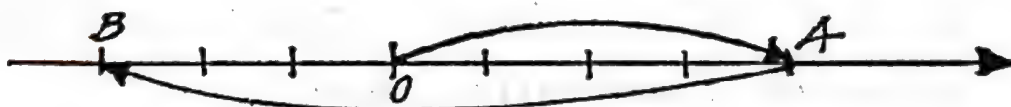


Fig. 3.14

3.12. ÎNMULȚIREA NUMERELOR ÎNTREGI

Noi cunoaștem sensul înmulțirii numerelor întregi pozitive (naturale).

Exemple :

$$4 \cdot 7 = 7 + 7 + 7 + 7 = 28;$$

$$3 \cdot 6 = 6 + 6 + 6 = 18.$$

Același sens îl vom atribui și înmulțirii numerelor pozitive cu cele negative.

Exemplu :

$$4 \cdot (-6) = -6 - 6 - 6 - 6 = -(6 + 6 + 6 + 6) = 6 \cdot (-4) = -24.$$

Prin urmare :

$$4 \cdot (-6) = -(4 \times 6) = -24.$$

În general, dacă a și b sînt două numere naturale, atunci :

$$(+a) \cdot (-b) = -ab.$$

Deoarece înmulțirea este comutativă avem și :

$$(-a) \cdot (+b) = -ab \quad (a \in N, b \in N).$$

Pentru a înmulți două numere întregi de semne contrare, se efectuează mai întîi produsul numerelor naturale cu care sînt scrise cele două numere întregi și rezultatul primește semnul minus.

Să efectueze acum produsul numărului întreg -4 cu suma numerelor -3 și $+3$. Avem :

$$(-4) \cdot [(-3) + (+3)] = (-4) \cdot 0 = 0. \quad (1)$$

Înmulțirea numerelor naturale este distributivă față de adunare. Această proprietate este adevărată și pentru numere întregi și avem :

$$(-4) \cdot [(-3) + (+3)] = (-4) \cdot (-3) + (-4) \cdot (+3).$$

Ținînd seama de egalitatea (1) obținem :

$$(-4) \cdot (-3) + (-4) \cdot (+3) = 0. \quad (2)$$

După cum am văzut în exemplul anterior produsul a două numere întregi de semne contrare este un număr negativ.

Prin urmare : $(-4) \cdot (+3) = -12$.

Înlocuim produsul $(-4) \cdot (+3)$ cu -12 , în egalitatea (2) se obține :

$$(-4) \cdot (-3) + (-12) = 0. \quad (3)$$

Dacă suma a două numere întregi $(-4) \cdot (-3)$ și (-12) este numărul zero, cele două numere sînt opuse și prin urmare putem scrie :

$$(-4)(-3) = +12 \quad (4)$$

Produsul a două numere întregi, care au același semn, este un număr întreg pozitiv care are valoarea absolută egală cu produsul valorilor absolute :

$$(-a) \cdot (-b) = +(a \cdot b) = +ab.$$

3.13. ECUAȚII

Să considerăm egalitatea $3 \cdot x + 1 = 7$, unde $x \in \{0, 1, 2, 3\}$.

Nu putem stabili dacă această egalitate este adevărată decât după ce în prealabil cunoaștem ce număr este x .

Dacă $x = 0$, atunci : $3 \cdot 0 + 1 = 1 \neq 7$ — egalitatea nu este adevărată ;

Dacă $x = 1$, atunci : $3 \cdot 1 + 1 = 4 \neq 7$ — egalitatea nu este adevărată ;

Dacă $x = 2$, atunci : $3 \cdot 2 + 1 = 7 = 7$ — egalitatea este adevărată.

O egalitate de forma $ax + b = c$, unde am notat prin litera x un număr necunoscut oarecare, aparținând unei mulțimi, și care este adevărată numai pentru anumite valori ale numărului x , se numește ecuație.

Litera x prin care am însemnat numărul necunoscut se numește necunoscută.

Elementele mulțimii $M = \{0, 1, 2, 3\}$ pentru care egalitatea este adevărată se numesc rădăcinile sau soluțiile ecuației.

A rezolva ecuația înseamnă a găsi soluțiile ei.

Ecuații echivalente

Exemplu: Se dau ecuațiile:

$$3x + 5 = 2x + 9, \quad x \in M$$

$$4x - 1 = x + 11, \quad x \in M,$$

unde $M = \{1, 2, 4\}$.

Înlocuind pe rând elementele mulțimii M în cele două ecuații constatăm că ele admit aceeași rădăcină : $x = 4$.

Definiție : Două ecuații în care necunoscuta aparține aceleiași mulțimi și cu aceleași rădăcini se numesc ecuații echivalente.

Ecuatiile : $3x + 5 = 2x + 9$

$$4x - 1 = x + 11,$$

cu $x \in \{1, 2, 4\}$, sînt echivalente.

Proprietățile ecuațiilor

Proprietatea I

Dacă adunăm sau scădem la ambii membri ai unei ecuații același număr atunci obținem o ecuație echivalentă cu cea dată.

Exemple:

1. Fie ecuația : $5x + 3 = 2x + 9$, cu $x \in \{0, 2, 5, 6\} = A$. Această ecuație are rădăcina $x = 2$. (A fost găsită verificînd pe rînd elementele mulțimii).

a) Adunăm la ambii membri ai ecuației $5x + 3 = 2x + 9$, $x \in A$, numărul 6.

Obținem : $5x + 3 + 6 = 2x + 9 + 6$.

$$\text{Sau : } 5x + 9 = 2x + 15.$$

Se verifică că ecuația obținută, $5x + 9 = 2x + 15$ ($x \in A$), are rădăcina $x = 2$.

Ea este echivalentă cu cea dată :

$$5x + 3 = 2x + 9, x \in A.$$

b) Scădem din ambii membri ai ecuației : $5x + 3 = 2x + 9$, ($x \in A$) numărul 3.

$$\text{Obținem : } 5x + 3 - 3 = 2x + 9 - 3, x \in A,$$

$$\text{sau : } 5x = 2x + 6, x \in A.$$

Se verifică că ecuația obținută are rădăcina $x = 2$ și în acest caz ea este echivalentă cu cea dată.

2. Fie ecuația : $4x - 5 = x + 10$, $x \in \{2, 5, 6\} = A$, cu rădăcina $x = 5$. (1)

a) Adunăm la ambii membri ai ecuației numărul 5.

Obținem :

$$4x + 5 - 5 = x + 10 + 5, (x \in A)$$

$$4x + 0 = x + 10 + 5, (x \in A)$$

$$4x = x + 15.$$

Ecuatia obținută este echivalentă cu prima, pentru că are rădăcina $x = 5$.

b) Scădem la ambii membri ai ecuației obținute: $4x = x + 10 + 5$ ($x \in A$) numărul x . Obținem:

$$4x - x = x + 10 + 5 - x, \quad (x \in A)$$

$$4x - x = x - x + 10 + 5, \quad (x \in A)$$

$$4x - x = 10 + 5. \quad (x \in A) \quad (2)$$

Comparând ecuațiile (1) și (2), observăm:

— ecuația (2) are în membrul întâi, termeni ce conțin necunoscuta iar în membrul doi, termeni ce nu conțin necunoscuta.

— termenul -5 din membrul întâi al ecuației (1) nu se găsește în ecuația (2). În schimb, în membrul doi al ecuației (2) se găsește termenul $+5$ (opusul lui -5);

— termenul x din membrul doi al ecuației (1) nu se găsește în ecuația (2). În schimb, în membrul întâi al ecuației (2) se găsește termenul $-x$ (opusul lui x).

Aceste observații conduc la următoarea afirmație:

Într-o ecuație putem trece un termen dintr-un membru în altul cu semnul schimbat și obținem o ecuație echivalentă cu prima.

Proprietatea II

Dacă înmulțim sau împărțim ambii membri ai unei ecuații cu același număr diferit de zero, atunci obținem o ecuație echivalentă cu cea dată.

Exemple:

1) Fie ecuația $2x + 1 = x + 5$ cu $x \in \{0, 3, 4, 8\} = A$. Rădăcina ei este $x = 4$. Înmulțim ambii membri ai ecuației cu 3. Obținem ecuația:

$$3(2x + 1) = 3(x + 5), \quad x \in A,$$

sau:

$$6x + 3 = 3x + 15, \quad x \in A.$$

Ecuatia obținută are rădăcina $x = 4$, deci este echivalentă cu cea dată.

2) Fie ecuația $6x = 30$ cu $x \in \{1, 5, 7, 10\} = B$. Rădăcina ei este $x = 5$.

Împărțim ambii membri ai ecuației cu 2. Obținem :

$$(6x) : 2 = 30 : 2, \quad x \in B.$$

sau :

$3x = 15$, $x \in B$. Această ecuație are rădăcina $x = 5$, deci este echivalentă cu ecuația dată.

Rezolvarea ecuațiilor

1) Dacă mulțimea în care se caută rădăcinile ecuației are puține elemente, atunci acestea se găsesc verificând pe rînd toate elementele.

2) Dacă mulțimea are prea multe elemente, procedeul prin verificare durează prea mult.

În acest caz se folosesc proprietățile ecuațiilor, transformînd ecuația dată într-o ecuație echivalentă cu ea care se rezolvă mai ușor.

3.14. EXERCITII ȘI PROBLEME

1. Să se arate că următoarele perechi de numere naturale sînt echivalente : $(5, 4)$ și $(3, 2)$; $(1, 0)$ și $(2, 1)$.

2. Să se scrie o pereche echivalentă cu perechea $(4, 3)$ care are unul din termeni zero.

3. Să se determine numărul natural a , astfel încît perechile $(a, 0)$ și $(11, 7)$ să fie echivalente.

4. Să se determine numărul natural x , astfel încît perechile :

a) $(4, x)$ și $(0, 1)$;

b) $(13, 0)$ și $(x, 4)$;

c) $(0, 413)$ și $(14, x)$ să fie echivalente.

5. O echipă de fotbal a marcat într-un joc 2 goluri și a primit 1 gol. O altă echipă a marcat 3 goluri și a primit 2. a) Scrieți aceste rezultate cu ajutorul perechilor ; b) Sînt echipele la egalitate ? Arătați aceasta prin echivalența perechilor ; c) Dacă rezultatele celor două echipe sînt respectiv $(4, 1)$ și $(1, 3)$, să se spună cîte goluri trebuie să mai dea echipa a doua ca să aibă rezultatul echivalent cu prima ; d) Rezultatele celor două echipe sînt $(0, 2)$ și $(1, 4)$; care este numărul minim de goluri necesare echipei a doua pentru a întrece prima echipă ?

6. Se consideră mulțimea :

$$A = \{0, 2, 3, 4, 5\}.$$

a) Să se determine $x \in A$, astfel încât să avem :

$$(2x + 3, 5) \sim (5, 3).$$

b) Să se determine $x \in A$, din condiția : $(2x - 4, 2) \sim (x + 1, 3)$.

7. Să se arate că dacă scădem din termenii perechii $(10, 9)$ numărul 9, se obține o pereche echivalentă cu ea.

8. Să se arate că dacă adunăm la termenii perechii $(10, 8)$, un același număr natural, de exemplu 4, se obține o pereche echivalentă cu ea.

9. Să se scrie perechile echivalente cu perechea $(5, 6)$ care au cel de al doilea termen un divizor al numărului 6.

10. Să se scrie toate perechile echivalente cu perechea $(2, 3)$ care au primul termen un număr mai mic decât 20 și multiplul lui 3.

11. Se dau perechile : $(4, 5)$, $(15, 20)$, $(18, 18)$, $(285, 304)$, $(3500, 3500)$.

Să se sublinieze perechile echivalente cu perechea $(0, 0)$.

12. Să se calculeze sumele : $(3, 5) + (1, 2)$, $(4, 5) + (4, 4)$, $(118, 210) + (2, 20)$.

13. Se dă mulțimea $A = \{1, 2, 3\}$. Să se scrie o pereche (a, b) , $a \in A$, $b \in A$, echivalentă cu $(1, 2)$.

14. Se dă mulțimea $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Dacă $a \in A$ și $b \in A$ să se scrie toate perechile (a, b) care au proprietatea $b = 2a$.

15. Să se determine x astfel încât să avem satisfăcute egalitățile :

$$(x, 3) + (2, 0) = (5, 3);$$

$$(x + 3, 4) + (2, 2) = (5, 6);$$

$$(3x + 1, 2) + (4, 5) = (11, 7).$$

16. Să se arate că nu există nici un număr natural x astfel încât să avem egalitatea : $(x + 1, 5) + (3, x + 2) = (4, 10)$.

17. Să se determine numărul natural x , care satisface egalitatea :

$$(2x, 3) + (4, 5) + (2, 2) = (x + 7, 10).$$

18. Se consideră mulțimea $A = \{1, 2, 3, 4\}$.

a) Să se scrie perechile (x, y) cu $x \in A$ și $y \in A$ care sînt echivalente cu perechea $(2, 4)$.

b) Să se determine $x \in A$ astfel încît să avem egalitatea :

$$(x, 1) + (3, 3) = (4, 4).$$

19. În tabelul alăturat sînt indicate valorile variabilelor a, b, c, d, e și f .

a	b	c	d	e	f
1	2	4	5	3	1
6	7	2	3	1	4
0	4	2	2	1	2

Să se calculeze, în toate cele trei cazuri :

$$[(a, b) + (c, d)] + (e, f);$$

$$(a, b) + [(c, d) + (e, f)].$$

20. Să se scrie numerele întregi reprezentate de perechile :

$$(0, 3), (4, 0), (1, 3), (3, 1).$$

21. Să se scrie cîte o pereche de numere naturale care reprezintă numărul întreg -5 și cîte o pereche de numere naturale care reprezintă numărul întreg $+5$, care au cîte un element egal cu 0.

22. Să se scrie ce numere întregi definesc următoarele clase de perechi de numere naturale :

$$\{(4, 3), (508, 507), (75, 74), (191, 190), (301, 300)\},$$

$$\{(2, 3), (17, 18), (4954, 4955)\}.$$

23. Să se scrie numerele întregi date de următoarele clase :

$$a) \overline{(19, 410)}; b) \overline{(41, 17)}; c) \overline{(0, 19)}; d) \overline{(0, 0)};$$

$$e) \overline{(413, 1279)}; f) \overline{(1415, 13)}.$$

24. Scrieți clasele care au un termen zero și care definesc numerele întregi ;

$$a) +4 \text{ respectiv } -4; b) -20 \text{ și } +20; c) -a \text{ și } +a, a \in N.$$

25. Scrieți cinci reprezentanți ai clasei care definește numărul întreg (-6) .

26. Fie mulțimea $M = \{x \in N \mid x \leq 12\}$ și $\overline{(x, 3)}$. Să se găsească mulțimea $A = \{x \in M \mid \overline{(x, 3)} \text{ să fie un număr întreg pozitiv}\}.$

27. Fie numărul întreg $x = (a, 7)$ unde $a \in \mathbb{N}$. a) Să se afle cea mai mică valoare a lui a , astfel ca x să fie un număr întreg pozitiv; b) Să se afle cea mai mare valoare a lui a , astfel ca x să fie un număr întreg negativ; c) Să se determine a astfel ca x să fie numărul întreg zero.

28. Se dau perechile : $(x, 4)$, $(5, x)$, $(6, x)$.

Să se determine pentru fiecare pereche în parte cel mai mic număr natural x , astfel încât numerele întregi $(x, 4)$, $(5, x)$, $(6, x)$ să fie pozitive.

29. Se dă perechea $(2x + 1, 3)$. Să se afle cel mai mic număr natural x astfel încât perechea $(2x + 1, 3)$ să reprezinte un număr pozitiv. Ce număr natural este x astfel încât perechea $(2x + 1, 3)$ să reprezinte un număr negativ?

30. Să se scrie 4 perechi de numere care reprezintă numărul $+5$ și 4 perechi care reprezintă numărul -1 .

31. Să se aleagă perechile de numere naturale care reprezintă numerele întregi $+7$ și -3 . Să se verifice relația : $(+7) + (-3) = (+4)$.

32. Să se scrie modulele numerelor care sînt elementele mulțimii : $A = \{8, -7, -3, 18, +1001, -400, 200\}$.

33. Se dau următoarele numere întregi : $(4, 0)$, $(3, 8)$, $(2, 1)$, $(1001, 101)$. Să se scrie modulele lor.

34. Dacă două numere întregi sînt egale, modulele lor sînt egale. Exemple.

35. Dacă modulele a două numere întregi sînt egale, numerele întregi respective sînt egale? Exemple.

36. Să se calculeze :

a) $|8| + |-3| + |-8|;$

b) $|+100| + |0| + |-50| + |+1000|;$

c) $(|-5| \cdot 3 + 4 \cdot |-101|) \cdot 5 + |100| \cdot |-1| : 50$

d) $|70| + |+5| - (|70| : |10|) + 700 : |-100|.$

37. Să se scrie modulele următoarelor numere întregi :

$$-102, +40, -311, 0, -512.$$

38. Se consideră mulțimea : $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ este divizor al numărului } 16\}$.

Să se determine submulțimea $B \subset A$ ale cărei elemente verifică inecuația : $x + 2 < 10$.

39. Să se arate că inegalitatea $|x| < 4$ este adevărată pentru orice element al mulțimii $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$.

40. Temperatura la Ploiești a fost de -13° iar la Predeal de -19° . Unde a fost temperatura mai scăzută? Să se exprime acest rezultat folosind semnul „mai mare” sau „mai mic”.

41. Temperatura la București a fost de $+2^\circ$, iar la Săvinești de -1° . Unde a fost mai ridicată? Să se exprime aceasta cu ajutorul relației „mai mic”.

42. Să se găsească valoarea de adevăr a propoziției : $x < y$ dacă : a) $x = 15, y = +20$; b) $x = 8, y = -30$;

c) $x = 0, x = 19$; d) $x = -30, y = -101$;

e) $x = -14, y = 80$.

43. Se dă mulțimea $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -5 \leq x \leq 0\}$. a) Să se scrie mulțimea enumerând elementele ; b) Să se scrie mulțimea

$M = \{y \mid y = x^2, x \in A\}$; c) Să se scrie $A \cap M$.

Ordinea numerelor întregi

44. Să se pună semnele „ $<$ ” și „ $>$ ”, după cum este cazul între numerele : a) -3 și $+1$; b) -1 și -9 ; c) -25 și $+3$; d) -50 și -2 ; e) -100 și -1 ; f) -27 și 0 .

45. Să se scrie în ordine crescătoare elementele mulțimii : $M = \{-8, +20, -17, +200, 0, -5, +18, +1\}$.

46. Să se scrie în ordine descrescătoare elementele mulțimii : $P = \{-3, -5, -4, -1, -2\}$.

47. Să se scrie în ordine crescătoare următoarele numere întregi :

$(4, 0), (1, 2), (3, 1), (4, 1), (5, 0), (1, 1)$.

48. Să se găsească cel mai mic număr natural a în așa fel ca $\overline{(3, a)} < \overline{(4, 2)}$.

49. Fie mulțimea $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 8\}$. a) Să se găsească mulțimea $M = \{a \in A \mid (2, 0) < (7, a)\}$; b) Să se scrie numerele întregi de forma $(7, a)$ care îndeplinesc condiția de la punctul a).

50. a) Să se scrie mulțimea $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -2 < x < 1\}$.

b) Să se calculeze $\text{card } A$; c) Să se scrie mulțimea:

$$B = \{x \in A \mid x \in \mathbb{N}\}.$$

51. Alegeți unul din semnele „ $<$ ”, „ \leq ” sau „ $=$ ” și scrieți-l în pătrate astfel încât să avem satisfăcute relațiile:

$$\overline{(3, 4)} \square \overline{(2, 3)}, \overline{(5, 8)} \square \overline{(4, 7)}.$$

52. Să se scrie, enumerând toate elementele din care este alcătuită, mulțimea:

$$A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -4 \leq x \leq 4\}.$$

53. Să se scrie mulțimea $M = \{-1, 0, +1, +2, +3\}$ indicând o proprietate caracteristică a elementelor sale.

54. Se dau mulțimile:

$$A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -3 \leq x < +4\},$$

$$B = \{x \in \mathbb{Z} \mid -4 \leq x \leq 2\}.$$

Să se scrie mulțimea $A \cap B$.

55. În mulțimea numerelor întregi \mathbb{Z} se consideră submulțimea:

$$A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -4 < x < 4\}.$$

Să se găsească toate numerele $x \in A$ care verifică inecuația:

$$|x^2| + 2 < 10.$$

56. Se consideră mulțimea: $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -1 \leq x \leq 1\}$.

Să se afle toate numerele întregi $x \in A$ care verifică egalitatea $|x| + 1 = 2$.

57. Se dau numerele:

$$a = 3^2 - 5^2; \quad b = 2^2 \cdot 3^2 - 5$$

și propozițiile:

$$a < b, \quad a = b, \quad a > b.$$

Să se stabilească valoarea de adevăr a acestor propoziții.

58. Se dă mulțimea :

$$A = \{-2, 1, 0\}$$

și propoziția $4x^2 - 3 = 2x + 1$.

Să se găsească numerele $x \in A$ pentru care această propoziție este adevărată.

59. Să se rezolve ecuația : $4x - 1 = 3x + 4$, $x \in \{1, 6, 5\}$.

60. Să se rezolve ecuația : $4x^2 - 5x = 2x + 2$, $x \in \{1, 2\}$.

61. Să se cerceteze dacă ecuațiile :

$$3x + 5 = 6x + 2;$$

$$4x + 9 = 5x + 8. \quad x \in \{1, 2, 3\}$$

sînt echivalente.

62. Să se afle soluțiile ecuațiilor, aplicînd proprietățile :

$$x + 5 = 2x - 9, \quad x \in \mathbb{Z};$$

$$6x + 1 = 5x + 2, \quad x \in \mathbb{Z};$$

$$x + 2x = 13 + 5, \quad x \in \mathbb{Z}.$$

63. Se dau numerele :

$$x = 2^2 \cdot 5 - 14,$$

$$y = 27 - 2 \cdot 3^2$$

și propozițiile : $x = y$, $x < y$, $x > y$.

Care din aceste propoziții sînt adevărate și care false ?

64. Dacă mărim de 5 ori un număr și adăugăm la rezultat 24 obținem 44. Să se afle numărul.

65. Un număr se mărește de 8 ori iar din rezultat scădem 5 și obținem astfel 19. Să se afle numărul.

66. Un număr este de 7 ori mai mare decît altul. Diferența lor este 30. Să se afle numerele.

67. Una din laturile egale ale unui triunghi isoscel este de 3 ori mai mare ca baza lui. Să se afle laturile lui știind că perimetrul triunghiului este 105 cm.

68. Perimetrul unui triunghi isoscel este de 70 cm, baza lui este cu 2 cm mai mică decît una din laturile egale. Să se afle laturile triunghiului.

69. Perimetrul unui triunghi este de 280 cm. Se știe că a doua latură este mai mică decât prima cu 20 cm iar a treia este mai mare ca prima cu 30 cm. Să se afle laturile triunghiului.

70. Se dă mulțimea $A = \{-1, -2, 1, 0\}$.

Să se scrie elementele mulțimii A în ordine crescătoare și apoi să se scrie elementele mulțimii A în ordine descrescătoare.

71. Se dă mulțimea $B = \{-7, -8, +7, +5\}$. Să se scrie elementele mulțimii B în ordine crescătoare și apoi în ordine descrescătoare.

72. Să se compare numerele întregi x și y dacă :

a) $x = -4, y = -2$; c) $x = -1, y = -4$;

b) $x = -6, y = 0$; d) $x = 0, y = +1$.

74. Să se reprezinte pe axa numerică elementele mulțimii :

$$A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -3 < x < +4\}.$$

74. Să se scrie numerele $-10, -8, +7, +3, -2, 0, -1, +1$ în ordine descrescătoare, folosind semnul corespunzător inegalităților dintre ele.

75. Să se afle numerele întregi care verifică inegalitățile :

a) $-4 < x < 2$; c) $-1 < x < 1$;

b) $+1 < x < +2$; d) $-4 < x < 0$.

76. Să se afle numerele întregi y care verifică inegalitățile :

$$-14 < y < -10, -85 < g < -83, -101 < y < -90.$$

77. Să se scrie toate elementele mulțimilor :

$$A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -3 < x < 2\}, \quad B = \{x \in \mathbb{Z} \mid -1 < x < 8\}.$$

78. Se știe că a, b, c sînt numere întregi. Să se compare a și c , dacă se știe că :

a) $a < b$ și $b < c$; c) $c > b$ și $a < b$;

b) $a > b$ și $b > c$; d) $c < b$ și $a > b$.

79. Se dau mulțimile $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -2 < x \leq 6\}$ și

$$B = \{x \in \mathbb{Z} \mid -2 < x \leq 4\}.$$

Să se scrie mulțimile $A \cup B$ și $A \cap B$.

80. Se dau mulțimile : $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -5 \leq x \leq -1\}$,

$$B = \{y \mid y = x^2, x \in A\}.$$

Să se calculeze c.m.m.c al elementelor mulțimii B .

81. Pe axa numerică, să se arate unde se va afla punctul M , dacă el se mută din origine spre dreapta 5 unități și apoi spre stînga 2 unități.

82. Pe axa numerică, să se arate unde se va afla un punct care se mută din origine spre stînga 6 unități și apoi spre dreapta 4 unități.

83. Să se găsească unde se va afla pe axa numerică un punct dacă el se va muta din originea O astfel :

a) la început $+8$ și apoi $+2$;

b) la început -6 și apoi $+4$;

c) la început -6 și apoi $+8$;

d) la început $+8$ și apoi -6 .

84. Să se arate pe axa numerică adunarea următoarelor numere :

$$(+3) + (-5), (-6) + (-4), (-6) + (+7).$$

85. Să se verifice dacă sînt adevărate inegalitățile :

$$(-5) + (+4) < (-6) + (-4);$$

$$(-15) + (-6) < (-9) + (-13);$$

$$(-11) + (-9) > (-12) + (-8).$$

86. Să se completeze tabelele următoare :

x	y	$x+y$
-18	7	
-29	+19	
30	-6	

a	b	$a+b$
9	-50	
7	-30	
50	10	

87. Folosind axa numerică, să se afle sumele :

$$(+8) + (+2); \quad (-7) + (+5); \quad (-10) + (+10);$$

$$(+6) + (-5); \quad (-6) + (-2); \quad (+9) + (-12).$$

88. Să se verifice inegalitățile :

$$(+11) + (-9) > (-10) + (+9);$$

$$(+4) + (-24) < (-3) + (+24);$$

$$(+18) + (+5) > (+18) + (-4);$$

$$(-11) + (+6) < (-2) + (+3).$$

89. Să se aplice proprietatea de asociativitate și apoi să se calculeze sumele :

- a) $(-3) + (+5) + (-3);$ c) $(-9) + (+5) + (+9) + (-10) + (+9) + (+10);$
 b) $(-7) + (+8) + (+7);$ d) $(-4) + (+5) + (+4) + (-5) + (+9) + (-14).$

90. Să se calculeze sumele :

- a) $(+7) + (-3) + (-4);$ c) $(-7) + (-3) + (-2);$
 b) $(-7) + (-6) + (-5);$ d) $(-3) + (-3) + (+6).$

91. Să se schimbe ordinea termenilor și apoi să se calculeze sumele :

- a) $(-3) + (+5) + (+3);$ c) $(-8) + (+9) + (+8);$
 b) $(-7) + (+8) + (+7);$ d) $(-3) + (+4) + (+3) + (-4).$

92. Scrieți fiecare din numerele : $+10, -14, +9$ ca sumă a două numere întregi de același semn.

93. După ce se vor calcula sumele, să se scrie opusele lor

- a) $(+5) + (-3);$ c) $(-12) + (-30);$ e) $(-30) + (+16).$
 b) $(-5) + (+20);$ d) $(+14) + (-30).$

94. Să se scrie opusul numărului x , dacă :

$$x \in \{-3, -2, +1, -6, +4\}.$$

95. Să se scrie elementele mulțimii $A = \{x \mid -12 < x < -8\}$ ca sume de câte trei numere întregi de același semn.

96. Să se rezolve ecuațiile :

- a) $x - (+3) = +5;$ c) $x + (+3) = -4;$
 b) $(-3) - x = -15;$ d) $(+5) + x = -9.$

97. Să se calculeze sumele :

a) $(3 - 7 + 12) + (-20 + 8) + (5 - 3 - 11)$;

b) $(-30 + 25 - 15) - (+20 - 15 + 3)$;

c) $(-15 + 20 + 10) - (10 + 13 - 5)$;

d) $(-3 + 5 - 4) - (-3 - 2 + 1)$.

98. Să se găsească elementele mulțimii :

$$A = \{(x; y) | x - y = 7; x, y \in \mathbb{Z}, -1 < x < 5\}.$$

99. Să se verifice inegalitățile :

$$|(-3) - (+8)| > |-3| - |+8|;$$

$$|(+18) - (+5)| \geq |+18| - |+5|.$$

100. Să se calculeze opusele sumelor :

a) $(-5) + (-3)$; b) $(-5) + (-20)$; c) $(-12) + (-30)$.

101. Să se rezolve ecuațiile :

a) $x + (-4) = -5$; c) $(-4) - x + (-6) = -8$;

b) $(+5) - x + (-6) = -11$; d) $(-8) - (-6) + x = -1$.

102. Să se calculeze : $x = a - (b + c)$, dacă :

a) $a = -3$, $b = -1$, $c = +3$;

b) $a = -6$, $b = -8$, $c = -1$;

c) $a = +4$, $b = +1$, $c = -1$.

103. Să se calculeze :

a) $-8 - [(-3) + (+7)] - (-3 - 8 + 11)$;

b) $12 - [10 - 3 - (+9) + (-2) - 9] + 8$.

104. În exercițiile care urmează, alegeți și scrieți în pătrățel unul din semnele : $<$, $>$ sau $=$, astfel încât propozițiile obținute să fie adevărate

$$(-7) - (-4) \square (-3) - (-2);$$

$$(-8) - (-6) \square (-6) - (-6).$$

105. Dimineața termometrul arată 5° . La amiază temperatura a urcat la 6° , iar spre seară a scăzut cu 2° , dimineața următoare

scăzînd din nou cu 8° . Ce temperatură arată termometrul în dimineata următoare?

106. Într-o clasă erau 46 elevi. Într-o zi au venit în clasă 4 elevi, iar în altă zi au plecat 6 elevi. Cîți elevi sînt acum în clasă?

107. Într-un pachet erau 50 caiete, iar în al doilea erau cu m caiete mai mult decît în primul. Să se afle m dacă al doilea pachet are 80 caiete.

108. Să se verifice egalitatea : $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$, dacă

a) $a = -1, b = -1, c = +7$; b) $a = -5, b = -8, c = +2$.

109. Să se efectueze înmulțirile :

a) $(-8) \cdot (+14) \cdot (+25)$;

b) $(-16) \cdot (-8) \cdot (-625)$;

c) $(-5) \cdot (-13) \cdot (+2)$.

110. Să se verifice egalitatea : $(-3)a = -(3a)$, cînd a este unul din numerele :

a) $a = -4$; b) $a = -3$; c) $a = 6$.

111. Să se verifice egalitatea : $-(a \cdot b) = (-a) \cdot b$, cînd :

1) $a = -2, b = -13$; 2) $a = -6, b = -4$.

112. Să se verifice egalitatea $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$, a și b fiind următoarele numere întregi :

1) $a = 5, b = 6$; 2) $a = -3, b = -2$; 3) $a = -1, b = -2$.

113. Să se verifice egalitatea :

$-m(a + b + c) = -ma - mb - mc$, dacă :

a) $m = 3, a = 4, b = -5, c = 6$; b) $m = -4, a = -3, b = 2, c = 1$.

114. Folosiți distributivitatea înmulțirii față de diferență și

explicați următoarele egalități :

$$(+4) \cdot 0 = 0; \quad (-5) \cdot 0 = 0; \quad (-6) \cdot 0 = 0.$$

Indicație : Se va scrie numărul zero ca diferență a două numere.

115. Verificați dacă sînt adevărate inegalitățile :

$$(-8) \cdot (-2) < (-3) \cdot (-7); \quad (-9) \cdot (+2) < (-4) \cdot (+4).$$

116. Calculați produsul $a \cdot b$ cînd a și b sînt numere cuprinse în tabelele de mai jos :

a	b	ab
-1	4	
-5	+6	
-8	-4	
-6	+3	

a	b	ab
-3	-2	
-5	-4	
+3	-9	
+6	-5	

117. Să se verifice egalitățile : $(-4a) : a = -4$, dacă :

a) $a = -8$; b) $a = -4$; c) $a = -6$.

118. Să se calculeze :

$$\begin{aligned} & -3 \cdot (-4) + (-5) + 3(+24); \\ & -16 : (-3 + 4) - 2(-6 - 5); \\ & -16 : (+4) + 20 : (-4); \\ & (-18) : (-3) + (-15) : (-5); \\ & (-18) : (3 - 5) + (-4) : (-4); \\ & (-4) \cdot (-15) : (-5) + (-18) : (-9). \end{aligned}$$

119. Să se scrie ca un produs următoarele sume :

$$-5a + 8a - 9a; \quad -ma + mb - mc.$$

120. Să se scrie ca un produs suma :

$$-2x + 6x - 3x,$$

și apoi să se scrie sub formă mai simplă.

121. Să se calculeze :

$$(-625) : (+25); \quad (-180) : (+20);$$

$$(-64) : (+16);$$

$$(-6 \cdot 615) : (-63);$$

$$(-26\,460) : (-105);$$

$$(+10 \cdot 605) : (-101);$$

$$(+19\,695) : (-101);$$

$$(+43 \cdot 290) : (-222);$$

$$(-120) : (+12);$$

$$(+9\,975) : (-105);$$

$$(-31\,815) : (-105).$$

122. Să se rezolve ecuațiile :

$$x \cdot (-4) = +16; x : (-7) = -56; x : (-3) = 63. (x \in \mathbb{Z}).$$

123. Să se determine numerele întregi x care verifică dubla inegalitate : $(-4) \cdot (+5) < x < 1$.

Capitolul 4

NUMERE RAȚIONALE

4.1. FRAȚII ECHIVALENTE

Să luăm pe axa numerelor segmentul \overline{OA} cu originea în punctul O și extremitatea în punctul A , astfel încât $\overline{OA} = 1$ (fig. 4.1).



Fig. 4.1

Punctele B și C împart segmentul \overline{OA} în trei părți egale : $\overline{OB} = \overline{BC} = \overline{CA}$. Punctelor B și C le corespund fracțiile $\frac{1}{3}$ și $\frac{2}{3}$.

Numitorul fiecărei fracții arată în câte părți egale a fost împărțit segmentul unitate. Numărătorul arată câte puncte de diviziune s-au numărat de la O spre dreapta (fig. 4.2).



Fig. 4.2

Să împărțim acum segmentul OA în 6 părți egale. Punctelor B și C le corespund fracțiile $\frac{2}{6}$ și $\frac{4}{6}$ (fig. 4.3).

Fracțiile care indică același punct pe axă și care caracterizează

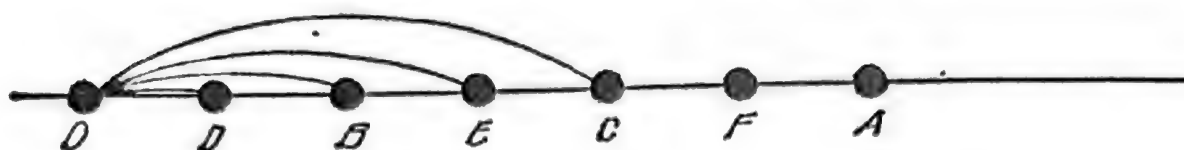


Fig. 4.3

o aceeași mărime se numesc echivalente.

Se scrie $\frac{1}{3} \sim \frac{2}{6}$ și se citește : fracția $\frac{1}{3}$ este echivalentă cu fracția $\frac{2}{6}$. În mod asemănător $\frac{2}{3} \sim \frac{4}{6}$.

Observație Pentru a simplifica tehnica de calcul cu numere raționale, se folosește în locul semnului \sim (echivalența) semnul „=”.

În același mod se stabilesc echivalențele (fig. 4.4) :

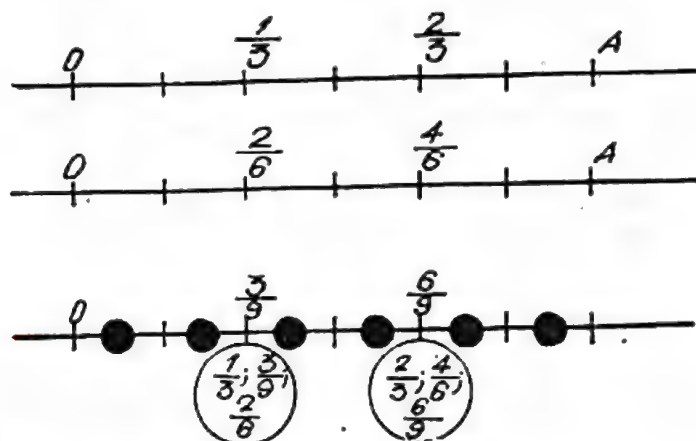


Fig. 4.4

$$\frac{1}{3} \sim \frac{2}{6} \sim \frac{3}{9}$$

$$\frac{2}{3} \sim \frac{4}{6} \sim \frac{6}{9}$$

Procedeul de a stabili dacă două fracții sînt echivalente prin reprezentarea lor pe o axă devine incomod în cazul cînd numitorul și numărătorul fracțiilor sînt numere foarte mari. În general două fracții $\frac{a}{b}$ și $\frac{c}{d}$ sînt echivalente dacă $ad = bc$.

Exemplu :

$$\frac{-3}{+7} \sim \frac{+18}{-42} \text{ deoarece : } (-3) \cdot (-42) = (+7) \cdot (+18); 126 = 126.$$

4.2. AMPLIFICAREA ȘI SIMPLIFICAREA FRAȚIILOR

Dacă înmulțim numărătorul și numitorul unei fracții cu același număr diferit de zero se obține o fracție echivalentă cu prima :

$$\frac{a}{b} \sim \frac{am}{bm} \text{ deoarece } a(bm) = b(am); abm = abm.$$

Exemplu :

Să amplificăm fracția $\frac{-4}{+5}$ cu numărul -4 și obținem $\frac{16}{-20}$.

$$\text{Avem : } \frac{-4}{5} \sim \frac{16}{-20} \text{ deoarece : } (-4)(-20) = 5 \cdot 16.$$

Dacă împărțim și numărătorul și numitorul unei fracții cu un același număr diferit de zero se obține o fracție echivalentă cu ea :

$$\frac{a}{b} \sim \frac{a:m}{b:m}; a(b:m) = b(a:m).$$

Exemplu :

Să se simplifice fracția $\frac{6}{-4}$ cu numărul 2. Se obține :

$$\frac{6:2}{-4:2} = \frac{3}{-2}. \text{ Avem : } \frac{6}{-4} \sim \frac{3}{-2}; 6(-2) = (-4)(3).$$

4.3. NUMERE RAȚIONALE

Toate fracțiile echivalente cu o fracție dată $\frac{a}{b}$ alcătuiesc o mulțime, numită clasa fracțiilor echivalente cu $\frac{a}{b}$.

O clasă de fracții echivalente cu fracția $\frac{a}{b}$ se numește număr rațional.

Numărul rațional se notează cu oricare din fracțiile care aparțin clasei.

Numărul rațional: $\left\{ \frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{-1}{-2}, \frac{3}{6}, \frac{-3}{-6}, \dots \right\}$ se poate nota cu $\frac{1}{2}$ sau $\frac{2}{4}$ sau $\frac{-1}{-2}$ ș.a.m.d.

Un număr rațional este pozitiv dacă numărătorul și numitorul fracției cu care este scris numărul rațional sînt de același semn. Un număr rațional este negativ dacă numărătorul și numitorul fracției cu care este scris numărul sînt de semne diferite.

Două numere raționale $\frac{a}{b}$ și $\frac{c}{d}$ sînt egale, dacă fracțiile cu care sînt scrise numerele sînt echivalente, adică dacă $a \cdot d = b \cdot c$. Numerele raționale formează o mulțime numită mulțimea numerelor raționale. Această mulțime se notează cu litera Q . Orice număr întreg poate fi scris ca un număr rațional care se notează cu o fracție cu numitorul 1.

$$+3 \cong \left\{ \dots, \frac{-9}{-3}, \frac{-6}{-2}, \frac{-3}{-1}, \frac{3}{1}, \frac{6}{2}, \dots \right\}.$$

$$-6 \cong \left\{ \dots, \frac{-12}{2}, \frac{-6}{1}, \frac{6}{-1}, \frac{12}{-2}, \frac{18}{-3}, \dots \right\}.$$

Numărul întreg a este:

$$a \cong \left\{ \dots, \frac{-2a}{-2}, \frac{-a}{-1}, \frac{a}{1}, \frac{2a}{2}, \frac{3a}{3}, \dots \right\}.$$

4.4. REPREZENTAREA PE O DREAPTĂ A NUMERELOR RAȚIONALE

Să se reprezinte pe axă numărul $\frac{5}{3}$. Pentru aceasta fixăm originea și alegem segmentul unitate (fig. 4.5).



Fig. 4.5

Luăm un segment egal cu $\frac{1}{3}$ din segmentul unitate și îl purtăm spre dreapta, începînd din origine, de 5 ori; extremitatea din dreapta a ultimului segment ne dă punctul corespunzător numărului $\frac{5}{3}$ (fig. 4.6).

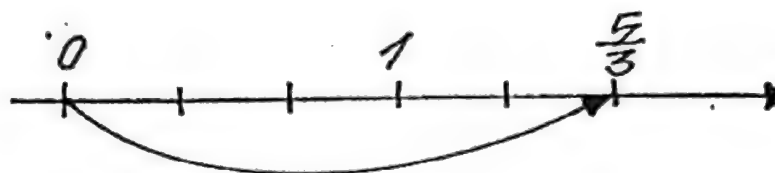


Fig. 4.6

Să se reprezinte pe axă $-\frac{5}{3}$. Pentru a găsi punctul care corespunde lui $-\frac{5}{3}$ purtăm, de 5 ori, spre stînga, începînd din origine, segmentul egal cu $\frac{1}{3}$ din segmentul unitate; extremitatea din stînga ultimului segment reprezintă punctul ce corespunde numărului $-\frac{5}{3}$ (fig. 4.7).

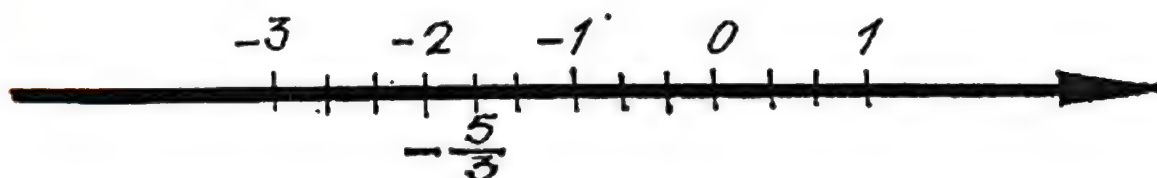


Fig. 4.7

4.5. ADUNAREA NUMERELOR RAȚIONALE

Exemplul 1

Să se reprezinte pe axă punctele A și B în următoarele condiții :

- 1) deplasarea de la O la A să fie egală cu $+\frac{3}{5}$;
- 2) deplasarea de la A la B să fie egală cu $+\frac{4}{5}$.

3) Atunci, deplasarea de la O la B este egală cu $+\frac{7}{5}$ (fig. 4.8).

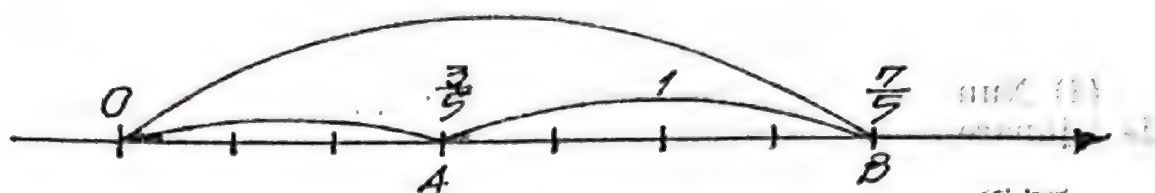


Fig. 4.8

Deci, putem scrie :

$$\left(+\frac{3}{5}\right) + \left(+\frac{4}{5}\right) = \frac{(+3) + (+4)}{5} = +\frac{7}{5}$$

Exemplul 2

Să se reprezinte pe axă punctele M și P în următoarele condiții :

- 1) deplasarea de la O la M să fie egală cu $-\frac{4}{7}$;
- 2) deplasarea de la M la P să fie egală cu $-\frac{6}{7}$;
- 3) Atunci, deplasarea de la O la P este egală cu $-\frac{10}{7}$ (fig. 4.9).



Fig. 4.9

Dacă două numere raționale sînt scrise cu fracții care nu au numitori egali, atunci înlocuim aceste fracții cu fracții echivalente, dar care au numitori egali (le aducem la același numitor).

4.6. PROPRIETĂȚILE OPERAȚIEI DE ADUNARE ÎN Q

(1) Operația de adunare în Q este comutativă. Oricare ar fi $x \in Q$ și $y \in Q$, avem :

$$x + y = y + x.$$

(2) Operația de adunare în Q este asociativă. Oricare ar fi $x \in Q, y \in Q, t \in Q$, avem :

$$(x + y) + t = x + (y + t).$$

(3) Numărul întreg zero este element neutru pentru operația de adunare în Q , adică oricare ar fi $x \in Q$,

$$x + 0 = x.$$

Propoziția „numărul rațional y este un număr negativ” se scrie : $y < 0$.

Propoziția „numărul rațional x este un număr pozitiv” se scrie : $x > 0$.

Orice număr negativ este mai mic decât orice număr pozitiv.

4.7. PARTEA ÎNTREAGĂ A UNUI NUMĂR RAȚIONAL

Partea întreagă a unui număr rațional este cel mai mare număr întreg, mai mic sau egal cu numărul rațional dat.

Partea întreagă a numărului $\frac{8}{3}$ o stabilim astfel : punctul corespunzător numărului $\frac{8}{3}$ se găsește reprezentat între punctele corespunzătoare numerelor întregi consecutive 2 și 3. Partea lui întreagă este 2.

Partea întreagă a numărului $\frac{8}{3}$ se notează $\left[\frac{8}{3} \right]$. Se citește „partea întreagă a numărului $\frac{8}{3}$ ”.

4.8. PARTEA FRAȚIONARĂ A UNUI NUMĂR RAȚIONAL

Diferența dintre un număr rațional x și partea sa întreagă se numește *partea fracționară* a numărului.

Prin urmare $x - [x]$ este partea fracționară a numărului x .
Exemplu :

$$\left[\frac{7}{3} \right] = 2$$

$$\frac{7}{3} - \left[\frac{7}{3} \right] = \frac{7}{3} - 2 = \frac{7-6}{3} = \frac{1}{3}$$

Prin urmare partea fracționară a lui $\frac{7}{3}$ este $\frac{1}{3}$.

4.9. ÎNMULȚIREA NUMERELOR RAȚIONALE

Produsul a două numere raționale $x = \frac{a}{b}$ și $y = \frac{c}{d}$ ($b \neq 0$, $d \neq 0$) este numărul rațional $xy = \frac{ac}{bd}$.

4.10. PROPRIETĂȚILE ÎNMULȚIRII

1) Înmulțirea numerelor naturale este comutativă, oricare ar fi numerele raționale x și y , avem: $x \cdot y = y \cdot x$.

2) Înmulțirea în Q este asociativă, oricare ar fi numerele raționale x, y, t , avem:

$$(x \cdot y) \cdot t = x \cdot (y \cdot t)$$

Datorită proprietăților de asociativitate și comutativitate produsele $(x \cdot y) \cdot t$ și $x \cdot (y \cdot t)$ se pot scrie $x \cdot y \cdot t$, adică fără paranteze.

3) Numărul rațional unu este element neutru pentru operația de înmulțire în Q , adică oricare ar fi $x \in Q$, $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$.

4) Oricare ar fi numărul rațional $\frac{a}{b} \neq 0$ ($b \neq 0$) există un număr rațional $\frac{b}{a}$ numit inversul lui $\frac{a}{b}$ astfel că $\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1$.

Inversul numărului rațional $x \neq 0$ se notează $\frac{1}{x}$.

Observație: Dintre mulțimile N, Z, Q numai mulțimea Q posedă element invers pentru oricare element diferit de zero în raport cu operația de înmulțire.

5) Înmulțirea este distributivă față de adunare, respectiv scădere, adică oricare ar fi $x, y, z \in Q$, avem :

$$x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$$

respectiv :

$$x \cdot (y - z) = (x \cdot y) - (x \cdot z).$$

4.11. ECUAȚII ÎN Q

1) Să se rezolve ecuația : $ax = b$, unde a și $b \in Q$ și $a \neq 0$.
Înmulțim ambii membri cu $\frac{1}{a}$ (inversul lui a) :

$$\frac{1}{a} \cdot ax = \frac{1}{a} \cdot b; 1 \cdot x = \frac{b}{a}; x = \frac{b}{a}.$$

Verificare : $a \cdot \frac{b}{a} = \frac{ab}{a} = b.$

Deci soluția ecuației este : $x = \frac{b}{a}.$

În cazul ecuației $ax = b$ ($a \in Q, b \in Q, a \neq 0$), în loc să înmulțim ambii membri cu inversul lui a , putem spune că împărțim ambii membri cu a .

Concluzie :

1) Dacă $a \neq 0$, ecuația $ax = b$ are ca soluție $x = \frac{b}{a}$. Ea este o ecuație *determinată*.

2) Dacă $a = 0$ și $b = 0$ atunci ecuația $0 \cdot x = 0$ admite ca soluție orice $x \in Q$. Ea este o ecuație *nedeterminată*.

3) Dacă $a = 0$ și $b \neq 0$ ecuația $0 \cdot x = b$ nu are nici o soluție. Ea este o ecuație *imposibilă*.

4.12. FRAȚII ZECIMALE

Fracțiile care au numitori o putere oarecare a lui 10, ca de exemplu : $\frac{7}{10}, \frac{3}{100}, \frac{273}{1000}, \frac{13}{10^8}$, se numesc *fracții zecimale*.

Pentru scrierea fracțiilor s-au folosit două numere întregi. Pentru fracțiile zecimale se folosește și o scriere pozițională, ca de exemplu :

$$\frac{7}{10} \text{ se mai scrie } 0,7 \text{ sau } \frac{7}{10} = 0,7 ;$$

$$\frac{3}{100} = 0,03 ; \quad \frac{273}{1000} = 0,273 ; \quad \frac{563}{10} = 56,3 ; \quad \frac{28546}{1000} = 28,546.$$

Reținem că orice fracție zecimală poate fi scrisă în două moduri :

a) cu ajutorul liniei de fracție ;

b) pozițional, folosind virgula.

Pentru a scrie pozițional o fracție zecimală, procedăm astfel : scriem numărătorul fracției și despărțim, începînd din dreapta spre stînga, atîtea cifre cîte zerouri are numitorul ; dacă numărătorul nu are suficiente cifre, atunci adăugăm zerouri spre stînga, pînă cînd obținem numărul de cifre necesar, după care punem virgula, iar în stînga virgulei scriem încă un zero.

Exemplu

$$\frac{78}{10} = 7,8 ; \quad \frac{543}{10} = 54,3 ; \quad \frac{543}{100} = 5,43 ; \quad \frac{74}{100} = 0,74 ;$$

$$\frac{74}{1000} = 0,074 ; \quad \frac{74}{10000} = 0,0074.$$

Scriem aceste fracții zecimale și cu ajutorul liniei de fracție :

$$7,8 = \frac{78}{10} ; \quad 54,3 = \frac{543}{10} ; \quad 5,43 = \frac{543}{100} .$$

Puterea unui număr rațional

Prin scrierea prescurtată x^n ; $x \in Q$, $n \in N$, se înțelege produsul în care factorul x se repetă de cîte ori arată numărul natural n :

$$x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot x \dots x}_{n \text{ ori.}}$$

Proprietăți

Fie $x \in Q$; $m, n \in N$

a) $x^m \cdot x^n = x^{m+n}$;

b) $x^m : x^n = x^{m-n}$;

c) $(x^m)^n = x^{mn}$;

d) $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$.

Exemplu :

$$\left(-\frac{4}{1}\right)^{-3} = \left(-\frac{1}{4}\right)^3 = -\frac{1}{4^3}$$

4.13. EXERCITII ȘI PROBLEME

1. Să se stabilească dacă următoarele propoziții sînt adevărate sau false :

a) $-\frac{3}{2} \sim -\frac{6}{4}$; b) $-\frac{3}{2} \sim \frac{6}{-4}$; c) $\frac{-5}{-4} \sim \frac{-10}{-8}$.

2. Să se stabilească dacă următoarele propoziții sînt adevărate sau false :

a) $\frac{-6}{+2} \sim \frac{-16}{8}$; b) $\frac{-3\,250}{16} \sim \frac{-4\,800}{24}$.

3. Folosind amplificarea să se scrie șase fracții echivalente respectiv cu fracțiile : $\frac{-1}{-3}$, $\frac{-4}{5}$, $\frac{-4}{-3}$.

4. Să se scrie fracțiile echivalente cu fracția $\frac{-7}{6}$ astfel ca să aibă numitorii : a) 12 ; b) -18 ; c) 30.

5. Să se scrie fracțiile echivalente cu fracția $\frac{5}{-3}$ care să aibă numitorii :

a) 6 ; b) -15 ; c) 27.

6. Se dau fracțiile : $\frac{2}{3}$, $\frac{-3}{4}$, $\frac{1}{6}$. Scrieți fracțiile echivalente cu acestea, astfel ca ele să aibă numitorii :

a) 12 ; b) -60 ; c) $12x$, ($x \in \mathbb{Z}$, $x \neq 0$).

7. Se dau fracțiile zecimale 0,2 ; -2,56 ; 31,23 ; -0,42.
Să se înmulțească cu 10, 10^2 , 10^3 , 10^4 .

8. Să se găsească $x \in \mathbb{Z}$ astfel ca : $\frac{8}{6} \sim \frac{4}{x}$.

9. Să se găsească $x \in \mathbb{Z}$ astfel ca : $\frac{x}{-4} \sim \frac{1}{2}$.

Simplificarea

10. Să se verifice dacă următoarele propoziții sînt adevărate :

$$a) \frac{-256}{-192} \sim \frac{4}{3} ; \quad b) \frac{52}{28} \sim \frac{13}{7} ; \quad c) \frac{-24}{-18} \sim \frac{4}{3} ;$$

$$d) \frac{6\,000}{8\,000} \sim \frac{3}{4} ; \quad e) \frac{-10\,500}{8\,400} \sim \frac{-5}{4} ; \quad f) \frac{-3\,564}{2\,592} \sim \frac{11}{8} .$$

Scrieți cu ce numere au fost simplificate primele fracții ca să obținem fracțiile din membrul doi.

11. Să se scrie mulțimea tuturor fracțiilor echivalente cu fracția $\frac{-24}{18}$, folosind simplificarea.

12. Să se scrie fracțiile ireductibile echivalente cu următoarele fracții :

$$\frac{6}{9}, \quad \frac{-5}{15}, \quad \frac{25}{-20}, \quad \frac{360}{480}, \quad \frac{87}{116} .$$

13. Se dau fracțiile $\frac{-24}{16}$ și $\frac{27}{24}$. Să se scrie fracțiile echivalente cu acestea care să aibă numitori egali, folosind simplificarea.

14. Să se simplifice fracțiile:

$$\frac{528}{256}, \frac{-840}{-540}, \frac{-555}{135}, \frac{5145}{888}, \frac{7 \cdot 3 \cdot 9}{1 \cdot 7 \cdot 2}, \frac{2 \cdot 5 \cdot 7}{2},$$

$$\frac{19 \cdot 8 \cdot 3 \cdot 11}{22 \cdot 4 \cdot 20}, \frac{-15 \cdot 6 \cdot 13}{26 \cdot 18 \cdot 25}, \frac{-22 \cdot (-56) \cdot 24}{18 \cdot 28 \cdot 18},$$

$$\frac{52 \cdot 15 \cdot 29}{26 \cdot (-58)}, \frac{14 \cdot (-25) \cdot (-21) \cdot 42}{56 \cdot (-75) \cdot (42) \cdot 49}.$$

15. Să se scrie o fracție care are ca numitor c.m.m.d.c. al numerelor 28, -49, 98.

16. Determinați de fiecare dată numărul $a \in \mathbb{Z}$ astfel ca următoarele propoziții să fie adevărate:

$$a) \frac{a+1}{5} = -\frac{3}{1}; \quad b) \frac{a+1}{11} = +\frac{7}{1}; \quad c) \frac{a-4}{3} = -\frac{6}{1};$$

$$d) \frac{8+3}{4} = \frac{a+2}{5}; \quad e) \frac{2a+4}{4} = \frac{3a+6}{6};$$

$$f) \frac{3a+5}{2} = \frac{7a+4}{5}.$$

17. Se dau mulțimile $A = \{-1, 2, -3\}$, $B = \{+3, -4\}$. Să se scrie mulțimea:

$$C = \left\{ x = \frac{a}{b} \mid a \in A \text{ și } b \in B \right\}.$$

18. Se dă mulțimea $C = \{+2; 4; 3,24; +0,25; -0,125; 0,8; -0,56; -0,375; -4,25; +0,75\}$. Să se scrie elementele mulțimii C cu reprezentanți fracții ireductibile.

19. Se dă numărul $\frac{4}{a}$ cu $a \in \mathbb{Z}$ și $a \neq 0$. Să se determine a astfel ca numărul să fie întreg.

20. Se dă numărul $\frac{5}{a+3}$ cu $a \in N$. Să se determine a , astfel ca numărul să fie întreg.

21. Să se calculeze :

$$a) +\frac{3}{4} + \frac{1}{4};$$

$$-\frac{2}{8} + \left(-\frac{1}{8}\right);$$

$$-\frac{12}{20} + \frac{10}{20};$$

$$-\frac{15}{17} + \left(+\frac{11}{17}\right).$$

$$22. a) \frac{\frac{7}{9} + \frac{7}{12}}{\frac{7}{9} - \frac{7}{12}} - \frac{\frac{7}{9} - \frac{7}{12}}{\frac{7}{9} + \frac{7}{12}};$$

$$b) \left(\frac{5}{18} \cdot \frac{12}{25} \cdot \frac{3}{4}\right) : \left(\frac{57}{256} \cdot \frac{64}{171} \cdot 2\frac{2}{15} \cdot 2\frac{1}{4} \cdot \frac{5}{8}\right);$$

$$c) \left(18\frac{1}{5} : 15 + 8\frac{2}{3} \cdot \frac{7}{2}\right) : \left[\left(12\frac{1}{3} + 8\frac{6}{7}\right) \cdot \frac{7}{18}\right];$$

$$d) \frac{\frac{27}{8} : \frac{3}{2}}{\frac{35}{12} : \frac{7}{8}} : 1\frac{2}{3};$$

$$e) \frac{8 : 2\frac{2}{5}}{5\frac{1}{4} : 7} : \frac{2\frac{1}{7} : \frac{5}{7}}{4 : \frac{8}{9}}.$$

$$23. a) 15\frac{7}{13} + 4\frac{8}{15} + 6\frac{6}{13}; \quad b) 3\frac{4}{15} + \left(11\frac{11}{15} + 6\frac{6}{9}\right);$$

$$c) 4\frac{11}{12} + \left(7\frac{23}{64} - 2\frac{5}{12}\right);$$

$$d) \left(10 \frac{5}{7} + 15 \frac{10}{21} + 20 \frac{5}{28} \right) : 5;$$

$$e) \left(2 \frac{1}{4} + 1 \frac{1}{12} \div \frac{3}{8} \right) \times 24;$$

$$f) 20 \frac{13}{25} - \left(11 \frac{3}{25} + 5 \frac{1}{10} \right);$$

$$g) 33 \frac{31}{32} - \left(14 \frac{15}{32} - 8 \frac{1}{2} \right); \quad h) \left(3 \frac{1}{3} - 2 \frac{6}{7} \right) : 10;$$

$$i) \left(4 \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{5}{9} \right) : 1 \frac{1}{2};$$

$$j) 14 \frac{2}{5} : \left(\frac{3}{10} \cdot 2 \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{9} \right).$$

Să se rezolve ecuațiile:

$$24. \quad a) 12 \frac{1}{3}, \left\{ \left[2 \frac{3}{4} : \left(3 \frac{1}{3} - 1 \frac{7}{8} \cdot x \right) \right] \cdot \frac{8}{11} + 1 \frac{2}{3} \right\} = 5;$$

$$b) \left\{ \left[10 \frac{17}{40} - \left(12 \frac{1}{2} - x \right) \right] + 6 \frac{47}{60} \right\} : 22 \frac{11}{36} = \frac{15}{22};$$

$$c) \left\{ \frac{5 \frac{5}{8} : \left[\left(2 \frac{11}{15} - x \right) \cdot 2 \frac{1}{2} - \frac{7}{12} \right]}{5 \frac{2}{5}} \right\} : 9 \frac{7}{27} = \frac{1}{5}.$$

Să se calculeze:

$$25. \quad a) 3 \frac{7}{24} + \left(5 \frac{5}{7} \cdot \frac{3}{8} + 5 \frac{1}{4} : 2 \frac{1}{3} \right) : 3;$$

$$b) 10 \frac{2}{21} + \left(7 \frac{1}{2} \cdot 2 \frac{2}{3} - 12 \frac{1}{4} : \frac{7}{9} \right) : 6.$$

$$26. \ a) \ 48 : 6 \frac{2}{5} - \left(18 : 5 \frac{2}{5} + \frac{2}{3} \right) \cdot \frac{2}{3} ;$$

$$b) \ 1 \frac{1}{22} \cdot 3 \frac{2}{3} - \left(3 \frac{5}{6} : 3 \frac{2}{7} + 2 \frac{5}{6} \right) : 1 \frac{2}{3} ;$$

$$c) \ \left(13 \frac{2}{7} : 6 \frac{1}{5} - \frac{5}{6} : \frac{3}{4} \right) : \left(41 \frac{4}{21} - 32 \frac{1}{2} \times 1 \frac{113}{455} \right).$$

$$27. \ a) \ 100 \frac{17}{36} + \left[22 \frac{1}{72} + \left(15 \frac{3}{4} - 8 \frac{1}{8} - 7 \frac{1}{2} \right) \right];$$

$$b) \ \frac{5}{26} \cdot 24 - \frac{3}{8} - 12 + \frac{7}{9} \cdot 15;$$

$$c) \ \frac{1}{\left(1 : \frac{2}{3} - 1 : 2 \frac{3}{5} \right) \cdot \frac{13}{29}}.$$

$$28. \ a) \ \left[\frac{\left(3 \frac{2}{3} + 1 \frac{4}{7} \right) \cdot \left(13 \frac{1}{3} - 3 \frac{1}{13} \right)}{\left(3 \frac{2}{3} - 1 \frac{4}{7} \right) \cdot \left(13 \frac{1}{3} + 3 \frac{1}{13} \right)} \right];$$

$$: \frac{5 \frac{1}{2} + 1 \frac{3}{8}}{\left(5 \frac{1}{2} - 1 \frac{2}{8} \right) : \frac{2}{3}};$$

$$b) \ \left[83 - \left(2 \frac{1}{2} \cdot 7 + 12 : 5 \right) \right];$$

$$: \left[\left(6 \frac{7}{12} + 9 \frac{3}{8} \right) \cdot 4 \frac{4}{5} - 55 \frac{17}{30} \right];$$

$$c) 56 \frac{23}{40} : \left[\left(3 \frac{2}{3} \cdot 4 + 8 \frac{1}{4} \cdot 5 \frac{2}{5} \right) - \right. \\ \left. - \left(7 : \frac{14}{23} + 12 \frac{1}{2} : 1 \frac{1}{4} \right) \right].$$

$$29. a) \left[\left(\frac{40}{63} - \frac{8}{21} \right) : 20 + \left(5 \frac{5}{9} - \frac{7}{18} \right) : \right. \\ \left. : 35 - \left(\frac{83}{90} - \frac{41}{50} \right) : 2 \right] \cdot 21;$$

$$b) \left[\left(7 - 4 \frac{13}{16} \right) : 4 \frac{1}{4} + \left(13 \frac{1}{3} - 7 \frac{5}{6} \right) : \right. \\ \left. : 2 \frac{1}{5} - 6 \frac{5}{6} : 2 \frac{19}{33} \right] \cdot 5 \frac{2}{3}.$$

$$30. a) \left[\left(1 - \frac{1}{11} \right) + \left(\frac{1}{11} - \frac{1}{21} \right) + \left(\frac{1}{21} - \frac{1}{31} \right) + \right. \\ \left. + \left(\frac{1}{31} - \frac{1}{41} \right) + \left(\frac{1}{41} - \frac{1}{51} \right) \right] : \frac{15}{17};$$

$$b) \left[\left(3 \frac{2}{5} - \frac{10 - \frac{1}{4}}{3} \right) \cdot 1 \frac{3}{5} - \frac{\frac{1}{7} + \frac{1}{2}}{11 \frac{65}{77} + \frac{2}{33}} \right] \cdot 1 \frac{2}{3} : 15 \frac{1}{2};$$

$$c) \left[\frac{\left(37 \frac{2}{5} - 18 \frac{6}{7} \right) \cdot 11 \frac{2}{3}}{13 \frac{4}{9} - 11 \frac{11}{18}} - \right.$$

$$- \frac{\left(2 \frac{3}{20} - \frac{11}{30}\right) \cdot \frac{6}{7}}{\left(1 \frac{3}{100} - \frac{17}{20}\right) : 6 \frac{3}{10}} \Bigg] : 21 \frac{1}{2}.$$

31. Să se afle x :

$$a) 12 - \left[30 - 19 \frac{1}{2} : \left(2 \frac{3}{4} - \frac{3}{5} x \right) \right] \cdot \frac{23}{55} + 10 = 13;$$

$$b) \left\{ \left(\frac{\frac{3}{10}x + 2 \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3}}{\frac{4}{7}} + 5 \frac{5}{8} \right) : \frac{219}{12} \right\} : \frac{5}{2} = \frac{1}{5};$$

$$c) 1 \frac{7}{10} : \frac{\left(1 \frac{2}{3}x + 3 \frac{3}{4}\right) \cdot \frac{8}{135}}{\frac{5}{9}} = 1 \frac{5}{12}.$$

$$32. a) \left[2 \frac{7}{36} - \left(\frac{\frac{47}{72}}{3 \frac{1}{3} - x} + \frac{20}{27} \right) + 1 \frac{19}{72} \right] :$$

$$\cdot \frac{44}{75} - 1 \frac{3}{10} = \frac{1}{6};$$

$$b) \left[6 \frac{1}{5} + \frac{57}{16} : \left(\frac{2 \frac{3}{4}}{3 \frac{1}{3}x - 45} - \frac{7}{24} \right) \right] \cdot$$

$$\cdot \frac{3}{38} = 1 \frac{1}{5}.$$

33. Să se calculeze :

$$a) \left\{ \left(-\frac{2}{3} + \frac{3}{5} \right)^2 : \left(\frac{5}{5} - \frac{1}{2} \right)^2 \right\}.$$

$$\cdot \left\{ \left(-\frac{3}{2} - \frac{5}{3} \right) : \left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) \right\}.$$

$$34. \left\{ \left(-\frac{1}{2} \right)^2 \left(-2 + \frac{5}{4} \right) \right\} : \left\{ \left(-\frac{2}{3} - \frac{1}{6} \right) : \left(1 + \frac{1}{2} \right)^2 \right\} + \\ + \left\{ \left(1 - \frac{1}{3} \right) : \left(\frac{1}{3} - 1 \right) \right\}.$$

$$35. \left(\frac{\frac{5}{4} \cdot 3 - \frac{4}{3}}{-4 + \frac{2}{5} - \frac{3}{2}} \right) \cdot \frac{\left(\frac{2}{7} - \frac{3}{5} \right) \left(\frac{2}{11} + 3 \right)}{\left(\frac{4}{3} - \frac{1}{2} \right) \left(\frac{4}{5} - 2 \right)}.$$

$$36. \left(\frac{\frac{8}{3} - 2 + \frac{1}{2}}{-4 + \frac{3}{4} + \frac{5}{2}} - \frac{\frac{3}{7} - \frac{2}{5} + 1}{\frac{3}{2} - \frac{4}{7} - 1} \right).$$

$$\cdot \left(\frac{-\frac{8}{3}}{\frac{5}{7} - \frac{1}{3}} + \frac{\frac{4}{9} - 2}{\frac{7}{6}} \right).$$

$$37. \left(\frac{-\frac{7}{10} + \frac{1}{3}}{\frac{11}{5}} - \frac{\frac{3}{4} + 1}{\frac{1}{6} - \frac{5}{2}} \right).$$

$$38. \left(\frac{-\frac{12}{17} + \frac{3}{4}}{-\frac{3}{2} + \frac{12}{7}} + \frac{-\frac{12}{17} + \frac{2}{3}}{-\frac{4}{3} + \frac{6}{5}} \right) : \frac{\left(-\frac{3}{4} - \frac{3}{2} + \frac{4}{5}\right) \left(-\frac{3}{4} - \frac{2}{3} - \frac{2}{5}\right)}{\left(-\frac{4}{3}\right)^2 + \left(-\frac{3}{2}\right)^2 + 4 - 4\left(-\frac{2}{5}\right)^2}$$

$$39. \left[-\frac{2}{3} - (-2) \right]^3 : \left(1 + \frac{1}{3} \right)^3 \cdot \left(-\frac{1}{5} \right)^2$$

$$\frac{\left(-\frac{2}{3}\right)^4 - 1}{\frac{4}{9} - \frac{2}{3} + 1} - \frac{\left(-\frac{2}{3}\right)^3 - 1}{\frac{13}{9}} \cdot \left(\frac{9}{25} - \frac{3}{5} + 1\right) \cdot \frac{1}{-\frac{8}{27} + 1}$$

$$40. \left[1 - 3 \cdot \frac{1}{(-2)^3 + \left(-\frac{2}{3}\right)^{-3}} \right] \cdot$$

$$\cdot \left[\left(\frac{1}{3}\right)^{-1} \cdot \frac{1}{\left(-\frac{1}{2}\right)^{-3} + \left(-\frac{3}{2}\right)^3} + 1 \right] +$$

$$+ \frac{(-2)^3 + \left(-\frac{2}{3}\right)^{-3}}{(-2)^3 - \left(-\frac{3}{2}\right)^3} - \frac{8}{3} \cdot \left[\left(-\frac{1}{3}\right)^{-1} \left(-\frac{6}{91}\right)^2 \right] \cdot \frac{1}{2}$$

41.

$$\frac{\frac{3}{4} \left(\frac{1}{5} - 2\right) \left[\frac{3}{5} (-3)^{-2} + \left(-\frac{1}{3}\right) : \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{6}\right) \right] : \left[\frac{1}{6} + \left(-\frac{9}{4}\right)^{-1} \left(\frac{1}{3}\right) \right]^{-2}}{\left[\left(\frac{1}{3}\right)^{-4} \left(-\frac{2}{3}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} \frac{5}{4} \left(\frac{5}{6}\right)^{-2} \right] : \left[\frac{1}{3} \left(\frac{5}{3}\right)^{-2} \left(\frac{1}{5}\right)^{-2} + \frac{8}{5} \right]}$$

$$42. \frac{1}{(3^2)^{-2}} + \frac{1}{(-5)^{-3}} - \left(10 : \frac{1}{(-5)^{-1}}\right)^2 + [(-2)^3]^2.$$

$$43. \frac{1}{(-2)^{-3}} \cdot (-9) \cdot \frac{1}{(-3^2)^{-3}} : \left[(-2)^3 \cdot \frac{1}{3^{-2}}\right]^2.$$

$$44. \left[\frac{1}{6^{-1}} : (2 - 3^{-1} \cdot 5^{-1} + 3^{-2} + \frac{1}{5^2} - \right. \\ \left. - \frac{(-2)^2}{9 \cdot 25} \right) \left(5^{-1} - \frac{-2}{15} + 3^{-1} \right).$$

$$45. \left[\frac{-\frac{1}{2}}{\left(-\frac{1}{2}\right)^{-1}} - \frac{-\frac{3}{4}}{\left(-\frac{3}{4}\right)^1} \right] \left[\frac{1}{\left(-\frac{1}{2}\right)^{-2}} + \frac{1}{\left(-\frac{3}{4}\right)^{-2}} \right] - \\ - \left\{ \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}} + \left(-\frac{3}{4}\right) \left[\frac{3}{\left(-\frac{1}{2}\right)^{-1}} - \frac{1}{\left(-\frac{3}{4}\right)^{-1}} \right] \right\}.$$

$$46. \left[\frac{1}{\left(-\frac{1}{2}\right)^{-2}} - \frac{-\frac{3}{4}}{\left(-\frac{4}{3}\right)^{-1}} \right].$$

$$47. \left\{ \left[\frac{2}{\left(-\frac{2}{3}\right)^{-4}} + \frac{3}{\left(-\frac{4}{3}\right)^{-3}} \right] \cdot \left[2 \left(-\frac{3}{2}\right)^{-4} - 3 \left(-\frac{5}{4}\right)^{-3} \right] \right\} ; \\ : \left\{ 4 \left[\left(-\frac{2}{3}\right)^{-4} \right]^{-2} - 9 \left[\left(-\frac{4}{5}\right)^{-2} \right]^{-3} \right\}.$$

$$48. \frac{\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} - 2^{-2}\right] \left(-\frac{7}{12} + \frac{3}{8}\right)}{\left(-\frac{7}{2}\right) \left(\frac{8}{5}\right)^{-1} \frac{5}{49} + \left(-\frac{1}{2}\right)^{-2} \left(\frac{7}{3}\right)^{-1} + 4^{-2}}.$$

$$49. \left(\frac{-\frac{12}{17} + \frac{3}{4}}{-\frac{3}{2} + \frac{12}{7}} + \frac{-\frac{12}{17} + \frac{2}{3}}{-\frac{4}{3} + \frac{6}{5}} \right) :$$

$$: \frac{\left(-\frac{3}{4} - \frac{2}{3} + \frac{4}{5}\right) \left(-\frac{3}{4} - \frac{2}{3} - \frac{2}{5}\right)}{\left(-\frac{4}{3}\right)^2 + \left(-\frac{3}{2}\right)^2 + 4 - 4 \left(-\frac{2}{5}\right)^2}.$$

$$50. \frac{-\frac{5}{4} - \frac{12}{19}}{-\frac{5}{4} + \frac{12}{19}} \left(1 - \frac{-\frac{9}{16} - \frac{25}{36} + \frac{16}{25}}{\frac{5}{4}} \right) :$$

$$: \left(\frac{\frac{16}{25}}{-\frac{1}{600}} - \frac{\frac{9}{16}}{-\frac{1}{240}} - \frac{\frac{25}{36}}{-\frac{1}{360}} \right).$$

51.

$$\frac{\frac{-\frac{3}{4}}{\left(-\frac{2}{3}\right)^3} - \frac{\left(-\frac{3}{4}\right)^2 \cdot \frac{1}{17}}{-\frac{8}{27} \left(-\frac{1}{12}\right)} + \frac{\frac{1}{34}}{\left(\frac{17}{144}\right)^2}}{\frac{\left(-\frac{9}{16}\right) \left(-\frac{1}{17}\right)}{\left(\frac{17}{144}\right)^2} - \frac{\left(-\frac{3}{4}\right) \frac{1}{17}}{\frac{17}{144} \left(-\frac{1}{12}\right)} - \frac{-\frac{3}{68}}{\frac{4}{9} \left(-\frac{1}{12}\right)}}.$$

52.

$$\frac{\left(-\frac{2}{3}\right)^3 + 1}{\left(-\frac{2}{3}\right)^3 - 1} \cdot \left(1 + \frac{-\frac{2}{3}}{\frac{13}{9}}\right) : \left(1 - \frac{-\frac{2}{3}}{\frac{13}{9}}\right) - \left(-\frac{1}{5}\right)$$

$$\frac{\left(3 : \frac{2}{5}\right)^2 \left[\frac{13}{9}\left(-\frac{3}{2}\right) + 2\right] : \left(-\frac{13}{6} - 2\right)}{\frac{-\frac{3}{2} - 17}{-\frac{17}{144}} + \frac{-\frac{1}{12}}{-\frac{3}{4}\left(-\frac{17}{12}\right)} + \frac{3}{2}}$$

53.

$$\frac{\frac{1}{17} + 17 \cdot \frac{\left(-\frac{3}{4}\right)^2 + \left(-\frac{2}{3}\right)^2}{\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{17}{144}\right)}}{-\frac{3}{4}}$$

54. $\frac{\frac{1}{6}}{\frac{8}{15} + 0,7} + \left(\frac{0,7}{-\frac{1}{6} + \frac{8}{15}} - \frac{\frac{8}{15}}{0,7 + \frac{1}{6}}\right)$

$$\left(-\frac{\frac{1}{6} + 0,7}{\frac{8}{15}} + \frac{\frac{8}{15} - \frac{1}{6}}{0,7} + \frac{0,7 + \frac{8}{15}}{\frac{1}{6}}\right).$$

55. $\frac{\frac{1}{3} - 0,4 - \frac{2}{9} - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right)}{-\left(1 - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{15}{18} - 2\right)(5 - 0,75)} :$

$$-\left(-\frac{7}{9} + 1\right) - \frac{7}{4} - \left(-\frac{2}{3} + 0,2\right)$$

$$: \frac{\left(0,375 - 5\right)(-1,2 + 1) + \left(\frac{1}{3} - 3\right)^2}{}$$

$$56. \frac{\left(0,72 - 0,9 + \frac{5}{24}\right) - \left(0,75 + \frac{11}{15}\right)}{\left(-2,5 + \frac{7}{20} + 0,8\right) : \left(-\frac{5}{9} + \frac{2}{3} - \frac{7}{18}\right)} .$$

$$\cdot \left\{ \frac{-2 - \frac{5}{4}}{1 + \frac{1}{2}} - \frac{-3 + \frac{1}{4}}{2 - \frac{3}{4}} \right\}^2 : \left\{ 6 - \left(-\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{8} \right\}^2 .$$

$$57. \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^3 - (-2)^3}{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - (-5)} - \frac{1 : \left(-\frac{2}{3}\right)^2 - 1 : \left(-\frac{3}{2}\right)^2}{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \left(-\frac{1}{2}\right)(-2)^3} + \\ + \left(2 - \frac{1}{3}\right) .$$

$$58. \frac{\left[\left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{4}\right)^2\right]^2 - \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{16}\right)^2}{\frac{1}{4} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{4}} - \\ - \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{4}\right)}{\frac{3}{2}} .$$

$$59. \left(\frac{-\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2} - 3} - \frac{-\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2} + 3} - \frac{-\frac{3}{2}}{\frac{1}{4} - 9} \right) : \\ : \frac{-\frac{3}{2}}{\frac{1}{4} - 9} : \frac{\left(1 - \frac{3}{2}\right)^2 \left(\frac{2}{3} - \frac{3}{4}\right)^2}{\left(\frac{1}{3} - 1\right) : \left(\frac{2}{3} - 2\right)^2} .$$

$$60. \frac{\frac{1}{3} - \frac{1}{15}}{\frac{1}{3} + \frac{1}{15}} : \frac{\frac{1}{10} - \frac{1}{8}}{\frac{1}{10} + \frac{1}{8}} - \frac{\frac{2}{3} - \frac{5}{7}}{\frac{5}{7} \cdot \left(-\frac{9}{4}\right)} : \frac{-\frac{3}{2}}{\left(\frac{1}{4} - 9\right)}.$$

$$61. \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^{-1} - \left(-\frac{1}{3}\right) \left(\frac{3}{4}\right)^{-1} + \left(-\frac{1}{2}\right)^2}{0,25 - \left(-\frac{2}{3}\right) (1 - 0,4)}.$$

$$62. \left[\frac{\left(-3 + \frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{2}\right)^{-1} + 1}{\left(1 + \frac{1}{2}\right)^{-2} - 1} - \left(\frac{5}{3}\right)^{-1} \right] : \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} - \left(\frac{1}{3}\right)^{-1} \left(\frac{2}{3}\right)^{-1}.$$

Capitolul 5

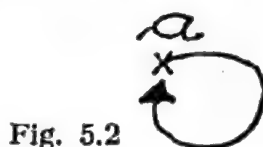
RELAȚII — FUNCȚII

5.1. PERECHI DE ELEMENTE

Să considerăm un joc ce constă din aruncarea simultană a două zaruri. Dacă primul zar arată fața 4, iar cel de-al doilea arată fața 5, convenim să notăm rezultatul acestei experiențe prin perechea $(4, 5)$. Dacă reprezentăm numerele 4 și 5 prin două puncte distincte, atunci perechea $(4, 5)$ o putem reprezenta printr-o săgeată avînd originea în punctul 4 și extremitatea în punctul 5 (fig. 5.1). În general prin notația (a, b) înțelegem o pereche



ordonată de elemente care are originea (primul element) obiectul a și extremitatea (cel de al doilea element) obiectul b . Două perechi sînt egale dacă au aceeași origine și aceeași extremitate. Prin urmare dacă $(a, b) = (c, d)$, atunci $a = c$ și $b = d$. Perechea (a, a) se reprezintă grafic printr-o buclă în care originea coincide cu extremitatea (fig. 5.2). •



Observație

1) Trebuie să facem o distincție clară între perechea (a, b) și mulțimea formată din două elemente a și b , adică mulțimea $\{a, b\}$. Avem $\{a, b\} = \{b, a\}$, în timp ce $(a, b) \neq (b, a)$.

2) Noțiunea de pereche mai poate fi definită ca o mulțime de mulțimi: $\{\{a\}, \{a, b\}\}$. Se poate verifica că este îndeplinită condiția de egalitate a perechilor.

Dacă : $(a, b) = (c, d)$, atunci $\{\{a\}, \{b, a\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\}$, și deci : $\{a\} = \{c\}$ și $\{a, b\} = \{c, d\}$. Din aceste relații deducem $a = c$ și $b = d$.

5.2. PRODUSUL CARTEZIAN AL MULȚIMILOR

Noțiunea de produs cartezian a două mulțimi

Să presupunem că un muncitor dorește să-și cumpere o mașină. I se oferă două mărci : Dacia și Skoda. Fiecare din mașinile care au una din aceste mărci poate avea culoarea : albastru, roșu sau galben. Câte combinații posibile între marcă și culoare se pot forma? Să notăm cu A mulțimea mărcilor : $A = \{\text{Dacia}, \text{Skoda}\}$ și cu B mulțimea culorilor : $B = \{\text{roșu}, \text{galben}, \text{albastru}\}$.

Se obțin următoarele perechi :

$\{\text{Dacia}, \text{roșu}\}, \{\text{Dacia}, \text{galben}\}, \{\text{Dacia}, \text{albastru}\}$
 $\{\text{Skoda}, \text{roșu}\}, \{\text{Skoda}, \text{galben}\}, \{\text{Skoda}, \text{albastru}\}.$

Dacă folosim pentru scrierea elementelor mulțimilor A și B inițialele mărcilor și ale culorilor, atunci obținem :

$$A = \{D, S\}, \quad B = \{r, g, a\}.$$

Perechile de elemente, obținute din combinarea mărcilor și a culorilor, pot fi scrise astfel :

$$\begin{pmatrix} (D, r); (D, g); (D, a) \\ (S, r); (S, g); (S, a) \end{pmatrix}$$

Primul element al fiecărei perechi aparține mulțimii A , iar cel de-al doilea element aparține mulțimii B .

Mulțimea acestor perechi se numește produsul cartezian al mulțimii A prin mulțimea B și se notează $A \times B$. Produsul cartezian al mulțimilor A și B se notează cu $A \times B$ și este format din mulțimea tuturor perechilor care au originea elemente din A și extremitatea elemente din B .

Reprezentarea grafică a produsului cartezian

Se poate reprezenta produsul cartezian a două mulțimi A și B printr-o mulțime de săgeți. Fiecare săgeată are originea un element

din mulțimea A și extremitatea un element din B (fig. 5.3).

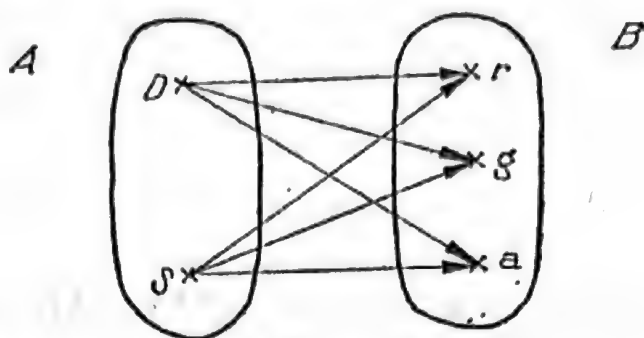


Fig. 5.3

Reprezentarea sub formă de tablou

Este comod să reprezentăm mulțimea perechilor printr-un tablou dreptunghiular astfel încât în fiecare căsuță să figureze o pereche (fig. 5.4).

$B \backslash A$	D	S
r	$(D; r)$	$(S; r)$
g	$(D; g)$	$(S; g)$
a	$(D; a)$	$(S; a)$

Fig. 5.4

Reprezentarea carteziană

Dacă reprezentăm mulțimile A și B cu ajutorul diagramelor Venn, elementele lor fiind reprezentate prin puncte, atunci fiecare pereche poate fi reprezentată printr-un punct (nod) situat la intersecția a două semidrepte care au extremitățile elementele celor două mulțimi (fig. 5.5).

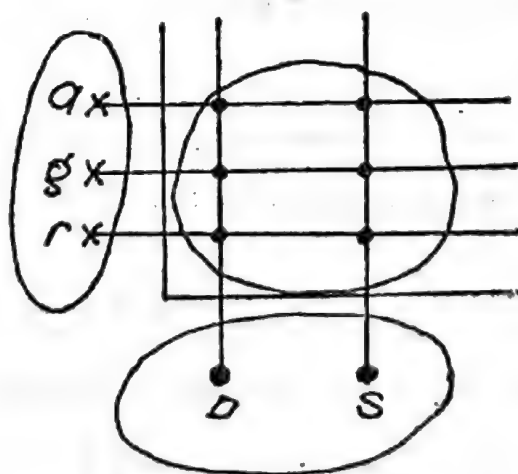


Fig. 5.5

Pătrat cartezian

Definiția produsului cartezian se aplică în mod natural și la produsul cartezian $A \times A$ al unei mulțimi prin ea însăși. Astfel acest produs se numește pătratul cartezian al unei mulțimi A prin ea însăși și se notează cu A^2 :

$$A^2 = A \times A = \{(x, y) \mid x \in A \text{ și } y \in A\}.$$

5.3. DISTRIBUTIVITATEA PRODUSULUI CARTEZIAN FAȚĂ DE REUNIUNE ȘI INTERSECȚIE

a) Distributivitatea față de reuniune

Fie mulțimile A, B, C . Pentru a exprima că produsul cartezian este distributiv față de reuniune vom scrie:

$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C).$$

Pentru a ilustra această proprietate să considerăm mulțimile (fig. 5.6):

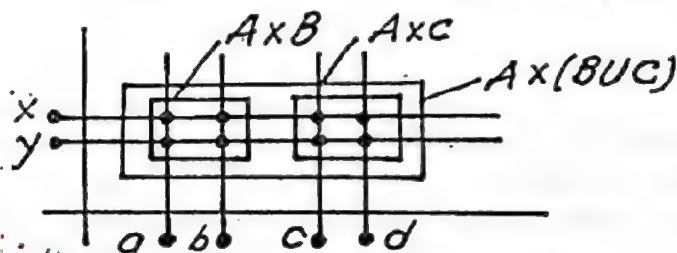


Fig. 5.6

$$A = \{x, y\}, \quad B = \{a, b\}, \quad C = \{c, d\}.$$

$$B \cup C = \{a, b, c, d\}$$

$$A \times (B \cup C) = \{(x, a), (x, b), (x, c), (x, d), (y, a), (y, b), (y, c), (y, d)\}$$

$$A \times B = \{(x, a), (x, b); (y, a), (y, b)\}; \quad A \times C = \{(x, c), (x, d), (y, c), (y, d)\}.$$

$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C).$$

b) Produsul cartezian este distributiv față de intersecție:

$$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C).$$

5.4. RELAȚII

Să considerăm o mulțime formată din pionierii : Ionel, Petrică, și Dorel. În vacanța de vară ei au vizitat muzeele Simu și Antipa, după cum urmează : Ionel *a vizitat* muzeul Simu ; Petrică *a vizitat* muzeul Antipa ; Petrică *a vizitat* muzeul Simu ; Dorel *a vizitat* muzeul Antipa.

Să notăm cu A mulțimea pionierilor și cu B mulțimea muzeelor.

$$A = \{\text{Ionel, Petrică, Dorel}\}.$$

$$B = \{\text{Simu, Antipa}\}.$$

Cuvîntul *a vizitat* indică o legătură care se stabilește între elementele a două mulțimi. Dacă utilizăm diagramele Venn, legătura dintre elementele celor două mulțimi poate fi arătată prin săgeți care au originile elemente din A și extremitățile elemente din B . A se numește mulțime de plecare iar B mulțime de sosire.

Această corespondență (fig. 5.7) ne arată că se pot forma pe-

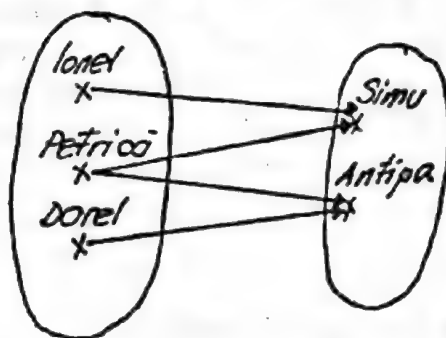


Fig. 5.7

rechi de elemente, cu proprietatea că primul element aparține mulțimii A , iar cel de-al doilea element aparține mulțimii B , pentru care relația dată este adevărată : (Ionel, muzeul Simu), (Petrică, muzeul Simu), (Petrică, muzeul Antipa), (Dorel, muzeul Antipa).

Definiție. O relație a unei mulțimi A către o mulțime B este formată din mulțimea tuturor perechilor (x, y) , x element al mulțimii A și y element al mulțimii B , pentru care relația este verificată.

Relația care leagă două obiecte oarecare se numește *relație binară*. Mulțimile A și B pot fi egale. În acest caz se spune că avem o relație în A .

O relație de la mulțimea A către mulțimea B este formată dintr-o mulțime de perechi și este o submulțime a produsului cartezian $A \times B$.

5.5. DIAGRAMA UNEI RELAȚII

Pentru a reprezenta grafic relația dintre elementele a două mulțimi se alcătuiește un tablou dreptunghiular scriind pe linie elementele mulțimii A iar pe coloană elementele mulțimii B . Se înseamnă apoi printr-un punct în interiorul unui pătrățel elementele ce corespund în relația dată.

$B \backslash A$	Ionel	Petrică	Dorel
muzeul Simu	*	*	
muzeul Antipa		*	*

Mulțimea tuturor perechilor de elemente care au proprietatea că primul element aparține mulțimii A , iar cel de-al doilea element aparține mulțimii B , determinată de legătura dintre cele două mulțimi se numește relație binară și o notăm cu \mathcal{R} . Dacă se dau două mulțimi alcătuite din numere naturale, atunci între elementele acestor mulțimi se pot stabili diferite relații. Dacă a este un element al primei mulțimi, iar b un element al celei de a doua mulțimi, putem cerceta dacă :

$a < b$ (relația „mai mic”)

$a > b$ (relația „mai mare”)

$a = b$ (relația „egal cu”)

$a \leq b$ (relația „mai mic sau cel mult egal”)

$a \geq b$ (relația „mai mare sau cel mult egal”)

Notatie

Să notăm \mathcal{R} relația de la mulțimea A către mulțimea B . Dacă două elemente x și y aparținând mulțimilor A și B verifică relația dată, vom scrie $x \mathcal{R} y$.

Graful unei relații binare

Să notăm cu \mathcal{R} relația de la mulțimea A către mulțimea B . Se numește graful relației \mathcal{R} și se notează cu G mulțimea tuturor perechilor de elemente (x, y) determinate de relația \mathcal{R} care au

proprietatea că primul element al perechii aparține mulțimii A și cel de-al doilea element aparține mulțimii B :

$$G = \{(x, y) | x \in A, x \in B, x \mathcal{R} y\}.$$

Definiție. Două relații \mathcal{R} și \mathcal{R}' sînt egale dacă au aceeași mulțime de plecare, aceeași mulțime de sosire și același graf.

5.6. INVERSA UNEI RELAȚII

Se dă mulțimea $A = \{1, 2, 3, 4\}$ și relația dată prin condiția $x < y$ unde $x, y \in A$.

Graful relației $x < y$ este o mulțime a perechilor de elemente $x, y \in A$ determinate de relația dată:

$$G = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}.$$

Reprezentarea prin săgeți a mulțimii G este arătată în fig. 5.8.

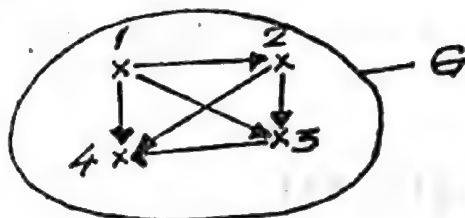


Fig. 5.8

Se consideră în mulțimea A relația dată prin condiția $y \geq x$, unde $y, x \in A$. Graful relației $y \geq x$ este mulțimea perechilor de elemente $y, x \in A$ determinată de relația :

$$G^{-1} = \{(2, 1), (3, 1), (4, 1), (2, 3), (3, 2), (4, 2), (4, 3)\}.$$

Perechile lui G^{-1} sînt inversele perechilor mulțimilor G . Reprezentarea prin săgeți a mulțimii G^{-1} este arătată în fig. 5.9. Relația

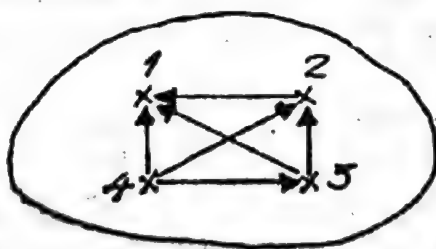


Fig. 5.9

dată prin condiția $y \geq x$ este inversa relației dată prin condiția $x < y$. Inversa sau reciproca unei relații \mathcal{R} este relația notată \mathcal{R}^{-1} al cărui graf este alcătuit din inversele perechilor lui \mathcal{R} .

Două relații \mathcal{R} și \mathcal{R}^{-1} definite în aceeași mulțime sînt egale dacă grafurile celor două relații G și G^{-1} sînt egale.

5.7. RELAȚII SIMETRICE

O relație se numește simetrică dacă este egală cu inversa sa. Prin urmare o relație R definită în mulțimea A este simetrică dacă și numai dacă atunci când $x R y$, adică atunci când perechea (x, y) aparține grafului și perechea (y, x) aparține grafului adică $y R x$. Prin urmare relația R este simetrică dacă și numai dacă atunci când $x R y$ avem și $y R x$.

5.8. RELAȚII TRANZITIVE

Să considerăm mulțimea N a numerelor naturale și relația „mai mic” definită în această mulțime.

Din relațiile $a < b$ și $b < c$ deducem relația $a < c$.

Prin urmare dacă : $a R b$ și $b R c$ atunci $a R c$.

O relație R definită în mulțimea A este tranzitivă dacă $x R y$ și $y R z$ implică $x R z$.

5.9. RELAȚII FUNCȚIONALE

Vom studia un tip particular de relație : relația funcțională sau funcția.

Definiție. O relație R de la mulțimea A către mulțimea B se numește relație funcțională sau funcție, dacă și numai dacă pentru fiecare element $x \in A$ există cel mult un element $y \in B$, astfel încât $x R y$.

Într-o relație funcțională sau funcție un element x al mulțimii A se poate afla în relația dată cu cel mult un element y al mulțimii B .

Dacă analizăm pe rând elementele x ale mulțimii A , există deci două posibilități.

Există în B un element y (și unul singur) astfel încât $x R y$ sau nu există nici un element al lui B în relație cu elementul x .

Putem deci împărți elementele lui A în două submulțimi Submulțimea A^* a lui A , formată din elementele x pentru care există în B un element y cu proprietatea $x R y$ și prin urmare perechea (x, y) verifică relația dată, se numește mulțimea de definiție a funcției.

Submulțimea $C_A A^*$ este formată din elementele lui A pentru care nu există elemente y aparținând lui B cu proprietatea $x R y$,

prin urmare formată din acele elemente ale lui A care nu se află în relație cu nici un element y al lui B .

Se spune că funcția este definită în A și are valori în B . Într-o relație funcțională avem trei mulțimi:

- 1) A — numită mulțimea de definiție;
- 2) A^* — domeniul de definiție al funcției;
- 3) B — mulțimea în care funcția ia valori, numită și codomeniul funcției.

Exemple :

Se consideră mulțimile $A = \{2, 3, 5, 7, 9\}$ și $B = \{4, 9, 19, 21\}$ și relația „ x divide y ” de la mulțimea A către mulțimea B .

Avem : 2 divide 4 ; $2 \mathfrak{R} 4$;
3 divide 9 ; $3 \mathfrak{R} 9$;
3 divide 21 ; $3 \mathfrak{R} 21$;
7 divide 21 ; $7 \mathfrak{R} 21$.

Unui element al mulțimii A îi corespunde cel mult un element al mulțimii B . Prin urmare relația „ x divide y ” este o relație funcțională.

Contraexemplu :

Se dau mulțimile : $A = \{4, 6, 8\}$, $B = \{6, 8\}$ și relația $x < y$ de la mulțimea A către mulțimea B .

Avem : $4 < 6$; $4 \mathfrak{R} 6$;
 $4 < 8$; $4 \mathfrak{R} 8$;
 $6 < 8$; $6 \mathfrak{R} 8$;

Numărului 4 din mulțimea A îi corespund două elemente, 6 și 8, în mulțimea B . Relația dată nu este funcțională.

Dacă domeniul de definiție al unei funcții și mulțimea valorilor ei sînt două mulțimi de numere reale, atunci funcția se numește *numerică*.

O funcție se notează : $f : A \rightarrow B$, unde A este domeniul de definiție al funcției și B este mulțimea în care funcția ia valori. O funcție se mai notează $y = f(x)$, $x \in A$ și $y \in B$, sau : $x \xrightarrow{f} y$; $A \xrightarrow{f} B$, y este imaginea lui x prin f sau valoarea funcției pentru valoarea x aleasă a lui A .

Exemplu :

$$f : [-1, 0] \rightarrow [0, 1], \quad f(x) = x^2;$$

$$f : [3, 4] \rightarrow [4, 5], \quad f(x) = x + 1.$$

Există diverse moduri de a reprezenta o funcție numerică :

a) Funcția numerică la care legea de corespondență este indicată printr-o diagramă ca în fig. 5.10.

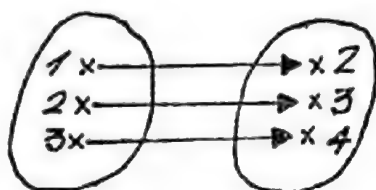


Fig. 5.10

b) Funcția dată printr-un tablou de variație.

x		1	2	3	4
y		3	5	7	9

c) Funcția definită printr-o formulă :

$$y : R \rightarrow R, \quad y = 3x.$$

Graficul unei funcții numerice

Să considerăm o funcție $f : A \rightarrow B; y = f(x)$. Fiecărei perechi $[x, f(x)]$ îi corespunde în plan câte un punct. Dacă unim toate punctele care se obțin, când x parcurge mulțimea A , se obține o curbă. Mulțimea punctelor de coordonate $M(x; f(x))$ se numește graficul funcției. Pentru a obține un punct al graficului dăm lui x valoarea a și aflăm imaginea corespunzătoare lui a prin această funcție.

5.10. MĂRIMI DIRECT ȘI INVERS PROPORȚIONALE

Două mărimi numerice x și y sînt direct proporționale dacă $y = k \cdot x$ pentru $k \in N$. Din această relație rezultă că : $\frac{y}{x} = k$.

Dacă x este un element al mulțimii A iar y un element unic al unei mulțimi B , determinat prin relația $y = kx$, atunci relația $y = kx$ este o funcție.

Egalitatea $y = kx$ se mai poate scrie $\frac{y}{x} = k$.

Numărul constant k se numește constantă de proporționalitate. Dacă (x, y) este o pereche care verifică relația $y = kx$ și numerele reale x și y sînt două mărimi variabile care se măsoară cu aceeași unitate de măsură, atunci numărul $\frac{y}{x} = k$ se numește raport.

5.10.1. PROPORȚII

Să considerăm două perechi de valori (a, b) și (c, d) care reprezintă mărimi ce se măsoară cu aceeași unitate de măsură și care aparțin graficului $y = kx$. Avem $\frac{a}{b} = k$; $\frac{c}{d} = k$ și prin urmare

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Egalitatea $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ se numește proporție. Numerele a și d se numesc extremi, iar b și c mezi. În general, egalitatea a două rapoarte se numește proporție.

5.10.2. PROPRIETĂȚILE PROPORȚIEI

1. Într-o proporție produsul mezilor este egal cu produsul extremilor :

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad (b \neq 0, d \neq 0).$$

Din $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ deducem :

$$a = bk$$

$$c = dk$$

$$ad = kbd, \quad cb = bkd$$

$$\text{sau } ad = cb.$$

2. Într-o proporție putem aduna numitorii la numărători și obținem tot o proporție.

Din relațiile $a = bk$, $c = dk$ deducem :

$$\frac{a+b}{b} = \frac{bk+b}{b} = \frac{b(k+1)}{b} = k+1$$

$$\frac{c+d}{d} = \frac{dk+d}{d} = \frac{d(k+1)}{d} = k+1$$

$$\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$$

3. În mod asemănător se pot stabili proporțiile :

$$\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}; \quad \frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d};$$

$$\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}; \quad \frac{a}{a-b} = \frac{c}{c-d};$$

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}; \quad \frac{a-b}{a+b} = \frac{c-d}{c+d};$$

$$\frac{a+c}{b+d} = \frac{a-c}{b-d}.$$

5.11. EXERCIIȚII REZOLVATE

Exemplul 1

Se consideră mulțimile (fig. 5.11).

$A = \{\text{Tîrgoviște, Pitești, Ploiești, Slatina}\}$

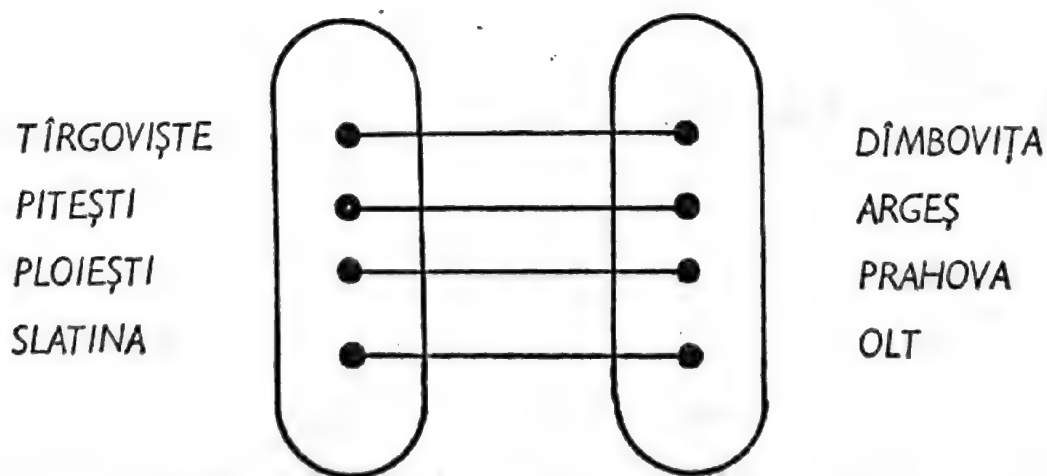


Fig. 5.11

$$B = \{\text{Dîmbovița, Argeș, Prahova, Olt}\}$$

Proprietatea „este reședința județului” stabilește o relație de la A spre mulțimea B . Să se construiască diagrama acestei relații. Soluția este indicată în fig. 5.11.

Exemplul 2

Se consideră următoarea diagramă (fig. 5.12):

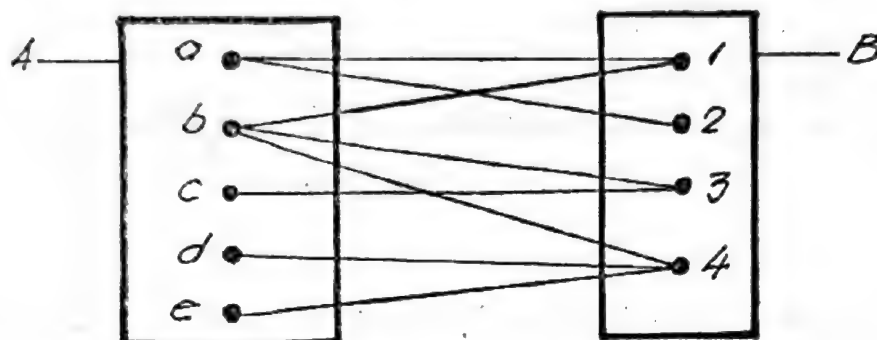


Fig. 5.12

Să se afle care este mulțimea de definiție.

Care este mulțimea valorilor?

Să se construiască un tablou de corespondență.

Soluție

Mulțimea de definiție, pe care noi o însemnăm prin A , este mulțimea elementelor lui A care sînt în corespondență cu cel puțin un element din B .

Deci $A = \{a, b, c, d, e\}$.

Mulțimea valorilor este formată din unele elemente ale lui B care sînt imaginea cel puțin a unui element din mulțimea A .

Deci: $B = \{1, 2, 3, 4\}$.

Tabela de corespondență este:

$B \backslash A$	a	b	c	d	e
1	*	*			
2	*				
3		*	*		
4		*		*	*

Exemplul 3

Se consideră mulțimile :

$$A = \{4, 6, 8, 10, 12, 19\},$$

$$B = \{2, 3, 4, 7, 5\},$$

și relația $x \mathcal{R} y : x$ este multiplul lui y , de la mulțimea A către mulțimea B .

Să se afle :

1. Mulțimea de definiție ;
2. Mulțimea valorilor ;
3. Să se construiască un tablou de corespondență ;
4. Să se definească relația reciprocă.

Soluție

Mulțimea de definiție este formată din elementele lui A care se află în relația dată cu cel puțin un element al mulțimii B .

Avem :

$4 \mathcal{R} 2$ — 4 este multiplul lui 2 ; $10 \mathcal{R} 2$ — 10 este multiplul lui 2
 $12 \mathcal{R} 2$ — 12 este multiplul lui 2 ; $6 \mathcal{R} 3$ — 6 este multiplul lui 3
 $12 \mathcal{R} 3$ — 12 este multiplul lui 3 ; $8 \mathcal{R} 4$ — 8 este multiplul lui 4
 $10 \mathcal{R} 5$ — 10 este multiplul lui 5 ; $12 \mathcal{R} 4$ — 12 este multiplul lui 4.

Din mulțimea de definiție trebuie să excludem elementul 19 deoarece el nu este multiplul nici unuia din elementele mulțimii B .

Deci mulțimea de definiție este : $A' = \{4, 6, 8, 10, 12\}$.

Mulțimea valorilor funcției este mulțimea formată din elemente care sînt imaginile a cel puțin unui element din mulțimea A' .
 Prin urmare avem : $B' = \{2, 4, 3, 5\}$.

Tabela de corespondență este :

$B \backslash A$	4	6	8	10	12	19
2	×	×	×	×	×	
3		×			×	
4	×		×		×	
7						
5				×		

Relația reciprocă este
 $y \mathcal{R} x : y$ este divizor lui
 x , de la mulțimea B
 către mulțimea A .

5.12. EXERCITII ȘI PROBLEME

Perechi de elemente. Produs cartezian

1. Se dă mulțimea $A = \{1, 2, 3\}$. Cu ajutorul elementelor acestei mulțimi să se scrie 6 perechi distincte.

2. Să se determine numerele întregi x, y care verifică simultan egalitățile :

$$(x + 1, y - 2) = (2, 0)$$

$$(-x - 1, y - 2) = (-2, 0)$$

3. Să se determine x din egalitățile :

a) $(x + 1, 4) = (3, 4);$

b) $(x - 1, x + 1) = (3, 5);$

c) $(3x, 4) = (12, x).$

4. Să se găsească elementele a și b ($a, b \in R$) din relațiile :

a) $(a, b) = (2, 1), b) (a, 3) = (3, b);$

c) $(a + 1, b) = (2, b); d) (a, b) = (1, 5).$

5. Se dau mulțimile :

$$A = \{4, 5\}, B = \{a, b\}.$$

Să se determine : $A \times B, B \times A, A^2, B^2$.

6. Dacă $a \neq b \neq c$, câte perechi de elemente putem forma cu ajutorul elementelor mulțimii $\{a, b, c\}$.

7. Se dau mulțimile :

$$A = \{x \in N \mid 3 < x \leq 5\},$$

$$B = \{x \in N \mid 2 \leq x \leq 3\}.$$

Să se afle mulțimea $A \times B$ și să se scrie mulțimea enumerând toate elementele din care este alcătuită.

8. Se dau mulțimile :

$$A = \{x \in N \mid 2 < x < 5\},$$

$$B = \{x \in N \mid x \leq 5\},$$

$$C = \{x \in N \mid x \leq 7\},$$

$$D = \{x \in N \mid 1 \leq x \leq 8\}.$$

Să se verifice că dacă $B \subset C$ și $A \subset D$ atunci $A \times B \subset D \times C$.

9. Se dau mulțimile :

$$A = \{x, y\}, B = \{1, 2\}, C = \{3\}.$$

Să se verifice egalitatea : $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$.

10. Se dau mulțimile :

$$A = \{x\}, B = \{1, 2\}, C = \{3, 4\}.$$

Să se verifice relația :

$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C).$$

11. Se consideră mulțimea $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Să se scrie mulțimea formată din elementele care aparțin lui A^2 .

12. Se dau mulțimile : $E = \{1\}, F = \{2\}$.

Să se scrie mulțimile : $E \times F$ și $F \times E$.

Să se arate că : $E \times F \neq F \times E$.

13. Se dau mulțimile : $A = \{1\}, B = \{2\}, C = \{3\}$.

Să se arate că $A \times (B \times C) \neq (A \times B) \times C$ (produsul cartezian nu este asociativ).

14. Se dau mulțimile : $A = \{1, 2, 3\},$

$$B = \{x \in \mathbb{N} / x < 6 \text{ și } x \text{ par}\},$$

$$C = \{3, 5\}.$$

Să se scrie mulțimile :

$$(A \cup B) \times C, (A \cap B) \times C, (B \cup C) \times (A \cap B).$$

Relații

15. În carnetul unui pionier se găsesc înscrise zilele săptămânii și orașele care trebuie vizitate :

Luni — Sinaia ; Marți — Predeal ; Miercuri — Brașov ; Joi — Brașov ; Vineri — Sibiu ; Sâmbătă — Sibiu.

Să notăm cu E mulțimea zilelor săptămânii și cu F mulțimea orașelor vizitate. Să se alcătuiască o diagramă carteziană a relației „a vizitat” de la mulțimea E către mulțimea F .

16. Se dau mulțimile $A = \{1, 5, 7\}$ și $B = \{2, 4, 5\}$. Să se scrie graful relației $x \mathcal{R} y$, definit prin $x = y$, $x \in A$ și $y \in B$, de la mulțimea A către mulțimea B .

17. Se dau mulțimile : $A = \{1, 2, 3, 6\}$, $B = \{2, 3, 4\}$. Să se scrie graful relației dată prin condiția „ x este jumătatea lui y ” $x \in A$ și $y \in B$.

18. Se dau mulțimile :

$A = \{\text{Eminescu, Caragiale, Creangă}\}$.

$B = \{\text{Humulești, Haimanale, Ipotești}\}$.

Să se scrie graful relației „ X este născut în...”, de la mulțimea A către mulțimea B .

19. Se consideră relația $y = x^2$ unde $x \in \{2, -1, 0, 1, 2\}$.

Să se alcătuiască :

a) Graful relației ;

b) Schema săgeată și carteziană.

20. Se dau mulțimile :

$A = \{1, 2, 4, 9\}$ și $B = \{1, 2, 3\}$.

Să se scrie toate perechile de elemente $(x, y) \in A \times B$ care verifică relație $x^2 = y$. Să se alcătuiască o schemă carteziană a acestei relații.

21. Se dau mulțimile :

$A = \{\text{Europa, Asia, America, Australia}\}$,

$B = \{\text{Paris, Londra, Pekin, Chicago, Cambera}\}$.

Să se scrie toate perechile de elemente $(x, y) \in A \times B$ care verifică relația „ x se află în y ”.

22. Se dau mulțimile :

$A = \{\text{Paris, Bruxelles, Londra, Moscova}\}$,

$B = \{\text{Franța, Belgia, Anglia, U.R.S.S.}\}$.

Să se scrie toate perechile de elemente $(x, y) \in A \times B$ care verifică relația „ x este capitala lui y ”. Să se alcătuiască schema carteziană a acestei relații.

23. Se dă mulțimea :

$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

Să se determine toate perechile de elemente $(x, y) \in E \times E$ care verifică relația : $x = y + 1$. Să se alcătuiască graful acestei relații.

24. Se dau mulțimile :

$$A = \{-1, 0, 1\}, B = \{-1, 0, 1, 2\}.$$

Să se determine perechile de elemente $(x, y) \in A \times B$ care verifică relația $x \mathrel{R} y : x < y$.

25. Se dau mulțimile :

$$A = \{\text{croitor, strungar, tapițer}\},$$

$$B = \{\text{ac, strung foarfecă}\}.$$

Să se stabilească o relație între elementele acestor mulțimi, exprimată cu ajutorul cuvântului „folosește” — care are mulțimea A ca mulțime de plecare și mulțimea B ca mulțime de sosire.

26. În figura 5.13 se arată corespondența a două mulțimi. Ce elemente corespund elementului a , elementului b , elementului c ?

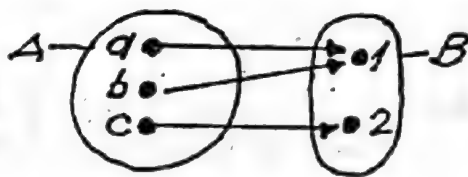


Fig. 5.13

Cite elemente corespund elementului a ? Dar elementului b ?

27. Să se întocmească o diagramă carteziană a relației „ x este multiplu lui y ”, $x \in A, y \in B$, unde :

$$A = \{12; 8; 25\}, \text{ iar } B = \{2, 3, 5\}.$$

28. În figura 5.14 este desenat un pătrat și diagonalele sale.

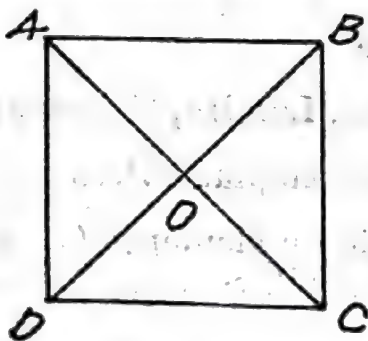


Fig. 5.14

Să notăm cu A mulțimea tuturor segmentelor de dreaptă formate, inclusiv laturile pătratului. Să se scrie toate perechile de segmente care verifică relația „este egal” în mulțimea A .

29. În mulțimea $C = \{1, 2, 3, 4, 6\}$ desenați graful relației determinate prin condiția :

a) — x este jumătatea lui y ;

b) — x este dublul lui y .

Comparați aceste grafuri.

30. Se dau relațiile :

$$R = \{(1, 2), (2, 3), (5, 4)\},$$

$$S = \{(1, a), (2, b), (3, b), (4, c)\}.$$

Să se reprezinte grafic aceste relații.

31. În figura 5.15 se indică o relație între elementele a două mul-

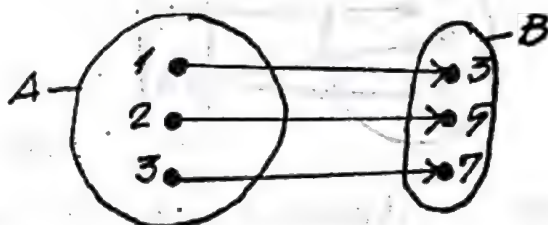


Fig. 5.15

țimi A și B . Să se indice o lege de corespondență între elementele celor două mulțimi.

32. Se dau mulțimile : $A = \{-2, 0, 1, 4, 5\}$,

$$B = \{-2, -1, 0, 1, 3\}$$

și relația \mathcal{R} de la mulțimea A către mulțimea B , definită astfel : dacă $x \in A$ și $y \in B$, atunci x este pătratul lui y . Să se scrie graful acestei relații și pe urmă să se dea o reprezentare prin săgeți și una carteziană.

33. În mulțimea $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ se dă relația \mathcal{R} definită prin condiția : $1 < x + y \leq 5$, $x, y \in A$. Să se alcătuiască graful acestei relații și apoi să se întocmească o diagramă carteziană.

34. Se dau mulțimile :

$$A = \{\text{București, Sofia, Budapesta, Varșovia, Paris, Roma}\},$$

$$B = \{\text{România, Bulgaria, Ungaria, Polonia, Franța, Italia}\}.$$

Se consideră relația „se găsește în” definită de la mulțimea A către mulțimea B . Să se alcătuiască graful acestei relații.

Să se arate apoi că este o relație funcțională.

35. Se consideră relația „se găsește în” definită pe mulțimea

$A = \{\text{U.R.S.S., Franța, Belgia, China, Egipt, Canada}\}$ în mulțimea B a celor cinci continente,

$B = \{\text{Europa, Asia, Oceania, Africa, America}\}.$

Să se reprezinte grafic această relație. Este această relație funcțională? Motivați răspunsul la această întrebare!

36. În figura 5.16 se arată grafic, cu ajutorul săgeților, coresponden-

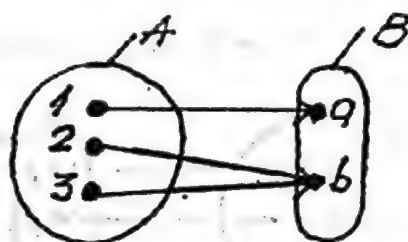


Fig. 5.16

ța dintre elementele mulțimilor A și B . Să se scrie o mulțime formată din toate perechile de elemente care satisfac această corespondență astfel încât primul element al fiecărei perechi să aparțină mulțimii A , iar cel de-al doilea element să aparțină mulțimii B .

37. Se dau A și B două mulțimi :

$A = \{1, 2, 3\}, B = \{2, 3, 4\}.$

În figura 5.17 se arată grafic o corespondență între elementele

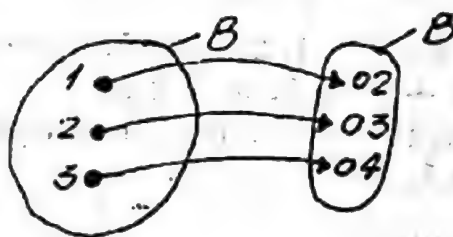


Fig. 5.17

mulțimilor A și B astfel încât unui număr din A îi corespunde numărul natural următor acestuia, din mulțimea B .

Să se scrie toate perechile de elemente care satisfac această corespondență, astfel încât primul element al fiecărei perechi să aparțină mulțimii A , iar cel de-al doilea mulțimii B .

38. Se dau mulțimile :

$$A = \{1, 2, 3, 5\} \text{ și } B = \{2, 4, 9, 25\}$$

și toate perechile de elemente care satisfac corespondența de la mulțimea A la mulțimea B , stabilită astfel : un număr al mulțimii A corespunde unui număr din mulțimea B , care este pătratul acestuia : $(1, 2), (2, 4), (3, 9), (5, 25)$. Să se reprezinte grafic mulțimile A și B și să se arate corespondența cu ajutorul săgeților.

39. Se dau mulțimile :

$$A = \{431, 332, 235, 437\} \text{ și } B = \{1, 2, 3, 4\}.$$

Să se stabilească o corespondență între elementele mulțimilor A și B astfel ca fiecărui element al mulțimii A să-i corespundă un element al mulțimii B , care indică cifra cu care începe acest număr. Să se arate grafic această corespondență.

40. Se dau mulțimile :

$$A = \{1, 2, 3, 4\} \text{ și } B = \{1, 2, 4\}.$$

Să se stabilească o corespondență între elementele celor două mulțimi, astfel încât fiecărui număr din mulțimea A să-i corespundă un număr în mulțimea B , care este mai mare decât el. Să se arate și grafic.

41. Se dau mulțimile $A = \{1, 2\}$ și $B = \{2, 4, 5\}$.

Să se stabilească o corespondență între elementele celor două mulțimi, astfel încât unui număr al mulțimii A să-i corespundă un număr al mulțimii B , care este multiplu al acestui număr. Să se facă schema acestei corespondențe.

42. Se dau mulțimile $A = \{0, 1, 2\}$ și $B = \{0, 3, 4, 6\}$.

Să se stabilească o corespondență între elementele celor două mulțimi astfel încât unui număr din mulțimea A să-i corespundă un număr din mulțimea B , care să fie de trei ori mai mare decât el. Ce element corespunde numărului 0 ? Dar numărului 2 ?

43. Se dau mulțimile $A = \{a, b, c\}$ și $B = \{b, c, d, e\}$.

Să se stabilească o corespondență între elementele celor două mulțimi, astfel încât fiecărei litere din mulțimea A să-i corespundă litera imediat următoare, în ordine alfabetică, din mulțimea B .

44. Se dau mulțimile $A = \{0, 1, 2\}$ și $B = \{0, 1, 4, 5\}$.

Să se stabilească o corespondență între elementele acestor mulțimi, astfel încât unui număr din mulțimea A să-i corespundă un număr care este egal cu pătratul lui, în mulțimea B .

45. Se dă mulțimea $A = \{-1, -2, 0, 1, 2\}$.

Să se scrie mulțimea B formată din modulele elementelor din A . Să se stabilească apoi o corespondență între elementele mulțimilor A și B , astfel încât fiecărui număr din mulțimea A să-i corespundă un număr egal cu modulul său în mulțimea B .

46. Se dau perechile :

$(1,6), (1,4), (2,5), (3,4)$.

Primul element al fiecărei perechi aparține unei mulțimi A , iar cel de-al doilea element aparține mulțimii B . Să se scrie mulțimile A și B enumerând toate elementele din care ele sînt alcătuite. Să se reprezinte grafic mulțimile A și B și apoi să se arate cu ajutorul săgeților corespondența dintre mulțimi stabilită cu ajutorul acestor perechi.

47. Se dă mulțimea :

$A = \{1, 2, -1, -2\}$ și mulțimea B — formată din toate numerele care se obțin, calculînd suma a două numere oarecare din A .

Să se stabilească apoi o corespondență între elementele mulțimilor A și B , astfel ca unui număr din mulțimea A să-i corespundă un număr egal cu succesorul acestuia, în șirul crescător al numerelor întregi, din mulțimea B . Să se reprezinte grafic aceste mulțimi și apoi să se arate corespondența cu ajutorul săgeților.

48. Se dau mulțimile :

$A = \{2, 3\}$ și $B = \{4, 6, 7\}$

și următoarele perechi de elemente : $(2, 4), (2, 6), (3, 6)$; în aceste perechi primul element aparține mulțimii A iar cel de-al doilea element aparține mulțimii B . Arătați ce corespondență se poate stabili între mulțimile A și B cu ajutorul acestor perechi. Enunțați o regulă cu ajutorul căreia se stabilește această corespondență. Să se reprezinte grafic mulțimile A și B , apoi să se arate corespondența cu ajutorul săgeților.

49. Se dau mulțimile : $A = \{1, 2, 3\}$ și $B = \{2, 4, 6\}$.

Să se afle toate perechile de elemente care satisfac relația x divide y , unde x este un element al mulțimii A , iar y un element al mulțimii B .

Să se alcătuiască o schemă cu săgeți.

50. Se dau mulțimile :

$$A = \{-1, 0, -2\} \text{ și } B = \{0, 1, 2\}.$$

Să se afle toate perechile de elemente (x, y) , unde $x \in A$ și $y \in B$, care au suma egală cu 0 ($x+y=0$). Să se alcătuiască o schemă cu săgeți pentru această corespondență.

51. Se dă mulțimea : $C = \{2, 4, 6, 8, 12\}$.

Să se determine perechile de elemente $(x, y) \in C \times C$ care verifică relația :

- a) x este jumătatea lui y ;
- b) x este dublul numărului y .

52. Să notăm cu A o mulțime de orașe și cu B o mulțime de întreprinderi.

$$A = \{\text{București, Ploiești, Brașov}\},$$

$$B = \{23 \text{ August, 1 Mai, Tractorul}\}.$$

Să se determine mulțimea perechilor de elemente $(x, y) \in B \times A$ care verifică relația : „uzina x este în orașul y ”.

53. Se consideră patrulaterul $ABCD$. Să notăm cu E mulțimea unghiurilor acestui patrulater, iar cu F mulțimea laturilor. Să se alcătuiască graful relației $x \mathcal{R} y$ „unghiul x este adiacent laturii y ”, de la mulțimea E către mulțimea F .

54. Se consideră mulțimea $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

În mulțimea A se dă relația $\mathcal{R} : x \mathcal{R} y ; 1 \leq x + y \leq 5$.
Să se facă schema cartiziană a acestei relații.

55. În mulțimea A , a copiilor unei familii, se consideră relația $x \mathcal{R} y : „x$ are aceiași părinți ca și $y”$. Este această relație simetrică ?

56. În mulțimea B a dreptelor din plan se consideră relația : „ x este perpendiculară pe y ”. Este această relație simetrică ?

57. În mulțimea numerelor naturale N se consideră relația : $x \mathcal{R} y : „x$ este prim cu $y”$. Să se arate că această relație este simetrică și tranzitivă.

58. În mulțimea numerelor întregi se consideră relația $x \mathcal{R} y : x^2 + x = y^2 + y$. Să se studieze proprietățile acestei relații.

59. Se dă relația : $G = \{(1, 2), (2, a), (1, 3), (3, a)\}$.
Să se determine numărul a astfel încât relația G să fie simetrică.

Se dă relația :

$$G = \{(1, 2), (1, 3), (3, 1), (2, a), (3, 2)\}.$$

Să se determine a astfel încât relația dată să fie tranzitivă.

60. Se dă relația :

$$G = \{(a, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 1)\}.$$

Să se determine a astfel încât relația dată să fie reflexivă.

61. Printre relațiile următoare să se recunoască relațiile care sînt simetrice :

$$G = \{(1, 2), (2, 3), (3, 3), (3, 2), (2, 1)\};$$

$$G' = \{(1, 2), (2, 1), (3, 1), (2, 2)\};$$

$$G'' = \{(a, 3), (b, c), (a, a)\};$$

$$G''' = \{(a, a), (b, b)\}.$$

62. În figura 5.18 (a, b și c) sînt desenate grafele unor relații. Să se stabilească care din aceste relații sînt simetrice.

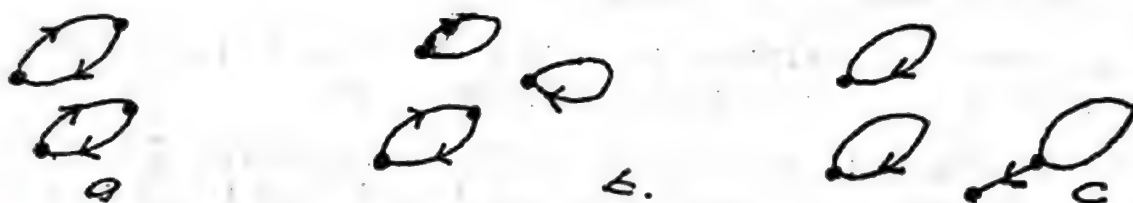


Fig. 5.18

63. Se consideră mulțimea $E = \{1, 2, 3\}$ și relațiile :

$$A = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 1)\},$$

$$B = \{(1, 1), (2, 3), (3, 2), (2, 2)\};$$

$$C = \{(1, 1), (2, 3), (3, 2), (3, 3), (2, 1), (2, 2)\}.$$

Să se spună care relații sînt simetrice și care sînt tranzitive.

64. În mulțimea N se consideră relațiile :

$$f: N \rightarrow N; \quad x \rightarrow 4x$$

$$g: N \rightarrow N; \quad x \rightarrow 2x + 1.$$

Să se stabilească dacă aceste relații sînt funcții.

Să se determine imaginile numerelor 0 ; 4 ; 8 ; 12 prin funcțiile f și g .

65. Se dau mulțimile $A = \{3, 4, 5\}$, $B = \{7, 6, 8, 9, 10\}$ și relația :

$$f: A \times A \rightarrow B, f(a, b) = a + b.$$

Să se arate că f este o funcție cu domeniul $A \times A$ și codomeniul B

66. Se consideră funcția: $N \xrightarrow{f} Q : f(x) = \frac{x}{2}$.

Să se calculeze $f(3), f(4), f(18)$.

67. Printre relațiile următoare să se stabilească relațiile care sînt funcții :

$$R = \{(1, 3), (2, 3), (3, 4)\},$$

$$S = \{(1, 3), (1, 4), (2, 3)\},$$

$$T = \{(1, 3), (2, 3), (3, 4), (4, 5)\}.$$

68. Se dau mulțimile :

$$A = \{1, 2, 3\} \text{ și } B = \{2, 3, 4\}.$$

Să se găsească toate perechile de elemente care au suma egală cu 5.

69. Să se alcătuiască schema cu săgeți a acestei corespondențe. Dacă se notează cu f corespondența stabilită prin această operație să se afle $f(1), f(2), f(3)$.

70. În figura 5.19 sînt date schemele săgeată ale unei relații.

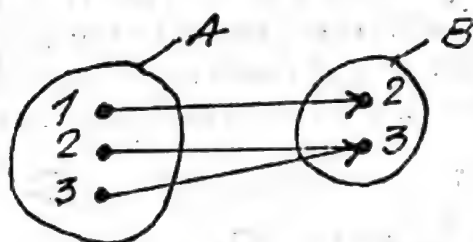


Fig. 5.19

Să notăm cu f relația stabilită de la mulțimea A la mulțimea B . Să se afle $f(1), f(2), f(3)$.

71. În fiecare din figurile 5.20 se indică prin săgeți corespondența

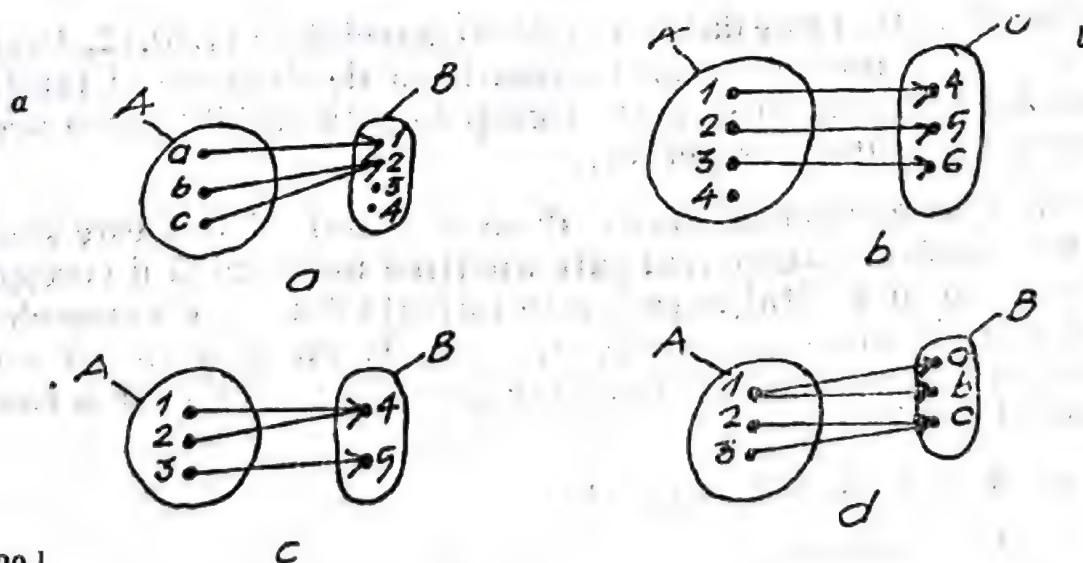


Fig. 5.20 |

a două mulțimi A și B . Să se stabilească care din aceste corespondențe sînt funcții. Să se explice rezultatul.

72. Se consideră funcția $f(x) = ax$. Să se determine a știind că $f(1) = 2$.

73. Se dau mulțimile : $A = \{1, 2\}$ și $B = \{a, b\}$. Să se arate în cîte moduri putem stabili o corespondență de la mulțimea A către mulțimea B , astfel încît să avem o funcție.

74. În figura 5.21 este indicată corespondența dintre mulțimile

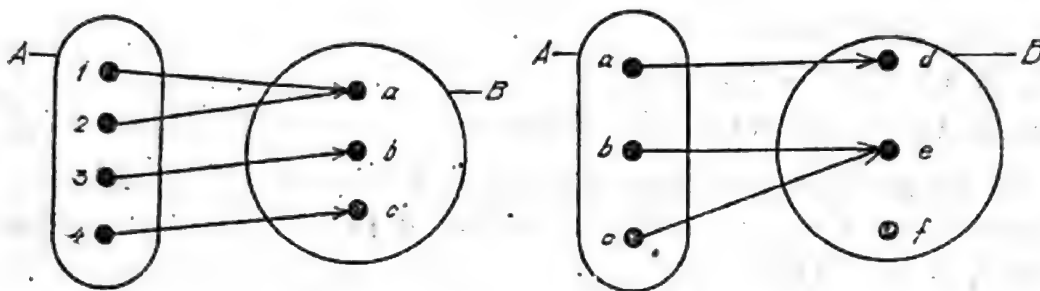


Fig. 5.21

A și B , stabilită cu ajutorul a două funcții f și g . Scrieți mulțimea tuturor perechilor de numere care satisfac această corespondență. Scrieți în pătrățel elementul corespunzător al mulțimii B astfel încît egalitățile scrise mai jos să fie adevărate :

$$f(1) = \square, f(2) = \square, f(3) = \square, f(4) = \square,$$

$$g(a) = \square, g(b) = \square, g(c) = \square.$$

75. Funcția f este dată cu ajutorul perechilor : $(1, 3), (2, 4), (3, 5), (4, 6)$. Să se afle mulțimea de definiție a funcției și mulțimea valorilor ei. Cît este $f(1), f(2), f(3)$?

76. Funcția f este dată cu ajutorul perechilor : $(4, 5), (2, 3), (1, 7), (3, 4)$. Să se reprezinte grafic mulțimea de definiție și mulțimea valorilor funcției. Să se arate corespondența stabilită prin această funcție cu ajutorul săgeților.

77. Corespondența dintre două mulțimi X și Y este stabilită astfel : fiecărui număr real care aparține mulțimii X îi corespunde opusul său în Y . Mulțimea Y este formată din toate numerele care sînt opusele numerelor ce aparțin lui X . Să se arate că această corespondență este o funcție. Să se găsească mulțimea Y a valorilor funcției dacă :

a) $X = \{-5, -4, -2, -1\}$;

b) $X = \{-5, 0\}$;

- c) $X = (-1, 0)$;
- d) $X = (-6, -3)$;
- e) $X = (-5, -2)$;
- f) $X = (-1, +1)$.

78. Dacă notăm cu f funcția de la X la Y , din exercițiul precedent atunci să se calculeze pentru cazul (a), cât este $f(-5)$, $f(-4)$, $f(-1)$.

79. Corespondența între două mulțimi X și Y este stabilită astfel: fiecărui număr x care aparține mulțimii X îi facem să corespundă numărul $2x$, adică un număr care se obține prin înmulțirea cu 2 a numărului x . Să notăm cu Y mulțimea acestor numere. Să se arate că această corespondență este o funcție. Să se găsească mulțimea Y a valorilor funcției, dacă:

- a) $X = \{-1, -2, -3, -4\}$;
- b) $X = (-1, 1)$;
- c) $X = (-\infty, 0)$;
- d) $X = [-2, +3]$;
- e) $X = (-5, +\infty)$.

80. Să considerăm dreptunghiul $ABCD$ și punctul O de intersecție al diagonalelor AC și CB . Să notăm: $X = \{M/M \in AB\}$. Mulțimea M este formată din punctele care aparțin segmentului AB . Să stabilim o corespondență astfel încât unui punct M al segmentului AB să-i corespundă un punct M' , cu proprietatea $OM = OM'$, punctele O, M, M' fiind coliniare.

- a) Să se afle mulțimea Y a punctelor M' .
- b) Să se arate că corespondența de la X la Y este o funcție.
- c) Dacă notăm cu f funcția, să se afle: $f(A)$, $f(B)$.
- d) Să notăm cu Q mijlocul segmentului AB . Să se arate ce proprietate are $f(Q)$.

81. Se dau în plan trei puncte necoliniare A , B și C și un segment de dreaptă RQ , a cărei lungime este egală cu a . Se stabilește o corespondență astfel încât unui punct M așezat pe laturile triunghiului ABC să-i corespundă punctul M' , care satisface relația: $MM' \parallel RQ$ și $MM' = RQ$.

- a) Să se determine mulțimea Y a punctelor M' .

b) Să se arate că această corespondență este o funcție.

c) Dacă notăm cu f funcția stabilită, să se arate ce proprietate au punctele : $f(A)$, $f(B)$ și $f(C)$.

82. Se dă mulțimea X a punctelor din plan, care sînt așezate pe circumferința unui cerc, mulțimea Y a punctelor care aparțin segmentelor MN și un punct oarecare S (fig. 5.22).

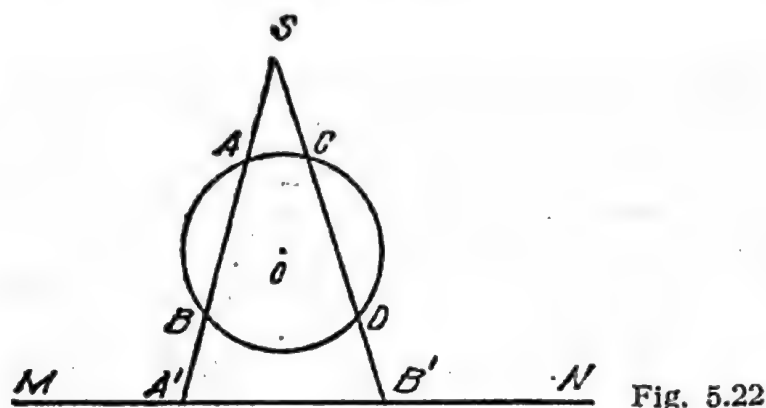


Fig. 5.22

Să se stabilească o corespondență între mulțimea punctelor așezate pe circumferința cercului O și mulțimea punctelor aparținând segmentului MN astfel încît unui punct A de pe circumferința cercului să-i corespundă punctul A' , care se află la intersecția dreptelor SA și MN . Să se arate de ce această corespondență nu este o funcție.

83. Se consideră mulțimea X a numerelor naturale pare și mai mici sau cel mult egale cu numărul natural 10 și mulțimea Y formată din pătratele acestor numere. Să stabilim o corespondență între aceste mulțimi, astfel încît unui număr din mulțimea X să-i corespundă pătratul său în mulțimea Y .

a) Să se arate că această corespondență este o funcție.

b) Să se alcătuiască tabelul de variație al acestei funcții, trecînd pe o linie numerele care aparțin mulțimii X , iar pe cealaltă linie numerele care corespund acestora în mulțimea Y .

84. Se dă mulțimea A a numerelor naturale mai mici sau cel mult egale cu numărul natural 10 și mulțimea B a numerelor naturale formată de cuburile acestora. Se stabilește o corespondență între mulțimile A și B , astfel încît fiecărui număr din mulțimea A să-i corespundă cubul său în mulțimea B . Să se alcătuiască tabelul de variație.

85. Funcția f este dată prin tabelul scris mai jos :

x	-1	0	1	2	3
y	1	0	1	4	9

Să se afle $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$?

86. Funcția g este dată prin tabelul :

x	-2	-1	0	1	2
y	-8	-1	0	1	8

Să se verifice că, dacă x este un număr scris în prima linie, această funcție satisface proprietatea :

$$g(-x) = -g(x).$$

87. Un corp se deplasează uniform și fără frecare cu o viteză de 30 km/h, pornind din stare de repaus. Să se afle spațiul parcurs de corp după : o oră, două ore, trei ore, patru ore, și să se completeze tabelul de variație.

t	1	2	3	4	5	6	7
S	30	60					

Funcții date printr-o formulă

88. O funcție este dată prin formula : $y = 2x$. Să se afle pentru ce valori ale lui x , funcția este egală cu zero. Să se stabilească valoarea funcției y , când x ia valoarea -4 .

89. O funcție este dată prin relația $y = 3x$. Să se afle valorile lui y corespunzătoare lui $x = 1, 2, 3$. Să se întocmească tabelul de variație al funcției și apoi să se construiască graficul său.

90. O funcție este dată prin relația $y = 5x$. Să se afle valorile lui y corespunzătoare lui $x = -1, 0, 2, 3$. Să se întocmească tabelul de variație cuprinzând aceste valori și apoi să se construiască graficul funcției.

91. Se dă funcția $y = 3x^2 + 1$ și domeniul de definiție al funcției $X = \left\{-2, -1, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1\right\}$. Să se găsească mulțimea valorilor funcției.

92. Funcția $f(x)$ este dată prin relația $y = 5x^2 - 2$. Să se afle $f(0)$, $f(-1)$, $f\left(\frac{1}{2}\right)$.

93. În tabelul de mai jos se arată corespondența dintre valorile lui x și valorile funcției y :

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	-2	-1	0	0	1	8	27

Să se scrie această funcție cu ajutorul unei formule.

94. În tabelul scris mai jos se arată corespondența stabilită de o funcție, numai pentru primele trei valori ale lui x .

Să se scrie funcția cu ajutorul unei formule ($y = x + b$) și apoi să se completeze tabelul de variație pentru celelalte valori :

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	-2	-1	0				

95. O funcție q este dată prin formula : $q(x) = 5x + 10$. Să se afle pentru ce valori ale lui x avem : $q(x) = 5$, $q(x) = 10$, $q(x) = 15$, $q(x) = 20$.

96. O funcție f este dată prin formula $f(x) = 3x + 6$. Să se stabilească mulțimea valorilor lui x , cu condiția ca $f(x) > 0$, adică mulțimea valorilor lui x , pentru care valorile corespunzătoare lui y sînt pozitive.

97. Se dă funcția $y = 3x - 6$. Să se stabilească mulțimea valorilor lui x pentru care valorile corespunzătoare ale lui y sînt negative ($f(x) < 0$).

98. Funcția y este dată de relația $y = 3x + 1$. Să se stabilească mulțimea valorilor funcției corespunzătoare valorilor :

$$x = -1, x = 1, x = 2, x = 3.$$

Să se întocmească tabloul de variație și apoi să se construiască graficul funcției.

Să se verifice că punctul $M(-2, -5)$ se află pe grafic.

Să se arate apoi că valorile $x = -2$, $y = -5$ verifică relația $y = 3x + 1$.

99. O funcție f este dată prin graficul din figura 5.23 pentru $x \in [-3, +3]$. Să se afle cu ajutorul graficului :

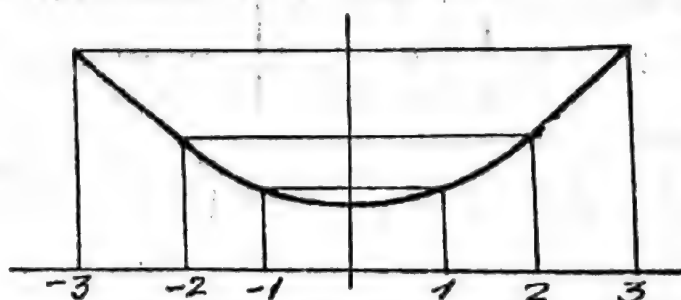


Fig. 5.23

- a) mulțimea valorilor funcției f ;
- b) valoarea funcției pentru $x = 0$;
- c) să se afle $f(-3)$, $f(-2)$, $f(-1)$, $f(1)$, $f(2)$.

100. O funcție f este dată prin graficul din fig. 5.24 pentru $x \in [-4, 4]$. Să se stabilească cu ajutorul graficului :

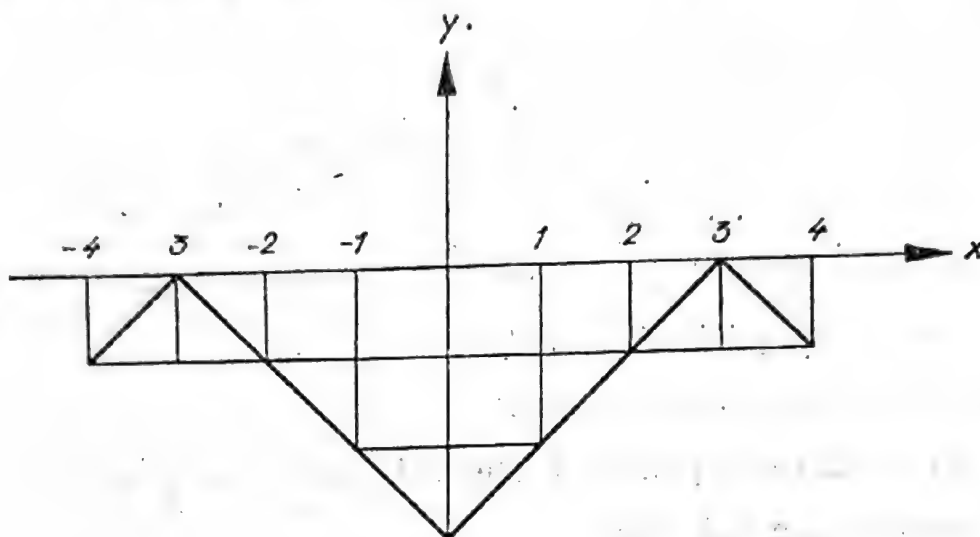


Fig. 5.24

- a) Domeniul valorilor funcției;
- b) Mulțimea valorilor x pentru care funcția primește valori pozitive;
- c) Mulțimea valorilor x pentru care funcția f primește valori negative;
- d) Mulțimea valorilor x pentru care avem satisfăcută relația : $-1 \leq f(x) \leq -3$;
- e) Valoarea corespunzătoare a lui y pentru $x = 0$;
- f) Pentru ce valori ale lui x funcția este egală cu zero.

101. O funcție este dată prin relația $y = 4x + 1$. Să se întocmească tabloul de variație pentru $x = 1, 2, 3, 4, 5$.

Să se reprezinte grafic funcția.

Dacă $x \in [1, 5]$, să se afle domeniul valorilor funcției.

102. Să se construiască graficul funcției $y = \frac{x^2}{2}$, unde $x \in [-4, 4]$.

Să se găsească pe grafic mulțimea valorilor variabilei x , pentru care :

a) $y = 0$; b) $y > 0$; c) $y \leq 1$; d) $y \geq 1$.

Să se construiască graficul funcției $y = x^2 + 1$, unde $x \in [-2, 2]$.

Să se arate că punctul de coordonate $(-1, 2)$ se află pe grafic.

103. Se dă funcția $y = ax + 2$.

a) Să se arate că oricare ar fi numărul a graficul acestei funcții trece prin punctul $(0, 2)$.

b) Să se determine pentru ce valoare a lui a , graficul acestei funcții trece prin punctul $(-1, 0)$.

104. Se dă funcția $y = ax^2$.

a) Să se arate că pentru orice valoare a lui a graficul funcției trece prin punctul $(0, 0)$.

b) Să se afle apoi pentru ce valoare a lui a graficul funcției trece prin punctul de coordonate $(2, 4)$.

105. O funcție este dată prin formula $y = x^2$. Să se găsească domeniul de definiție X , dacă mulțimea valorilor funcției este intervalul

1) $[0, 1]$; 2) $[0, 4]$; 3) $[0, 9]$.

106. Se dau funcțiile : $y = 4x + 1$ și $y = 2x + 1$. Să se reprezinte grafic și apoi să se stabilească coordonatele punctului de intersecție al celor două drepte.

Să se verifice apoi că coordonatele punctului de intersecție al acestor două drepte verifică cele două relații prin care sînt date funcțiile.

107. O funcție f este dată prin formula $y = |x|$, unde $x \in [-4, 4]$.

Să se afle : $f(-1), f(-2), f(-3), f(-4), f(1), f(2)$.

108. Se dau funcțiile : $y = x^2, y = 5x - 6$.

Să se stabilească cu ajutorul graficului mulțimea punctelor x pentru care $x^2 = 5x - 6$.

109. O funcție este dată prin formula $y = |x| - 1$. Să se afle mulțimea valorilor lui x pentru care funcția ia valoarea 1.

Proporționalitatea directă și inversă

110. Ce relație leagă, într-o mișcare cu viteza constantă $V = 4$ km/h, drumul parcurs și timpul necesar parcurgerii drumului?

111. Ce relație leagă, într-o mișcare, drumul parcurs și viteza de deplasare a corpului dacă timpul necesar deplasării nu se schimbă?

112. Aflați relația dintre timpul necesar parcurgerii unei anumite distanțe și viteza de deplasare, dacă distanța rămâne mereu aceeași ($S = 20$ km).

Indicație: Aceste relații se deduc din formulele mișcării $S = v \cdot t$.

113. Aflați relația de dependență dintre următoarele mărimi și stabiliți felul dependenței:

- perimetrul pătratului și latura sa;
- aria dreptunghiului și lungimea sa (când lățimea rămâne neschimbată);
- aria triunghiului și înălțimea sa (când baza rămâne neschimbată);
- baza și înălțimea dreptunghiului (când aria rămâne neschimbată);
- aria rombului și una din diagonalele sale (când cealaltă rămâne neschimbată);
- diagonalele rombului (când aria rămâne neschimbată).

114. Scrieți o relație de dependență între următoarele mărimi:

- lungimea cercului și raza sa;
- aria laterală a cilindrului și generatoarea (când raza bazei rămâne neschimbată);
- aria laterală a conului și lungimea razei (când generatoarea rămâne neschimbată);
- generatoarea unui con și raza sa când aria laterală a conului rămâne constantă;
- perimetrul unui triunghi care are toate laturile egale și lungimea laturii sale.

115. În ce relații de dependență se află numărul de ore în care se poate efectua o lucrare și numărul de muncitori, cunoscând că fiecare muncitor lucrează aceeași parte din lucrare.

116. Un dreptunghi are dimensiunile 4 și 5 cm. Cu cât trebuie să se mărească lățimea dreptunghiului pentru ca suprafața să crească de două ori (lățimea rămâne constantă)?

117. Să se construiască graficul funcției $y = 3x$. Să se găsească apoi valorile lui y corespunzătoare lui $x = -1, 1, 4, 2$.

118. Să se construiască graficul funcției : $y = -3x$.

a) Dacă variabila x aparține intervalului $(0,1)$, să se afle la ce mulțime aparține variabila y și să se arate pe grafic.

b) Pentru ce valori ale variabilelor x , variabila y aparține mulțimii numerelor pozitive.

c) Să se afle pentru ce valoare a lui x , y este egal cu -6 .

119. În fig. 5.25 este construită o dreaptă ce trece prin

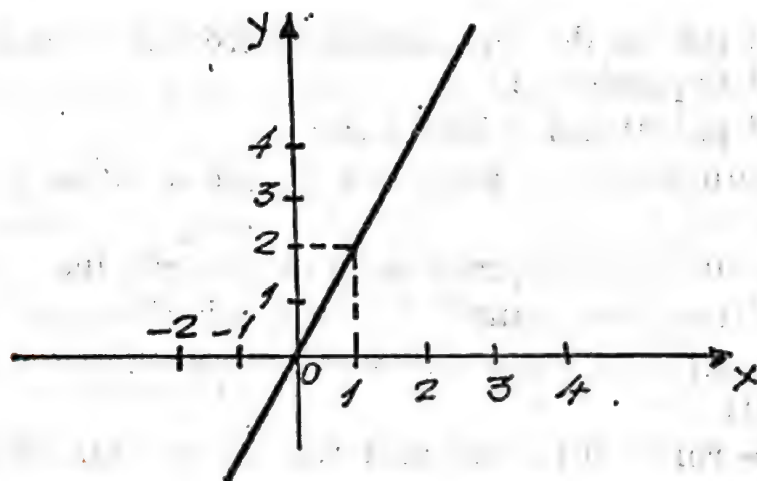


Fig. 5.25

punctul O .

Dreapta reprezintă graficul unei funcții. Folosind acest grafic să se completeze tabelul.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y							
$\frac{y}{x}$							

120. Se dă funcția : $y = 4x$. Să se construiască graficul acestei funcții.

Să se verifice apoi care din următoarele puncte aparțin graficului $A(1, 4)$, $B(2, 3)$, $C(-1, -4)$, $D(-2, -5)$.

121. Se dă funcția $f: R \rightarrow R$ $f(x) = 3x$. Fără să se construiască graficul, să se verifice direct dacă punctele $A(1, 3)$, $B(-4, -12)$, $C(-1, -6)$ aparțin graficului.

122. Să se construiască graficul funcțiilor $y = 4x$, $y = -2x$, $y = 5x$ și apoi să se stabilească cu ajutorul acestor grafice care este coeficientul de proporționalitate al fiecărei funcții.

123. Se știe că punctul $A(1, 3)$ aparține graficului proporționalității directe a două variabile. Să se afle coeficientul de proporționalitate.

124. Să se construiască graficul funcției $y = \frac{1}{x}$ și să se afle apoi cu ajutorul graficului valorile aproximative ale variabilei y când $x = -1, 5$; $-2, 5$.

125. Se consideră funcția $y = \frac{4}{x}$. Să se construiască graficul acestei funcții și apoi să se stabilească cu ajutorul acestui grafic mulțimea căreia îi aparține variabila y dacă variabila x aparține mulțimilor :

$$[-4, -1], [1, 4], [-6, -2], [2, 6].$$

126. Se consideră funcția $y = \frac{3}{x}$. Să se construiască graficul acestei funcții. Să se afle cu ajutorul graficului valorile variabilelor y pentru $x = 1, 5$; 2 ; 5 ; 3 ; 5 .

127. Se consideră funcția : $y = \frac{-4}{x}$. Să se afle mulțimea căreia îi aparține variabila y , dacă x aparține mulțimilor :

$$[-2, 0], [0, +2].$$

128. Se știe că punctul $A(1, a)$ aparține graficului funcției $y = \frac{3}{x}$.

Să se afle a .

129. Să se construiască curbele :

$$xy = 8, xy = 1, xy = -1.$$

130. Un tren merge cu o viteză de 60 km/h. Să se exprime drumul parcurs în funcție de timpul t și să se reprezinte grafic variația acestei funcții.

(Se va reprezenta pe axa Ot 1 oră prin segmentul de lungime egal cu 1 cm, iar pe axa Ov , distanța de 40 km se va reprezenta prin segmentul a cărui lungime este 1 cm.)

Cu ajutorul graficului din problemă să se stabilească drumul parcurs după $2\frac{1}{2}$ ore.

131. S-a studiat experimental viteza sunetului la diferite temperaturi și s-a obținut următorul tabel :

$t (^{\circ}\text{C})$	-30	-19	-5	0	8	12	20	30
$v(\text{m/s})$	313	321	329	332	337	339	344	349

Să se alcătuiască graficul variației vitezei în funcție de temperatură.

132. O cantitate de marfă costă 120 lei. Cît va costa o cantitate de trei ori mai mare din același fel de marfă ? (oral).

133. Un mobil parcurge distanța de 120 km într-un anumit timp. Mergînd cu aceeași viteză, ce distanță va parcurge într-un timp de două ori mai mic ? (oral).

134. Viteza unei motociclete este $\frac{2}{5}$ din viteza unui automobil. Să se afle raportul dintre timpul în care motocicleta parcurge o distanță și timpul în care automobilul parcurge aceeași distanță.

135. Un mobil, în mișcare uniformă, parcurge, în 3 ore, 108 km. Dacă viteza rămîne constantă, cît va parcurge mobilul în 4 ore ? dar în 10 ore ?

136. Patru centimetri cubi dintr-un material cîntăresc 31,2 g. Cîte grame cîntăresc 2 cm^3 din același material ?

137. Șase muncitori termină de săpat un șanț în 4 zile. Dar 3 muncitori, lucrînd cu același randament ca primii, în cîte zile vor săpa același șanț ?

138. Un automobil mergînd cu viteza de 60 km/h parcurge o anumită distanță în 4 ore. În cîte ore va parcurge automobilul aceeași distanță dacă viteza va fi de 90 km/h ?

139. Patru robinete vor umple un bazin în 6 ore. Cîte robinete de același fel vor fi necesare pentru ca același bazin să poată fi umplut în 3 ore.

Capitolul 6

STATISTICA

6.1. POPULAȚIE STATISTICĂ. EȘANTION

În foarte multe din activitățile practice este necesar să alcătuim o colecție de date, obținute din simple observații sau măsurători. Această organizare se face în scopul de a obține informații necesare organizării și conducerii acestor activități.

Vom numi populație statistică orice mulțime care formează obiectul unei analize statistice. Elementele unei populații statistice se numesc unități statistice sau indivizi. Să presupunem de exemplu că dorim să analizăm notele obținute de elevii unei clase la matematică. Populația statistică este în acest caz formată din elevii clasei.

Cînd studiem această populație statistică facem abstracție de alte proprietăți ale elementelor care o alcătuiesc, ca de exemplu notele obținute de elevi la o altă disciplină de învățămînt sau cunoștințele practice.

Noi cercetăm această populație statistică numai în raport cu o anumită proprietate, care în exemplul nostru este calitatea notelor obținute la matematică.

Proprietatea în raport de care noi cercetăm elementele unei populații statistice se numește *proprietate caracteristică*.

Dacă numărul elevilor din școală este foarte mare, este aproape imposibil de a cerceta toate notele și de a face o clasificare a lor.

Vom alege pentru aceasta numai notele pe care le-au obținut la matematică elevii din clasa unde învață elevul X. Mulțimea elevilor din această clasă este o submulțime a mulțimei elevilor din școală. Vom numi această submulțime *eșantion*.

Un *eșantion* este prin urmare o submulțime a unei populații statistice, aleasă în mod special pentru a se cerceta elementele ei în raport cu o proprietate caracteristică.

Alegerea eșantionului se face cu respectarea anumitor condiții.

Este necesar ca informațiile pe care le obținem din analiza datelor, cercetînd elementele eșantionului, să fie aproximativ adevărate pentru întreaga populație statistică. Această condiție se numește *reprezentativitatea eșantionului*.

Proprietatea caracteristică a elementelor care alcătuiesc o populație statistică are un caracter foarte variat; se disting proprietăți calitative sau cantitative. Dacă vrem să obținem anumite informații asupra înălțimii elevilor din aceeași școală și care au aceeași vîrstă, atunci cel mai simplu mod este acela de a măsura înălțimea elevilor unei singure clase — în cazul cînd școala are un număr mare de clase paralele.

În acest exemplu *populația statistică* este formată din elevii școlii care au aceeași vîrstă școlară.

Proprietatea caracteristică a acestei populații statistice este *înălțimea elevilor*.

Eșantionul statistic este format din elevii unei singure clase.

6.2. ÎNREGISTRAREA ȘI CLASIFICAREA DATELOR

Să presupunem că pentru a obține informații asupra notelor acordate la lucrarea scrisă, la matematică, se analizează lucrările a 20 de elevi dintr-o clasă. Se scriu notele obținute de elevi în ordinea în care ei sînt trecuți în catalog.

5, 6, 8, 6, 7, 8, 7, 4, 5, 6,
7, 8, 4, 3, 9, 6, 5, 6, 7, 8.

Mulțimea acestor numere, obținute ca rezultat al aprecierii calității lucrărilor, formează un tablou de date.

Aceste date pot fi aranjate în ordine crescătoare și se obține o înregistrare, începînd cu cea mai mică notă, pînă la cea mai mare.

Așezarea acestor valori în ordine crescătoare se numește *clasificarea datelor*. Diferența dintre cea mai mare și cea mai mică valoare a înregistrărilor se numește *distanță*. Distanța pentru mulțimea noastră de date este 9—3 sau 6.

Numărul de elevi din care este compusă clasa analizată este 20. În general, numărul de elemente ale unui eșantion se numește *volumul eșantionului* și se notează cu litera *N*. Prin urmare, în exemplul analizat $N = 20$.

Rezultatele clasificării datelor statistice sînt consemnate în tablouri (tabelul 1), unde pe prima coloană se trec notele elevilor la lucrarea scrisă, pe coloana a doua se marchează prin liniuțe numai elevii care au luat nota respectivă, iar pe coloana a treia se trece numărul de elevi care au luat nota trecută în coloana I-a, totalizînd numărul de liniuțe.

Numărul elevilor care corespund unei anumite note școlare sau care au luat la lucrarea scrisă nota respectivă se numește efectiv sau frecvență absolută. Pentru notația frecvenței absolute se folosește litera n . Se numește frecvență absolută a unei valori x a caracteristicii numărul de unități ale populației corespunzătoare acestei valori.

Din analiza datelor prezentate mai sus rezultă că :

Un elev a obținut nota trei ; doi elevi au obținut nota 4 ; trei elevi au obținut nota 5 ; cinci elevi au obținut nota 6 ; patru elevi au obținut nota 7 ; patru elevi au obținut nota 8 ; un elev a obținut nota 9.

Aceste note pot fi trecute într-un tabel care are în prima coloană notele, iar în coloana a 2-a, frecvențele.

Notele elevilor la lucrările scrise

Valori	x	Marcarea elementelor	Frecvența
x_1	3	/	1
x_2	4	//	2
x_3	5	///	3
x_4	6	////	5
x_5	7	////	4
x_6	8	////	4
x_7	9	/	1

Mulțimea valorilor proprietății caracteristice și a frecvențelor corespunzătoare alcătuiesc o serie statistică.

O serie statistică se poate prezenta sub forma unui tabel simplu avînd două coloane : pe prima coloană se trec valorile măsurătorilor sau ale datelor de observație ; pe cea de a doua coloană, frecvența corespunzătoare, n_1 .

Suma tuturor frecvențelor absolute este egală cu *volumul eșantionului* :

$$1+2+3+5+4+4+1 = 20$$

Datele trecute în tabel alcătuiesc o serie statistică.

6.3. FRECVENȚA RELATIVĂ

Se numește frecvență relativă raportul dintre frecvența absolută și *volumul eșantionului*.

Frecvența absolută se notează cu litera n .

$$f = \frac{n}{N}$$

f — frecvența relativă,
 n — frecvența absolută,
 N — volumul eșantionului.

Exemplu

Vrem să cunoaștem care este raportul dintre numărul elevilor care au obținut nota 6 și numărul total al elevilor din clasă.

Pentru a răspunde la această întrebare trebuie să analizăm tabelul de date.

În prima coloană a acestui tabel sînt trecute în ordine crescătoare notele elevilor iar în coloana a 3-a frecvențele relative corespunzătoare.

Numărul elevilor care au obținut nota 6 este egal cu 5.

Ținînd seama de notațiile introduse putem scrie :

$$n = 5, N = 20.$$

Frecvența relativă f este raportul dintre numărul elevilor care au obținut nota 6 și numărul elevilor din clasă.

Prin urmare :

$$f = \frac{n}{N} = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}.$$

Exprimarea frecvenței relative în procente

Pentru a exprima acest raport în procente, folosim regula de trei simplă.

$$\begin{array}{r} 20 \dots\dots\dots 100 \\ 5 \dots\dots\dots x \\ \hline x = \frac{5}{20} \times 100 = 25\% \end{array}$$

Din analiza acestui exemplu simplu rezultă că exprimarea în procente se face înmulțind frecvența relativă cu numărul 100.

Se mai constată că suma tuturor frecvențelor relative ale unei serii statistice este egală cu 1.

$$\frac{1}{20} + \frac{2}{20} + \frac{3}{20} + \frac{5}{20} + \frac{4}{20} + \frac{4}{20} + \frac{1}{20} = \frac{20}{20} = 1$$

Valori	Frecvențe absolute	Frecvențe relative
3	1	$\frac{1}{20}$
4	2	$\frac{2}{20}$
5	3	$\frac{3}{20}$
6	5	$\frac{5}{20}$
7	4	$\frac{4}{20}$
8	4	$\frac{4}{20}$
9	1	$\frac{1}{20}$

6.4. POLIGONUL DE FRECVENȚĂ

Valorile datelor de observație sau ale măsurărilor pot fi reprezentate grafic în raport cu un sistem cartezian de coordonate

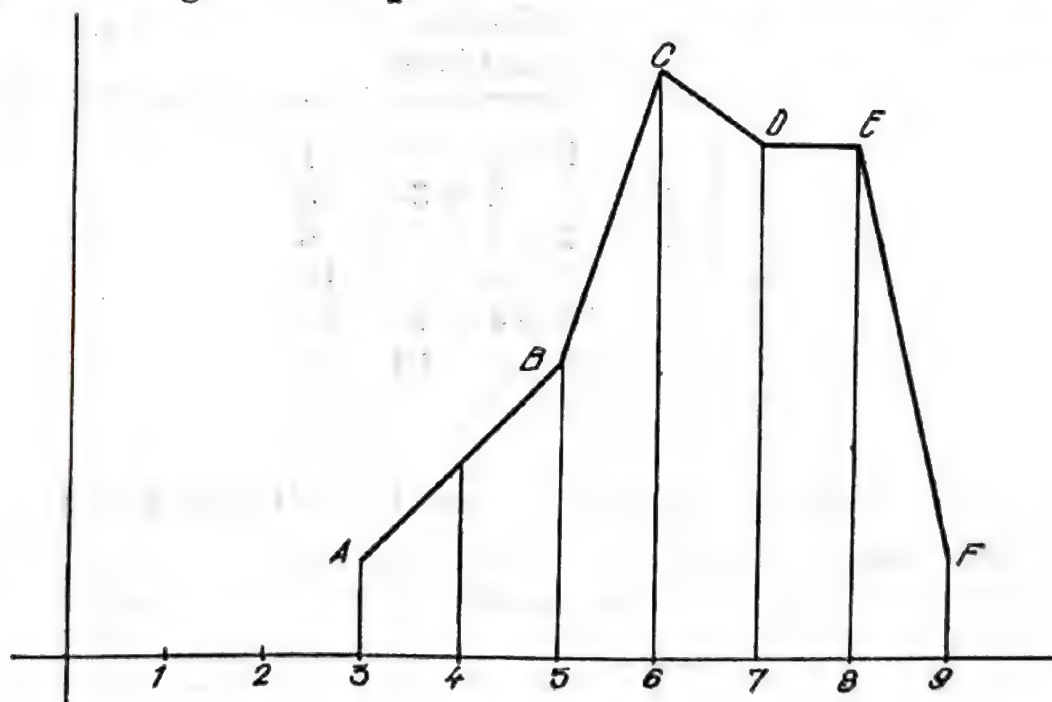


Fig. 6.1

astfel : pe axa orizontală se reprezintă prin puncte valorile măsurătorilor sau ale datelor de observație (fig. 6.1). În aceste puncte se ridică perpendiculare pe axa orizontală pe care se măsoară segmente proporționale cu frecvențele respective. Se obțin punctele A, B, C, D, E, F .

Se unesc punctele astfel obținute și se obține o linie poligonală numită poligonul frecvențelor.

6.5. FRECVENȚE CUMULATE

În anumite măsurători este foarte important să cunoaștem nu numai frecvențele corespunzătoare unei anumite valori, a caracteristicilor studiate, ci mai ales suma tuturor frecvențelor anterioare.

De exemplu, dacă analizăm rezultatele la lucrarea scrisă la matematică a elevilor unei clase este interesant de aflat câți elevi nu au obținut note de trecere, adică mai mici decât 5.

Din analiza tabelului 1 de date, noi constatăm că nota cinci este cea de a treia valoare din șirul crescător al valorilor.

Frecvența absolută corespunzătoare acestei valori este $n_3 = 3$.

Pentru a afla numărul elevilor care au obținut mai puțin decât nota 5, trebuie să adunăm efectivele corespunzătoare notelor mai mici decât 5, adică efectivele corespunzătoare lui $x_1 = 3$ și $x_2 = 4$.

Prin urmare, vom avea :

$$1 + 2 = 3.$$

Frecvențele cumulate se calculează în tabelul alăturat.

x	n	Efective cumulate	
3	1	1	1
4	2	$1 + 2 = 3$	3
5	3	$3 + 3 = 6$	6
6	5	$6 + 5 = 11$	11
7	4	$11 + 4 = 15$	15
8	4	$15 + 4 = 19$	19
9	1	$19 + 1 = 20$	20

6.6. DESCRIEREA NUMERICĂ A DATELOR STATISTICE

Pentru a descrie cantitativ măsurătorile sau datele de observație este necesar să definim anumite mărimi, caracteristice, ale unei serii statistice.

Printre aceste mărimi distingem unele care ne informează asupra tendințelor centrale ale unei distribuții, indicând ordinul de

mărimii al elementelor unei serii statistice. Cele mai frecvent utilizate sînt : modul, mediana, media aritmetică.

6.6.1. MODUL

Modul este acea valoare a datelor de observație sau măsurători care corespunde frecvenței celei mai ridicate.

Modul este o valoare care se află direct din tabelul de date.

În tabel efectivul cel mai ridicat sau frecvența cea mai mare este $n = 10$.

Nota corespunzătoare acestei frecvențe este : $x = 5$. Prin urmare modul este egal cu 5.

Modul se poate citi direct și pe un grafic dacă s-a întocmit poligonul de frecvență (fig. 6.2).

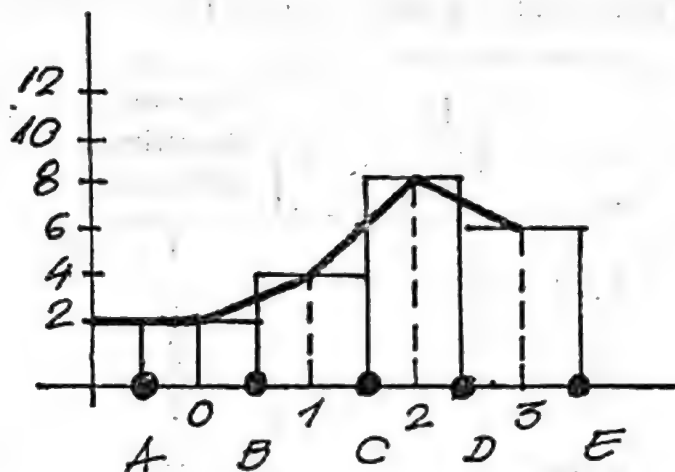


Fig. 6.2

Pentru aceasta nu este nevoie de nici un calcul.

x	Valoarea efectivă	x
x_1	2	1
x_2	4	4
x_3	5	10
x_4	6	5
x_5	7	6
x_6	8	4

6.6.2. MEDIANA

Mediana este acea valoare x a datelor de observație sau măsurătorilor caracteristice care împarte în două părți egale efectivele populației studiate.

Mediana unei serii este un număr x , astfel că există tot atâtea unități corespunzătoare valorilor $< x$, ca și cele corespunzătoare valorilor $> x$.

Mediana se află după ce în prealabil valorile observațiilor au fost scrise în ordine crescătoare.

Prin urmare mediana are aceea valoare a măsurătorilor ce corespunde valorii $\frac{1}{2}$ a frecvenței relative cumulate.

Exemplu :

S-au măsurat înălțimile a 7 copii și s-au găsit următoarele valori : 1,62 ; 1,68 ; 1,70 ; 1,74 ; 1,76 ; 1,78 ; 1,80.

Efectivul corespunzător fiecărei valori a proprietății caracteristice este 1. Pentru a se afla mediana se întocmește tabloul de distribuție al frecvențelor cumulate (vezi tabelul)

x_i	Efective cumulate	Frecvențe cumulate relative
1,62	1	$\frac{1}{7}$
1,68	2	$\frac{2}{7}$
1,70	3	$\frac{3}{7}$
1,74	4	$\frac{4}{7}$
1,76	5	$\frac{5}{7}$
1,78	6	$\frac{6}{7}$
1,80	7	$\frac{7}{7}$

Din acest tablou se observă că frecvența cumulată relativă apropiată de valoarea $\frac{1}{2}$ este cea careia îi corespunde o valoare a proprietății caracteristice egală cu 1,74.

Prin urmare valoarea medianei este de 1,74 sau $M = 1,74$.
Această valoare se poate stabili și direct din datele de observație așezate în ordine crescătoare.

1,62; 1,68; 1,70; 1,74; 1,76; 1,78; 1,80.

În cazul în care avem un număr par de măsurători sau date atunci mediana se stabilește făcând media a două valori succesive egal depărtate de valorile extreme ale seriei de date.

Exemplu:

Înălțimile a șase elevi așezate în ordine descrescătoare sînt : 1,88; 1,76; 1,74; 1,72; 1,70; 1,65.

$$M = \frac{1,74 + 1,72}{2} = 1,73.$$

Dacă o valoare a caracteristicii (a proprietății) este luată de mai multe ori, atunci se află jumătate din volumul eșantionului și se caută valorile efective cumulate apropiate de aceste valori.

Valoarea proprietății caracteristice corespunzătoare acestor frecvențe cumulate este mediana.

x_i	Efective	Frecvențe cumulate
1	5	$\frac{5}{30}$
2	15	$\frac{15}{30}$
3	18	$\frac{18}{30}$
4	5	$\frac{5}{30}$
5	7	$\frac{7}{30}$

$$N = 30$$

În acest tabel pe prima coloană sînt trecute punctele obținute la probele de control la matematică de treizeci de elevi ai unei clase. Probele au fost apreciate cu puncte de la 0 la 5.

Prin împărțirea lui 30 la 2 se obține 15.

Valorii de 15 unități a efectivelor cumulate îi corespunde valoarea $x_1 = 2$ a proprietății caracteristice.

Prin urmare : $M = 2$.

Mediana se poate determina și grafic observînd diagrama cumulativă a frecvenței.

Mediana este acea valoare a proprietății caracteristice care corespunde punctului de pe diagrama cumulativă, care marchează valoarea $\frac{1}{2}$ a frecvenței cumulative (fig. 6.3).

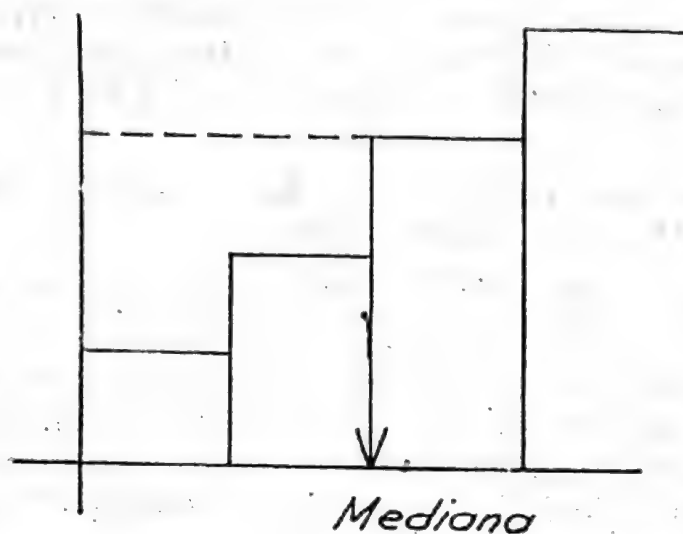


Fig. 6.3

6.6.3. MEDIA ARITMETICĂ

Să presupunem că un elev a obținut la examinarea orală de matematică notele :

8, 6, 8, 6, 8, 6.

Se cere să se calculeze media notelor la matematică.

Pentru a afla media notelor obținute de elev se împarte suma notelor la numărul total al notelor și obținem :

$$x = \frac{8 + 6 + 8 + 6 + 8 + 6}{6} = 7.$$

Media aritmetică a acestor rezultate se mai poate calcula astfel :

$$x = \frac{8 \cdot 3 + 6 \cdot 3}{6} = \frac{42}{6} = 7.$$

În produsul $8 \cdot 3$, numărul 3 ne arată numărul notelor de 8, iar în produsul $6 \cdot 3$ numărul 3 ne arată numărul notelor de 6.

Se întocmește o serie statistică a notelor obținute.

Media aritmetică a mai multor măsurători se obține împărțind suma produselor dintre valorile datelor de observație sau ale măsurătorilor și frecvențelor corespunzătoare la volumul sau numărul total al valorilor obținute din măsurători.

Exemplu:

Performanțele obținute de 20 elevi la o probă de matematică au fost exprimate în puncte astfel :

18, 17, 16, 16, 18, 16, 16, 20, 18, 17, 17, 18, 16, 18, 16, 16, 17, 20, 18, 18.

Să se afle scorul mediu.

Pentru a calcula scorul mediu se întocmește o serie statistică a rezultatelor obținute :

x	f	$x \times f$
16	7	$7 \times 16 = 112$
17	4	$4 \times 17 = 68$
18	7	$7 \times 18 = 126$
19	0	$19 \times 0 = 0$
20	2	$20 \times 2 = 40$

$$x = \frac{7 \times 16 + 4 \times 17 + 7 \times 18 + 20 \times 2}{7 + 4 + 7 + 2} =$$

$$= \frac{112 + 68 + 126 + 40}{20} = \frac{346}{20} = 17,3.$$

6.7. EXERCİȚIU REZOLVAT

Să presupunem că trei monede sînt aruncate simultan de 20 ori și se notează de fiecare dată numărul de apariții ale mării. Numărul de apariții ale mării este notat, pentru fiecare experiment, după ordinea de apariție a evenimentelor, astfel :

1	2	3	2	1
0	3	2	0	2
1	2	0	3	1
3	0	2	2	1

Vom alcătui un tabel care cuprinde o coloană cu numărul de apariții ale mării la fiecare aruncare a celor trei monede, iar a doua coloană frecvențele corespunzătoare. Frecvența corespunzătoare valorii 0 ne arată de cîte ori nu a ieșit marca în cele 20 de aruncări. Frecvența corespunzătoare valorii 1 ne arată de cîte ori a ieșit o dată marca în cele 20 de aruncări consecutive. Frecvența corespunzătoare valorii 2 ne arată de cîte ori a ieșit de două ori marca în cele 20 de aruncări consecutive ș.a.m.d.

Vom marca printr-o liniuță (/) fiecare eveniment. Numărul de liniuțe ne dă numărul de apariții ale evenimentului corespunzător sau frecvența :

Nr. de mărci	Apariții	Frecvențe
0	////	4
1	////	5
2	////////	7
3	////	4

Datele redată în tabel pot fi reprezentate în mai multe moduri. Cel mai simplu mijloc este cu ajutorul poligonului de frecvențe.

În locul poligonului de frecvențe se poate folosi o linie de frecvențe, astfel : se marchează printr-un punct mijlocul fiecărui segment AB, BC, CD, DE și în punctele astfel obținute se ridică perpendiculare pe axa Ox . Se marchează punctele astfel obținute și se unesc apoi printr-o linie. Se obține histograma sau linia poligonală a frecvențelor.

Media aritmetică a numărului de apariții a mărcii se notează cu x și se calculează astfel : se efectuează suma produselor dintre numerele care arată de câte ori a ieșit marca la fiecare aruncare și frecvența corespunzătoare, care se împarte la suma frecvențelor.

$$x = \frac{0 \cdot 4 + 1 \cdot 5 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 4}{4 + 5 + 7 + 4} = \frac{5 + 14 + 12}{20} = \frac{31}{20}.$$

6.8. EXERCIIȚII ȘI PROBLEME

1. Valorile obținute în urma unor măsurători sînt :

17, 45, 38, 27, 6, 48, 11, 57.

Să se așeze aceste valori în ordine crescătoare apoi în ordine descrescătoare.

Să se calculeze distanța.

2. Rezultatele examinării lucrărilor scrise la matematică ale elevilor unei clase sînt date în tabelul următor :

10, 9, 4, 5, 8, 3, 7, 8, 9,

5, 8, 7, 5, 7, 9, 8, 6, 7, 8,

6, 8, 5, 7, 6, 8, 5, 4, 3, 10.

Să se alcătuiască un tablou de distribuție în care să fie trecute frecvențele absolute.

Să se alcătuiască un tablou de distribuție care să cuprindă frecvențele cumulate.

3. S-au măsurat înălțimile elevilor într-o clasă și s-au găsit următoarele valori (în m) :

1,55 ; 1,58 ; 1,60 ; 1,61 ; 1,62 ; 1,64 ;

1,65 ; 1,60 ; 1,62 ; 1,64 ; 1,66 ; 1,66 ;

1,61 ; 1,66 ; 1,69 ; 1,71 ; 1,66 ; 1,66.

Să se alcătuiască un tabel în care să se treacă frecvențele absolute și apoi frecvențele relative.

4. S-a măsurat productivitatea anuală a unor pomi evaluată în kg fructe pe pomi și s-au găsit următoarele rezultate :

11 ; 35 ; 24 ; 32 ; 14 ; 22 ; 5 ; 24 ;

26 ; 8 ; 15 ; 38 ; 7 ; 38 ; 12 ; 25 ;

13 ; 34 ; 26 ; 7 ; 18 ; 33 ; 24 ; 6 ;

15 ; 23 ; 35 ; 12 ; 26 ; 32 ; 28 ; 36 ;

24 ; 25 ; 23 ; 32 ; 35 ; 31 ; 34 ; 22 ;

26 ; 35 ; 21 ; 30.

a) aranjați aceste înregistrări în intervale de câte 10 ;

b) să se alcătuiască apoi un tabel de distribuție a valorilor pe clase, care cuprinde :

1) clasele de interval,

2) valoarea centrală a claselor,

3) efectivele.

c) să se construiască o histogramă a acestor date.

5. Folosiți datele din problema precedentă și calculați frecvențele relative corespunzătoare pentru fiecare clasă.

Capitolul 7

PROBABILITĂȚI

7.1. NOȚIUNEA DE EVENIMENT

În natură și în viața noastră au loc diferite întâmplări. De exemplu astăzi plouă, colegul meu de bancă a fost ascultat la matematică, mi-a scăpat stiloul, am aruncat o monedă și a căzut „stema” etc.

Înțelegem prin eveniment rezultatul unei experiențe sau al unei observații. Dacă aruncăm un zar, constatăm că a căzut una din cele șase fețe ale zarului. Oricare ar fi rezultatul acestei experiențe, vom spune că a avut loc un anumit eveniment.

Evenimente sigure, posibile, imposibile. Unele dintre evenimentele pe care le-am amintit sînt sigure : „Ziua se face lumină, noaptea se face întuneric”.

Alte evenimente sînt numai posibile dar nu sigure : „Mîine s-ar putea să merg la teatru”. „Aruncînd o monedă, s-ar putea să cadă stema”. Oricare din aceste evenimente poate să aibă sau să nu aibă loc. De aceea le vom numi *evenimente posibile*.

În alte cazuri trebuie să vorbim de evenimente imposibile. Într-o urnă punem 3 bile negre. Este imposibil să scoatem din urnă o bilă albă.

7.2. MULȚIMEA EVENIMENTELOR UNUI EXPERIMENT

Să considerăm experimentul ce constă din aruncarea unei monezi.

Să notăm cu M evenimentul ce constă din apariția mărcii și cu S evenimentul determinat de apariția stemei.

Evenimentele acestui experiment sînt :

$$\{\{S\}; \{M\}; \{S, M\}; \emptyset\}$$

$\{S\}$ — apariția stemei ;

$\{M\}$ — apariția mărcii ;

$\{S, M\}$ — apariția mărcii sau apariția stemei ;

\emptyset — evenimentul imposibil, adică apariția simultană a mărcii și stemei.

Evenimentul $\{S, M\}$ adică apariția mărcii sau stemei se numește un eveniment sigur, deoarece el se produce în mod sigur (apare marca sau stema — altă posibilitate nu există în acest experiment). Evenimentul \emptyset care constă în apariția simultană a mărcii și stemei se numește evenimentul imposibil, deoarece nu pot apărea simultan marca și stema — apariția unuia din evenimente exclude posibilitatea apariției celuilalt. Evenimentele $\{S\}$ și $\{M\}$ sînt evenimente contrare, deoarece apariția unui eveniment exclude apariția celuilalt.

Exemplu :

Să considerăm experimentul ce constă din aruncarea a două monede. Mulțimea tuturor evenimentelor posibile este :

$\{\{M, S\}, \{M, M\}, \{S, M\}, \{S, S\}\}$;

$\{M, S\}$ — este evenimentul ce constă din apariția mărcii la prima monedă și apariția stemei la cea de-a doua monedă.

$\{M, M\}$ — este evenimentul ce constă din apariția mărcii la prima monedă și apariția mărcii la cea de-a doua monedă.

$\{S, M\}$ — este evenimentul ce constă din apariția stemei la prima monedă și apariția mărcii la cea de-a doua monedă.

$\{S, S\}$ — este evenimentul ce constă din apariția stemei la prima monedă și apariția tot a stemei la cea de-a doua monedă.

7.3. PROBABILITATEA UNUI EVENIMENT

Să presupunem că într-o cutie se află 4 bile albe și 4 bile roșii. Să cercetăm care este șansa ca la o extragere a unei bile din cutie să obținem o bilă roșie. Să notăm cu A evenimentul care constă în extragerea unei bile albe și cu B evenimentul care constă în extragerea bilei roșii.

Numărul de probe care realizează evenimentul A este 4, deoarece avem 4 bile albe în cutie. Numărul de probe care realizează evenimentul B este tot 4, deoarece avem 4 bile roșii. Prin urmare avem șanse egale de a extrage o bilă roșie sau o bilă albă, deoarece numărul bilelor albe este egal cu numărul bilelor roșii. Dacă într-o cutie avem 4 bile albe și o bilă roșie, atunci șansa de a obține la o extragere o bilă albă este mai mare decât cea de a obține o bilă roșie, deoarece numărul bilelor albe este mai mare decât numărul bilelor roșii. Ne propunem să exprimăm printr-un număr șansa de a se realiza un eveniment. Din exemplul mai sus arătat, observăm că numărul care măsoară șansa de realizare a unui eveniment depinde în mod evident de numărul probelor care realizează evenimentul. Dacă numărul probelor care realizează un anumit eveniment este mare, atunci și numărul care măsoară șansa este mare. Prin urmare numărul care măsoară șansa de realizare a unui eveniment este direct proporțional cu numărul de probe ce realizează evenimentul, adică cu numărul de cazuri favorabile.

Să presupunem acum că avem două cutii. În prima cutie, notată A , avem 4 bile roșii și 5 bile albe, iar în a doua cutie, notată B , avem 4 bile roșii și 10 bile albe. Să comparăm șansele de a extrage o bilă roșie din cutia A și cutia B .

Este evident că șansa de a extrage o bilă roșie din cutia A este mai mare decât șansa de a extrage o bilă roșie din cutia B .

Prin urmare numărul care exprimă șansa de a realiza un eveniment este invers proporțional cu numărul tuturor probelor posibile, adică cu numărul evenimentelor posibile.

Numărul care exprimă șansa de realizare a unui eveniment se exprimă printr-un raport care are la numărător numărul de cazuri favorabile, iar la numitor numărul de cazuri posibile, când toate cazurile sînt egal posibile.

Acest raport se numește *probabilitate*.

Exemplu :

Într-o cutie avem 8 bile albe și 6 bile negre. Care este probabilitatea de a extrage la întîmplare o bilă albă?

Să notăm cu A evenimentul ce constă din extragerea unei bile albe și cu B evenimentul ce constă din extragerea unei bile negre.

Să notăm cu $P(A)$ probabilitatea evenimentului A .

$$P(A) = \frac{\text{numărul cazurilor favorabile}}{\text{numărul cazurilor posibile}}$$

Numărul cazurilor favorabile = 8, deoarece avem 8 bile albe.

Numărul cazurilor posibile = 14, deoarece avem în total 14 bile : 8 albe și 6 negre.

Prin urmare :

$$P(A) = \frac{8}{14} = \frac{4}{7}.$$

În mod asemănător :

$$P(B) = \frac{6}{14} = \frac{3}{7}.$$

Probabilitatea unui eveniment se exprimă totdeauna printr-o fracție subunitară.

7.4. PROBABILITATEA EVENIMENTELOR SIGURE ȘI IMPOSIBILE

Exemplu. Introducem într-o cutie 5 bile negre. Firește, extragerea unei bile negre este în acest caz un eveniment sigur. Numărul cazurilor favorabile este egal cu numărul cazurilor posibile și deci :

$$P(N) = \frac{5}{5} = 1$$

Dar o bilă albă am putea extrage din această cutie? Firește că nu. Extragerea unei bile albe este un eveniment imposibil în această experiență. Nu există nici un caz favorabil, $P(A) = \frac{0}{5} = 0$.

Putem avea mai multe cazuri favorabile decât posibile? Evident că nu. Probabilitatea nu poate depăși valoarea 1. De aici tragem următoarele concluzii :

Probabilitatea evenimentului imposibil este egală cu 0. Probabilitatea evenimentului sigur este egală cu 1. Probabilitatea unui eveniment oarecare A este un număr avînd o valoare între 0 și 1. Deci : $0 \leq P(A) \leq 1$.

7.5. PROBABILITATEA EVENIMENTELOR COMPUSE

Să presupunem că într-un anumit joc se aruncă împreună două monede. Una de 25 bani și alta de un leu. Ne întrebăm care este probabilitatea să apară stemele. Pentru a afla această probabilitate trebuie să cunoaștem toate rezultatele posibile care se pot obține la aruncarea celor două monede.

1. Ambele monede arată stema, eveniment pe care-l notăm $\{S, S\}$

2. Ambele monede arată banul, eveniment pe care-l notăm $\{B, B\}$

3. Prima monedă arată stema și cea de-a doua banul $\{S, B\}$.

4. Prima monedă arată banul, iar cea de-a doua stema, eveniment care se notează cu $\{B, S\}$.

Evenimentele posibile pot fi reprezentate sub forma unei scheme :

Prima monedă	A doua monedă	Rezultate
--------------	---------------	-----------

$\{S\}$	$\{S\}$	$\{S, S\}$
---------	---------	------------

$\{B\}$	$\{B\}$	$\{B, B\}$
---------	---------	------------

$\{S\}$	$\{B\}$	$\{S, B\}$
---------	---------	------------

$\{B\}$	$\{S\}$	$\{B, S\}$
---------	---------	------------

Mulțimea tuturor evenimentelor posibile este :

$\{SS; BB; SB; BS\}$.

Numărul total al cazurilor posibile este 4. Să aflăm probabilitatea de realizare a evenimentului $\{S, S\}$.

$$P_{\{S,S\}} = \frac{1}{4}.$$

7.6. LEGĂTURA DINTRE FRECVENȚĂ ȘI PROBABILITATE

Să aruncăm un zar de 30 de ori și să considerăm rezultatele într-un tabel în modul următor :

Fața	Frecvențe absolute	Frecvențe relative
1	//// 4	$\frac{4}{30}$
2	//// 4	$\frac{4}{30}$
3	///// 6	$\frac{6}{30} = \frac{1}{5}$
4	///// 5	$\frac{5}{30} = \frac{1}{6}$
5	///// 6	$\frac{6}{30} = \frac{1}{5}$
6	///// 5	$\frac{5}{30} = \frac{1}{6}$

Frecvența absolută a unei valori x a caracteristicii, este numărul de unități ale populației corespunzătoare acelei valori.

Numărul de apariții al feței îl însemnăm pe coloana frecvențelor relative prin câte o liniuță. Frecvența absolută este raportul dintre frecvența relativă și numărul total al cazurilor sau efectivul total al populației.

Frecvența apariției numărului 3 în acest experiment este egală cu $\frac{6}{30} = \frac{1}{5}$.

Probabilitatea ca la o aruncare a zarului să apară fața numărului 3 este :

$$P(A) = \frac{1}{6}$$

Frecvența unui eveniment ca urmare a unei experiențe repetate se află împărțind numărul de cazuri în care evenimentul s-a produs la numărul total de experiențe efectuate.

Probabilitatea de apariție a numărului 3 este $P(A) = \frac{1}{6}$ și ea se calculează înainte de efectuarea experienței. Frecvența se calculează pe baza datelor obținute din experiență.

Constatăm că pentru un număr mare de experiențe frecvența (adică $\frac{1}{5}$) se apropie de probabilitate (adică $\frac{1}{6}$).

7.7. UTILIZAREA DIAGRAMELEOR PENTRU A REPREZENTA MULȚIMEA TUTUROR EVENIMENTELOR POSIBILE ALE UNUI EXPERIMENT

În toate experiențele noastre este necesar să numărăm evenimintele posibile.

Exemplul 1

Să considerăm o mulțime M , formată din salariații unui serviciu :

$$M = \{\text{Ion} ; \text{Maria} ; \text{Petre} ; \text{Ileana} ; \text{Gheorghe}\}.$$

Pentru o manifestație trebuie să participe o pereche formată dintr-o femeie și un bărbat. Câte perechi se pot forma ?

Soluție Pentru fiecare alegere posibilă a unui bărbat există câte două alegeri posibile ale unei femei, după următoarea schemă (fig. 7.1) :

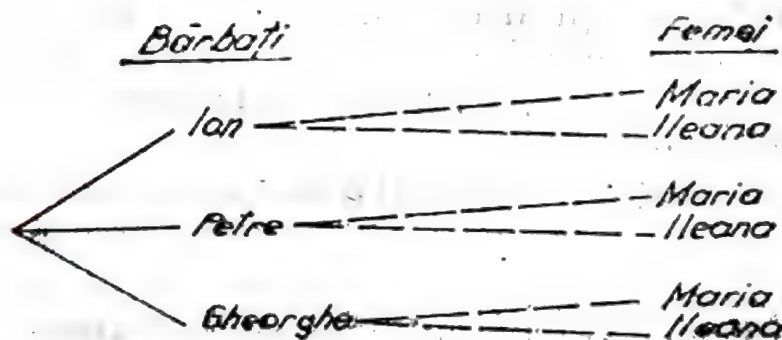


Fig. 7.1

Prin urmare, sînt șase perechi posibile (evenimente posibile) după cum urmează :

Ion — Maria	Petre — Maria	Gheorghe — Maria
Ion — Ileana	Petre — Ileana	Gheorghe — Ileana

Exemplul 2

Se consideră experimentul ce constă din aruncarea consecutivă a două monede. Să se afle mulțimea tuturor evenimentelor posibile.

Soluție Fiecărui eveniment ce constă din apariția la prima față a mărcii (M) sau a stemei (S) îi corespund două evenimente posibile ce se realizează la aruncarea celei de-a doua monede marca (M) sau stema (S), după următoarea diagramă (fig. 7.2) :

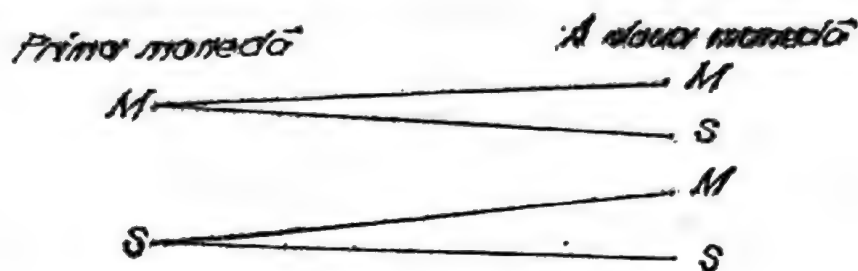


Fig. 7.2

Prin urmare, mulțimea tuturor evenimentelor posibile este :

$MM; MS; SM; SS.$

Exemplul 3

Se consideră evenimentul ce constă din aruncarea consecutivă a trei monede. Să se afle mulțimea tuturor evenimentelor posibile.

Soluție Urmînd un raționament analog cu cel din exercițiul precedent, obținem (fig. 7.3) :

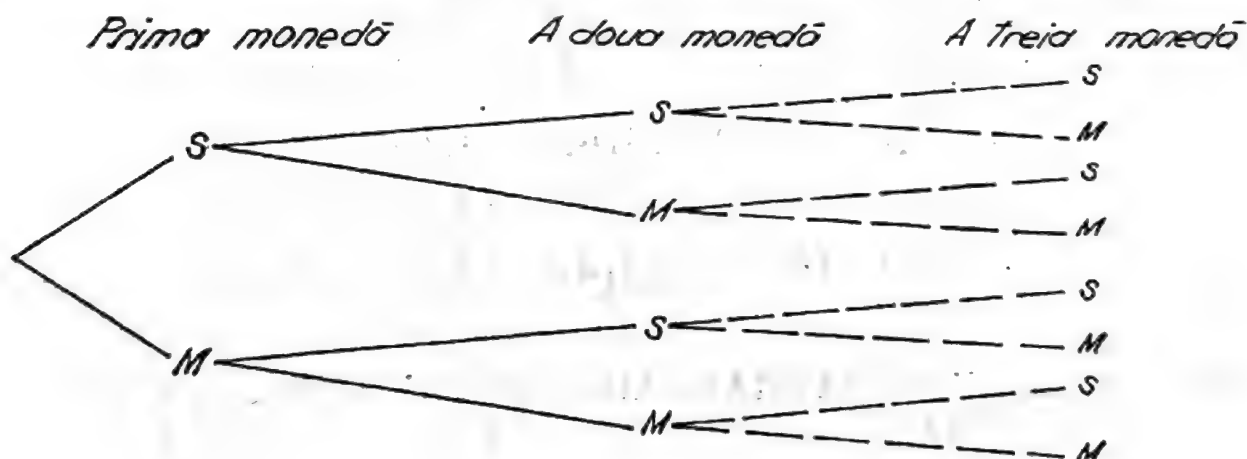


Fig. 7.3

Mulțimea tuturor evenimentelor posibile este :

$(S; S; S); (S; S; M); (S; M; S); (S; M; M)$
 $(M; S; S); (M; S; M); (M; M; S); (M; M; M)$

Exemplul 4

O cutie conține două bile roșii și trei albe. Se consideră experimentul ce constă din extragerea consecutivă a două bile, fără ca bila extrasă să fie reintrodusă în cutie.

Să se alcătuiască mulțimea tuturor evenimentelor posibile.

Soluție Pentru a identifica mai ușor bilele, vom însemna bilele roșii prin R_1 și R_2 , iar bilele albe prin A_1, A_2, A_3 .

Diagrama tuturor evenimentelor posibile este următoarea (fig. 7.4):

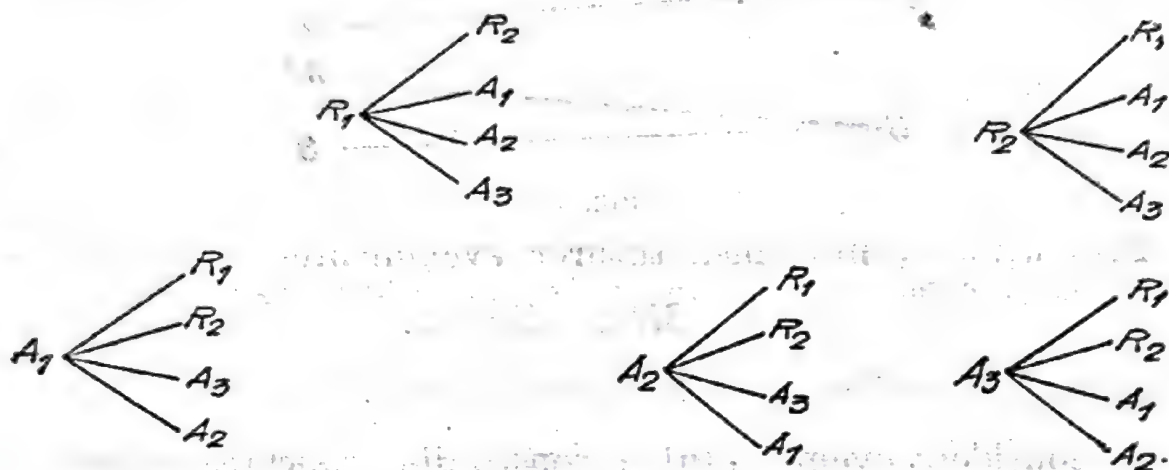


Fig. 7.4

Mulțimea tuturor evenimentelor posibile este :

$$\begin{aligned}
 & (R_1 R_2) \quad (R_2 R_1) \quad (A_1 R_1) \quad (A_2 R_1) \quad (A_3 R_1) \\
 & (R_1 A_1) \quad (R_2 A_1) \quad (A_1 R_2) \quad (A_2 R_2) \quad (A_3 R_2) \\
 & (R_1 A_2) \quad (R_2 A_2) \quad (A_1 A_2) \quad (A_2 A_1) \quad (A_3 A_1) \\
 & (R_1 A_3) \quad (R_2 A_3) \quad (A_1 A_3) \quad (A_2 A_3) \quad (A_3 A_2).
 \end{aligned}$$

7.8. UTILIZAREA DIAGRAMELOR PENTRU CALCULUL PROBABILITĂȚILOR

Se aruncă consecutiv două monede. Să se afle :

1. probabilitatea ca să apară de două ori marca;
2. probabilitatea ca să apară o dată marca;
3. probabilitatea ca să apară de două ori stema.

Soluție Vom însemna cu M evenimentul apariției mărcii și cu S evenimentul apariției stemei. Obținem următoarea diagramă (fig. 7.5).

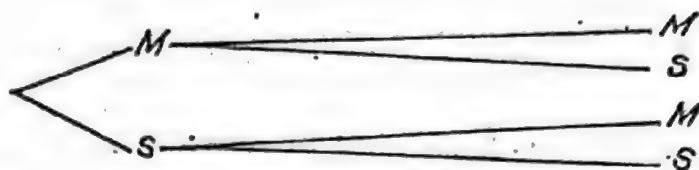


Fig. 7.5

Mulțimea evenimentelor este :

$\{MM\}; \{MS\}; \{SM\}; \{SS\}$

Evenimente : Probabilități :

2 mărci	$\frac{1}{4}$
1 marcă	$\frac{2}{4}$
0 mărci	$\frac{1}{4}$

7.9. EXERCIIȚII ȘI PROBLEME

1. Se aruncă o monedă. Să se afle mulțimea tuturor rezultatelor posibile. Să se determine care sînt evenimentele contrare.

2. Să se afle probabilitatea evenimentelor pe care le notăm cu literele A ; B ; C .

A — oamenii locuiesc pe planeta Marte ;

B — elevii au vacanță vara ;

C — soarele apune dimineața.

3. Într-o cutie sînt 5 bile : 2 albe, 1 roșie, 1 galbenă, 1 albastră. Care este probabilitatea de a extrage o bilă albă ? Dar o bilă galbenă ? Dar una roșie ?

4. Într-o cutie sînt 4 bile roșii și 5 galbene. Care este probabilitatea de a extrage o bilă roșie ? Dar una galbenă ?

5. Într-o cutie se află 2 bile albe și 2 negre. Se extrag la întîmplare 2 bile. Să se arate mulțimea tuturor evenimentelor posibile. Care este probabilitatea de a extrage 2 bile albe ?

6. Se aruncă la întîmplare 3 monede. Care este probabilitatea de a obține pe toate fețele o stemă ?

7. Se aruncă la întâmplare un zar. Care este probabilitatea să arate un număr divizibil cu 4?

8. Dintr-un colectiv de elevi format din 10 băieți și 20 de fete se alege la întâmplare un elev. Care este probabilitatea ca elevul ales să fie fată? Care este probabilitatea să fie băiat?

9. Se aruncă un zar. Care este probabilitatea ieșirii unui număr cu soț de puncte? Dar a unui număr fără soț de puncte?

10. Într-o familie sînt trei copii. Care este probabilitatea ca toți copiii să fie băieți? Care este probabilitatea ca toți copiii să fie fete? (Se presupune că probabilitatea de a se naște un băiat este egală cu probabilitatea de a se naște o fată.)

11. Din literele cuvîntului „abecedar” se alege la întâmplare una. Care este probabilitatea ca litera aleasă să fie a ? Care este probabilitatea ca litera aleasă să fie b ?

12. Se aruncă o monedă și apoi se aruncă un zar. Să se alcătuiască schema grafică a tuturor evenimentelor posibile și apoi să se determine numărul tuturor evenimentelor posibile. (Se notează cu M evenimentul „apariția marcii” și cu S evenimentul „apariția stemei”).

13. Se aruncă trei monede. Să se alcătuiască schema corespunzătoare acestui experiment și apoi să se determine numărul tuturor evenimentelor posibile.

14. Se aruncă două zaruri. Să se determine probabilitatea ca să iasă dublă (prin dublă se înțelege evenimentul ca pe ambele zaruri să iasă același număr).

15. Se aruncă două zaruri. Să se determine probabilitatea ca suma numerelor ieșite pe ambele zaruri să fie egală cu 10. ($a + b = 10$).

16. Se aruncă două zaruri: unul alb și altul galben. Care este probabilitatea ca pe zarul alb să iasă mai puțin de 3 puncte și pe zarul galben mai mult de 3 puncte.

17. Se aruncă două zaruri: unul alb și altul negru. Să notăm cu a numărul punctelor ce apar pe zarul alb și cu r numărul punctelor ce apar pe zarul roșu. Fie $a + r < 6$ evenimentul ce constă din apariția a două numere a căror sumă este mai mică decît 6; $a + r \geq 6$ evenimentul ce constă din apariția a două numere a căror sumă este mai mare sau cel puțin egală cu 6. Să se calculeze: $P(a + r = 6)$; $P(a + r \leq 6)$; $P(a + r \geq 6)$. Observații: Prin no-

tația $P(a + r = 6)$ înțelegem probabilitatea ca suma numerelor ieșite să fie egală cu 6.

18. Se aruncă două zaruri : unul alb și altul roșu. Folosind notațiile din exercițiul precedent să se descrie evenimentele :

- a) Neieșirea dublei ;
- b) Numărul punctelor de pe zarul alb este cu doi mai mic decât numărul punctelor de pe zarul roșu ;
- c) Numărul punctelor de pe zarul alb este de două ori mai mare decât numărul punctelor de pe zarul roșu.

Să se determine probabilitatea corespunzătoare acestor evenimente.

19. Numerele de la 1 la 15 sînt notate pe 15 mingi, cîte unul pe fiecare minge. Se alege la întîmplare o minge. Să se calculeze probabilitatea ca numărul notat pe această minge :

- a) Să se împartă la 5 ;
- b) Să fie număr cu soț ;
- c) Să fie număr fără soț ;
- d) Să fie un pătrat perfect ;
- e) Să fie format din două cifre.

20. Într-o urnă sînt de 6 ori mai multe bile albe decât roșii. Se extrage la întîmplare o bilă. Care este probabilitatea ca bila extrasă să fie roșie ?

Capitolul 8

LOGICA MATEMATICĂ

În matematică, precum dealtfel și în vorbirea obișnuită, noi facem anumite afirmații sau raționamente cu ajutorul propozițiilor.

Exemple :

Numărul 4 este mai mare decât numărul 2. Suma numerelor 4 și 5 este numărul natural 9.

Alcătuirea corectă a acestor propoziții se face cu respectarea anumitor reguli, care uneori sînt formulate explicit, iar altele se învață prin deprinderi.

Propozițiile sînt grupări de semne sau simboluri, care pot exprima și anumite acțiuni sau relații dintre obiecte.

Simbolurile numerice $1; 2; 3; 6$, numele proprii Ion, Petre, Gheorghe, expresiile $1 + 4; 1 + 2; 1 + 5; 4 + 2$, se numesc *constante* deoarece desemnează obiecte fixe și bine determinate.

Putem ajunge la unul și același obiect dacă îl desemnăm prin doi termeni diferiți.

De exemplu

$$8 - 4 \text{ și } 2 + 2; 3 + 1 \text{ și } 2 + 2;$$

Capitala Angliei și Londra;

Prin convenție se folosește semnul $=$ (numit egal) scris între doi termeni care desemnează același obiect.

Prin urmare, putem scrie :

$$8 - 4 = 2 + 2; 3 + 1 = 2 + 2.$$

Aceste expresii se numesc egalități.

8.1. ALGEBRA PROPOZIȚIILOR

Logica operează cu propoziții simple și compuse. În algebra propozițiilor se studiază valoarea logică a propozițiilor logice compuse, în funcție de valorile logice ale propozițiilor simple care le alcătuiesc.

8.2. TABLOUL DE ADEVĂR

În cele ce urmează vom considera numai propozițiile care au două valori de adevăr : adevărul pe care-l notăm cu litera A și falsul pe care-l notăm cu litera F .

În primul caz spunem că valoarea logică a propoziției este adevărul, în al doilea caz este falsul.

Valorile logice ale unei propoziții pot fi reprezentate printr-o schemă :

P
A
F

În primul rând se scrie notația prescurtată a unei propoziții oarecare „ P ”, în rândul doi și trei se trec valorile de adevăr corespunzătoare acestei propoziții.

8.3. DISJUNCȚIA A DOUĂ PROPOZIȚII

Se dau două propoziții :

p : Am rezolvat exercițiile la matematică ;

q : Am luat nota 10 la aritmetică.

Ou ajutorul cuvântului *sau*, scris între aceste două propoziții, mai putem nota o nouă propoziție.

Propoziția : „Am rezolvat exercițiile la matematică sau am luat nota zece la matematică” se numește disjuncția propozițiilor p și q .

Se notează cu $p \vee q$. Simbolul „ \vee ” este semnul grafic al disjuncției logice.

Cum putem stabili ce valoare de adevăr are propoziția compusă $p \vee q$.

Valoarea de adevăr a propoziției compuse $p \vee q$ depinde de valorile de adevăr ale propozițiilor simple p și q . Dacă cel puțin una din propozițiile simple p și q este adevărată, atunci propoziția $p \vee q$ este adevărată. Disjuncția celor două propoziții este falsă, atunci când ambele propoziții sînt false.

Tabela de adevăr a disjuncției logice este următoarea :

	p	q	$p \vee q$
1	A	A	A
2	A	F	A
3	F	A	A
4	F	F	F

Valorile de adevăr ale propozițiilor compuse se stabilesc în funcție de valorile propozițiilor simple, după anumite reguli.

Pe coloanele 2 și 3 sînt trecute valorile de adevăr ale propozițiilor p , q , pe coloana 4 valoarea de adevăr a disjuncției.

8.4. CONJUNCȚIA A DOUĂ PROPOZIȚII

Se dau propozițiile :

p : numărul 6 este un multiplu al numărului 2

q : numărul 6 este un multiplu al numărului 3.

Cu ajutorul cuvîntului „și” scris între două propoziții mai putem forma o nouă propoziție.

„Numărul 6 este multiplul numărului 2 și numărul 6 este multiplul numărului 3”.

Această propoziție nouă care s-a obținut din legarea celor două propoziții cu ajutorul cuvîntului și se numește conjuncția propozițiilor p și q și se notează cu $p \wedge q$.

Simbolul „ \wedge ” este semnul grafic al conjuncției logice.

Valoarea de adevăr a propoziției compuse $p \wedge q$ depinde de valoarea de adevăr a propozițiilor simple p , q .

Conjuncția a două propoziții p, q este adevărată numai în cazul când ambele propoziții p și q sînt simultan adevărate.

Dacă cel puțin una din propozițiile p și q este falsă atunci propoziția $p \wedge q$ este falsă.

Tabela de adevăr a conjuncției logice este următoarea :

	p	q	$p \wedge q$
1	A	A	A
2	A	F	F
3	F	A	F
4	F	F	F

Prin urmare propoziția $p \wedge q$ este adevărată într-un singur caz : dacă propozițiile p și q sînt simultan adevărate.

8.5. NEGAȚIA UNEI PROPOZIȚII

Se numește negația unei propoziții p , propoziția notată \bar{p} și care se citește *non p* și care este falsă atunci când propoziția p este adevărată și este adevărată atunci când propoziția p este falsă.

Exemple

Se dă propoziția

p : numărul a este mai mic sau cel mult egal cu numărul b ($a \leq b$).

Negația acestei propoziții se notează \bar{p} și se definește astfel :

\bar{p} : numărul a este mai mare decît numărul b ($a > b$).

Tabela de adevăr a negației logice este :

p	\bar{p}
A	F
F	A

8.6. IMPLICAȚIA LOGICĂ

1. Să considerăm următoarele propoziții :

p : numărul 3 este mai mic decît numărul 4.

q : numărul 3 este mai mic decît numărul 7.

Dacă numărul 3 este mai mic decât 4, atunci numărul 3 este mai mic și decât numărul 7.

Vom scrie :

$p \rightarrow q$ și vom citi : „propoziția p implică propoziția q ”.

2. În plan se consideră unghiul AOB și bisectoarea AD .

Să considerăm propozițiile :

$p : M \in AD$.

$q : MP = MQ$ ($MP \perp OA$ și $MQ \perp OB$).

Dacă un punct M aparține bisectoarei AD , atunci el este egal depărtat de laturile unghiului.

Vom scrie : $p \Rightarrow q$.

Simbolul „ \Rightarrow ” este semnul grafic al implicației.

Dacă p este falsă atunci $p \Rightarrow q$ este adevărată, oricare ar fi valoarea de adevăr a propoziției q (valori ce se stabilesc prin convenție).

Exemple :

1. Implicația $(6 < 8) \Rightarrow (4 < 5)$.

Este o propoziție adevărată.

2. Propoziția $(15 \text{ este multiplu } 5) \Rightarrow (9 \text{ este un număr par})$.
Este falsă.

Prin urmare implicația $p \Rightarrow q$ este falsă numai în cazul în care propoziția p este adevărată și propoziția q este falsă.

Tabloul de adevăr al implicației este :

p	q	$p \Rightarrow q$
A	A	A
A	F	F
F	A	A
F	F	A

8.7. ECHIVALENȚE LOGICE

În planul P se consideră punctele : A și B . Un punct M este egal depărtat de punctele A și B .

Fie O mijlocul segmentului AB . În punctul O construim mediatoarea segmentului AB .

Să notăm cu p și q următoarele propoziții.

p : punctul M se află pe mediatoarea segmentului AB .

q : Punctul M este egal depărtat de punctele A și B .

În geometrie se arată că dacă punctul M se află pe mediatoarea segmentului AB el este egal depărtat de punctele A și B .

Prin urmare : $p \Rightarrow q$.

Dar și reciproca acestei teoreme este adevărată.

Dacă un punct M este egal depărtat de punctele A și B , atunci el se află pe mediatoarea segmentului AB .

Prin urmare :

$$q \Rightarrow p$$

În acest caz, avem de-a face cu o dublă implicație.

Se spune că propozițiile p și q sînt echivalente.

Propoziția $p \Rightarrow q$ este o implicație directă în timp ce $q \Rightarrow p$ este implicația reciprocă a celei dintîi.

Echivalența logică a două propoziții se poate exprima cu ajutorul conjuncției logice între implicația directă și reciprocă.

$$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$$

Pentru a alcătui tabela de adevăr a echivalenței logice trebuie să folosim tabelele de adevăr a implicației logice și a conjuncției logice.

Vom stabili mai întîi adevărul sau falsul implicațiilor $p \Rightarrow q$ și al implicației reciproce $q \Rightarrow p$.

Tabela de adevăr a echivalenței logice:

p	q	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$
A	F	F	A	F
A	A	A	A	A
F	A	A	F	F
F	F	A	A	A

p	q	$p \Leftrightarrow q$
A	F	F
A	A	A
F	A	F
F	F	A

Echivalența logică a două propoziții este adevărată dacă ambele propoziții sînt simultan adevărate sau simultan false și este falsă în celelalte cazuri.

8.8. PREDICATE. CUANTIFICATORI

S-a văzut că o mulțime poate fi dată enunțînd o anumită proprietate pe care trebuie să o satisfacă elementele sale. Această condiție poate fi exprimată cu ajutorul unei anumite proprietăți,

care trebuie să fie adevărată pentru toate elementele care fac parte din mulțimea respectivă și numai pentru ele. Dacă x este un element oarecare al mulțimii, proprietatea pe care o satisfac elementele mulțimii, o vom nota cu $p(x)$.

Să considerăm propoziția :

„ x divizibil cu 2”

În general când proprietatea — pe care noi o notăm cu $p(x)$ — caracterizează o anumită mulțime A , scriem mulțimea A cu ajutorul expresiei :

$$A = \{x/p(x)\}.$$

Propoziția obținută, când înlocuim x prin a , se scrie $p(a)$. Ea este adevărată dacă (și numai dacă) elementul a aparține mulțimii A , adică $a \in A$.

(1) Să considerăm mulțimea :

$$X = \{1; 2; 3; 6\}.$$

Această mulțime poate fi scrisă enunțind o proprietate caracteristică a elementelor sale, astfel :

$$X = \{x | x - \text{număr natural, divizor al lui } 6\}.$$

(2) Fie mulțimea :

$$Y = \{y | y \text{ elev trimis în tabără}\}.$$

Pentru a nota mulțimile de mai sus, noi am folosit expresiile :

„ x număr natural divizor al lui 6”;

„ y elev trimis în tabără”.

În aceste expresii x și, respectiv, y pot fi numere, respectiv persoane arbitrare. Ele se numesc variabile.

Expresia $x + 1 = 3$, care este adevărată numai pentru anumite valori ale lui x , se mai numește funcție propozițională.

În locul variabilei se poate substitui orice element al unei anumite mulțimi date. Se cere în plus, ca, pentru fiecare alegere a valorii variabilei, luată din clasa (mulțimea) pe care o poate parcurge variabila, rezultatul înlocuirii să fie o propoziție bine determinată, care are o valoare logică precisă, adică să fie sau adevărată sau falsă.

Se dau mulțimile :

$$A = \{4, 6, 8, 10\}$$

$$B = \{3, 6, 7, 10, 18\}.$$

Să considerăm următoarea propoziție :

p : Numărul a este divizibil cu 2.

Dacă a este oricare din elementele mulțimii A , propoziția p este adevărată.

Propoziția p este adevărată numai pentru anumite elemente ale mulțimii B .

În cazul mulțimii A propoziția p este adevărată pentru toate elementele care aparțin acestei mulțimi.

Pentru a exprima această proprietate se folosește simbolul \forall care se citește „orice”.

Se scrie $\forall a \in A, a$ este divizibil cu 2 și se citește „orice număr a este divizibil prin 2”.

Deoarece numai anumite elemente ale unei mulțimi B au această proprietate, se folosește semnul „ \exists ” care se citește „există”. Se scrie „ $\exists a \in B, a$ este divizibil cu 2”.

Există un element a care aparține mulțimii B și este divizibil cu 2.

Pentru a exprima câte elemente ale unei mulțimi au anumite proprietăți se utilizează semnele \exists, \forall , numite *cuantificatori*.

Simbolurile \forall și \exists cu înțelesul de mai sus se numesc *cuantificatori*, deoarece rolul lor este să indice cantitatea, adică numărul elementelor din mulțimea de adevăr a predicatului. În afara acestor cuantificatori mai există și alții, dar aceștia sînt cei mai importanți în matematică.

Observație:

Cuantificatorii se aplică oricărui predicat și dau propoziții adevărate sau false.

8.9. EXERCIIU REZOLVATE

Exemplu :

Se consideră propozițiile :

p : George merge la școală ;

q : Peana nu merge la școală.

Să se scrie sub formă simbolică propozițiile :

- a) George și Ileana merg amândoi la școală ;
- b) Nici George și nici Ileana nu merg la școală ;
- c) Nu este adevărat că George și Ileana merg amândoi la școală ;
- d) Nu este adevărat că nici Ion și nici Ileana merg la școală.

Soluție :

$$a) p \wedge \bar{q}, \quad b) \bar{p} \wedge q; \quad c) \overline{p \wedge q}; \quad d) \overline{\bar{p} \wedge q}.$$

Exemplu :

Se consideră propozițiile :

p : îmi place matematica ;

q : îmi place muzica.

Să se exprime în cuvinte propoziția $p \wedge \bar{q}$ și să se alcătuiască tabela de adevăr.

Soluție :

Se alcătuieste o tabelă de adevăr care cuprinde valorile propozițiilor p și \bar{q} .

p	q	p	\wedge	\bar{q}
A	A	A		F
A	F	A		A
F	A	F		F
F	F	F		A

În final se completează coloana a 4-a cu valorile de adevăr ale conjuncției valorilor date în coloanele a 3-a și a 5-a :

p	q	p	\wedge	\bar{q}
A	A	A	F	F
A	F	A	A	A
F	A	F	F	F
F	F	F	F	A

Exemplu :

Să se stabilească valorile de adevăr ale propozițiilor :

- a) Dacă $3 \cdot 5 = 15$, atunci $2 + 4 = 6$;
- b) Dacă $3 + 8 = 10$, atunci $2 \cdot 3 = 6$;
- c) Dacă $3 + 5 = 10$, atunci $2 - 1 = 0$;
- d) Dacă $3 \cdot 5 = 15$, atunci $23 = 10 + 3$.

În aceste propoziții trebuie să stabilim valoarea de adevăr a unei implicații logice de forma $p \Rightarrow q$.

a) Pentru p adevărată și q adevărată, propoziția $p \Rightarrow q$ este adevărată.

b) Pentru p falsă și q adevărată, propoziția $p \Rightarrow q$ este adevărată.

c) Pentru p falsă și q falsă, propoziția $p \Rightarrow q$ este adevărată.

d) Pentru p adevărată și q falsă, propoziția $p \Rightarrow q$ este falsă.

Exemplu :

Să se alcătuiască tabela de adevăr a propoziției $\bar{p} \wedge q$.

Soluție: Se alcătuește la început tabela de adevăr, avînd două coloane rezervate valorilor de adevăr ale propozițiilor p și q ; altă coloană este rezervată valorilor de adevăr ale propoziției \bar{p} . Ultima coloană este rezervată valorilor logice corespunzătoare conjuncției logice :

p	q	\bar{p}	$\bar{p} \wedge q$
A	A	F	F
A	F	F	F
F	A	A	A
F	F	A	F

În tabela de adevăr se completează coloana a 3-a cu valoarea de adevăr a propoziției \bar{p} , folosind valorile de adevăr ale propoziției p din prima coloană. În ultima coloană se completează valorile de adevăr ale conjuncției logice.

Exemplu :

Să se găsească toate înlocuirile posibile ale variabilei x , astfel încît următoarea propoziție să fie adevărată :

„Dacă $3 \cdot 4 = 12$, atunci $x - 4 = 10$ ”.

Soluție. Propoziția dată este de forma $p \Rightarrow q$ pentru :

$$p : 3 \times 4 = 12 ; q : x - 4 = 10.$$

Propoziția $p \Rightarrow q$ este falsă atunci când p este adevărată și q este falsă. Ea este adevărată în toate celelalte cazuri.

Prin urmare, pentru ca implicația $p \Rightarrow q$ să fie adevărată, trebuie ca $x - 4 = 10$ să fie adevărată :

$$x - 4 = 10 \Rightarrow x = 14.$$

Valoarea pe care trebuie să o substituim lui x , astfel încât $x - 4 = 10$ să fie adevărată, este $x = 14$.

8.10. EXERCIIȚII ȘI PROBLEME

1. Se dau propozițiile :

p : îmi place această carte ;

q : îmi place matematica.

Exprimați în cuvinte propozițiile :

a) $p \wedge q$; b) $p \vee q$; c) \bar{q} ; d) \bar{p} ; e) $\bar{p} \wedge \bar{q}$.

2. Se dau propozițiile :

p : Ion este fericit ;

q : Gheorghe este trist.

Să se exprime în cuvinte propozițiile :

a) $\bar{p} \wedge \bar{q}$; b) $p \vee q$; c) $p \wedge \bar{q}$.

3. Să se găsească valoarea de adevăr a propozițiilor următoare :

a) Dacă $577 = 12$, atunci $6 + 7 = 13$;

b) Dacă $4 \cdot 7 = 28$, atunci $4 \times 3 = 15$;

c) Dacă $3 + 4 = 25$, atunci $4 \times 4 = 16$.

4. Să presupunem că propozițiile

$a \times b = c$; $b \times c = d$; $c = d$ sînt adevărate.

Să se afle valoarea de adevăr a propozițiilor :

a) Dacă $a \times b = c$, atunci $b \times c \neq d$;

b) Dacă $a \times b = d$, atunci $b \times c = c$;

c) Dacă $a \times b = d$, atunci $b \times c = d$;

d) Dacă $a \times b = c$, atunci $b \times c = c$.

5. Să se găsească toate înlocuirile posibile ale lui x în fiecare din propozițiile date mai jos, astfel încât implicațiile date să fie adevărate.

a) Dacă $2 + 3 = 5$, atunci $x + 2 = 9$;

b) Dacă $4 + 5 = 7$, atunci $x + 1 = 8$;

c) Dacă $x + 2 = 8$, atunci $2 + 4 = 7$;

d) Dacă $x + 1 = 8$, atunci $2 + 3 = 6$;

e) Dacă $3 - x = 1$, atunci $2 \times 5 = 10$;

f) Dacă $3 - x = 1$, atunci $2 \times 5 = 8$.

6. Se dau propozițiile :

p : Nicolae muncește sîrguincios ;

q : Nicolae reușește la matematici.

Să se exprime în cuvinte propozițiile :

$p \Rightarrow q$; $q \Rightarrow p$; $\bar{p} \Rightarrow q$; $p \Rightarrow \bar{q}$;

7. Să se găsească valoarea de adevăr a următoarelor propoziții :

a) $(3 = 2 + 1) \vee (5 = 3 + 2)$.

b) $(3 = 2 + 1) \wedge (5 + 3 = 8)$.

c) $(9 = 6 + 4) \vee (5 = 4 + 3)$.

d) $(10 = 3 + 7) \vee (7 = 6 + 1)$.

e) $(8 = 6 + 3) \wedge (5 + 2 = 7)$.

f) $(10 = 8) \wedge (6^2 = 36)$.

g) $(6 = 10) \vee (13 = 1)$.

h) $[(-3)^2 = 9] \vee [(-2)^2 = 4]$.

i) $[(0,01)^2 = 0,0001] \wedge [(-0,3)^2 = 0,09]$.

j) $(-1 < -4) \wedge (-1 < 0)$.

$$k) (-4 < -3) \wedge (-5 < -1).$$

$$l) \left(-\frac{1}{17} > -\frac{1}{16}\right) \wedge \left(-\frac{1}{18} > -\frac{1}{20}\right).$$

$$m) \left(-\frac{3}{5} > -\frac{1}{2}\right) \vee \left(-\frac{3}{5} < -\frac{1}{2}\right).$$

8. Să se stabilească valoarea de adevăr a următoarelor propoziții :

$$a) (|-5| = 5) \wedge (|-3| + |-2| = 5).$$

$$b) [(-6) = (-4) + (-2)] \vee (|-6| = +6).$$

$$c) (|-5| > 0) \vee (|-3| = 3).$$

$$d) (|-8| > 0) \wedge (|-4| > |-2|).$$

$$e) (|-5| > 0) \wedge (|-5| \geq 5).$$

9. Să se stabilească valoarea de adevăr a următoarelor propoziții :

$$a) (|-2| \geq 2) \wedge (|-2| = 2).$$

$$b) (|-6| \geq |-4| + |-2|) \wedge (|-5| \geq 5).$$

$$c) |9 - 1| \neq |1 - 9|.$$

$$d) |6 - 100| \leq |100 - 6|.$$

10. Se dau propozițiile p și q . Să se alcătuiască tabela de adevăr a propozițiilor :

$$a) \bar{p} \wedge q; \quad b) \bar{p} \wedge \bar{q}; \quad c) p \wedge \bar{q}; \quad d) \bar{p} \vee q;$$

$$e) p \vee \bar{q}; \quad f) \overline{p \wedge q}; \quad g) \bar{p} \vee \bar{q}.$$

11. Să se alcătuiască tabela de adevăr a propozițiilor :

$$a) \overline{p \wedge q}; \quad b) \bar{p} \vee \bar{q}; \quad c) \overline{p \vee q}; \quad d) \bar{p} \wedge \bar{q}.$$

Să se arate apoi echivalențele :

$$\overline{p \wedge q} \Leftrightarrow \bar{p} \vee \bar{q}; \quad \overline{p \vee q} \Leftrightarrow \bar{p} \wedge \bar{q}.$$

12. Se dă mulțimea :

$$A = \{1; 2; 3; 4; 5\}$$

și următoarele propoziții :

a) $1 \in A$; b) $\{1, 2\} \subset A$; c) $\{1\} \in A$.

Să se stabilească valoarea de adevăr a acestor propoziții.

13. Se dau mulțimile :

$$A = \{x \mid x \in N; 1 < x \leq 3\}$$

$$B = \{x \mid x \in N; 3 \leq x < 4\}.$$

Să se stabilească valoarea de adevăr a propozițiilor :

a) $B \subset A$, b) $B \in A$.

14. Să se stabilească valoarea de adevăr a următoarelor propoziții :

$$a) (5 < 6) \vee (3 + 1 < 2);$$

$$b) (6^2 > 1) \wedge (3 + 5^2 < 7 + 8);$$

$$c) [(-1)^3 < -2] \wedge [(-2)^3 < (-3)^3].$$

15. Să se stabilească care din următoarele propoziții sînt adevărate :

p : 12 este un multiplu al numărului 3 sau 12 este multiplul numărului 4.

q : 5 este divizorul numărului 15 și 4 este multiplul numărului 3.

s : $(2^3 \cdot 3^2)$ este multiplul numărului 6 și $2^3 \cdot 3^2$ este multiplul numărului 36.

16. Să se stabilească valoarea de adevăr a propozițiilor :

$$(-6 \leq 7) \Rightarrow (3 > 4);$$

$$(3 + 2 < 5) \Rightarrow (4 + 1 > 5);$$

$$(4 \geq 5) \Rightarrow 4 \text{ este divizorul numărului } 8.$$

17. Să se stabilească valoarea de adevăr a propozițiilor :

$$[(-3)^2 > (-1)^2] \Rightarrow [(-4)^2 < (-5)^2];$$

$$[(-3 < -4) \vee (-2 < -1)] \Rightarrow [(-3 + 1) > -1] \wedge (-2 < -1)];$$

$$[(-6 + 1) < (-3 + 1) < (-5)] \wedge (-2)^2 \leq 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [(-2)^3 < -8] \wedge (-5 < -4)].$$

18. Să se stabilească valoarea de adevăr a propozițiilor compuse :

$$[(-2)^3 < (-1)^2] \wedge [(-2)^2 > (-1)^3] \Rightarrow \\ \Rightarrow [(-2)^2 < (-3)^2] \wedge [(-5) < (-1)].$$

19. Să se stabilească valoarea de adevăr a propozițiilor :

$$(2 \text{ este divizorul numărului } 4) \vee (6 \text{ este multiplu numărului } 2) \\ \Rightarrow (3 < 4) \wedge [(-1)^2 + 3] < 0.$$

20. Se dau propozițiile :

p : Patrulaterul $ABCD$ este un pătrat.

q : Diagonalele patrulaterului $ABCD$ sînt perpendiculare.

Să se stabilească valoarea de adevăr a propozițiilor :

$$a) p \Rightarrow q; \quad b) q \Rightarrow p; \quad c) p \Leftrightarrow q.$$

21. Se dau propozițiile :

p : Patrulaterul $ABCD$ este un dreptunghi.

q : Diagonalele patrulaterului $ABCD$ sînt egale.

Să se stabilească valoarea de adevăr a propozițiilor :

$$a) p \Rightarrow q; \quad b) q \Rightarrow p; \quad c) q \Leftrightarrow p.$$

22. Se dau propozițiile :

p : Patrulaterul $ABCD$ este un dreptunghi.

q : Diagonalele patrulaterului $ABCD$ sînt egale.

r : Diagonalele patrulaterului $ABCD$ se taie în părți egale.

Să se stabilească valoarea de adevăr a propoziției :

$$p \Leftrightarrow q \wedge r.$$

23. Se dau propozițiile :

p : Numărul a este par.

q : Numărul a este multiplu al numărului 2.

Să se stabilească adevărul propoziției :

$$p \Leftrightarrow q$$

24. Se consideră mulțimea :

$$A = \{4, 6, 8, 10, 12\}$$

și propoziția.

$\forall x \in A$; x este multiplu al numărului 2.

Să se citească și apoi să se stabilească valoarea de adevăr a acestei propoziții.

25. Se consideră mulțimea :

$$A = \{1, 5, 7, 9\}$$
 și propoziția :

$\exists x \in A$: „ x este un număr par”

Să se stabilească valoarea de adevăr a acestei propoziții.

26. Să se completeze tabelele de adevăr.

p	q	$-\quad [\bar{p} \vee \bar{q}]$		

p	q	$-\quad [\bar{p} \vee \bar{q}]$		

27. Se dă mulțimea :

$$A = \{+1, 4, +3, 0, 5\}$$

și propoziția $\forall x \in A : 3(x + 1) \leq 21$.

Să se citească propoziția.

Este această propoziție adevărată?

28. Să se stabilească valoarea de adevăr a propoziției :

$\forall x \in N : x + 1 \in N$ (cu N s-a notat mulțimea numerelor naturale).

29. Să se stabilească valoarea de adevăr a propoziției :

$$\forall x \in N : x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2 > 0,$$

30. Se dă propoziția :

$$\forall x \in N ; x + 1 = 9.$$

Să se stabilească valoarea logică.

31. Se dau mulțimile :

$$A = \{-1, -2, -3, -4\} \text{ și } B = \{-2, -4, -6, -8\}.$$

Oitiți și verificați dacă este adevărată următoarea afirmație :

$$\forall x \in A \Rightarrow 2x \in B.$$

32. Se dau mulțimile definite prin următoarele proprietăți :

A = mulțimea numerelor naturale care au proprietatea de a fi mai mici decât 5, proprietate pe care o notăm cu p_1 .

$$A = \{x; x \in N, x < 5\}.$$

B = mulțimea numerelor naturale mai mici decât 7, proprietate pe care o notăm cu p_2 .

$$B = \{x; x \in N, x < 7\}.$$

Ce relație de implicație există între p_1 și p_2 ?

33. Se dau mulțimile definite prin următoarele proprietăți :

A — mulțimea numerelor naturale care sînt multiplii numărului 6, proprietate pe care o notăm cu p_1 .

$$A = \{x; x \in N, x = \mathbb{N}6\}.$$

B — mulțimea numerelor naturale care sînt multiplii numărului 3, proprietate pe care o notăm cu p_2 .

$$B = \{x; x \in N, x = \mathbb{N}3\}.$$

Ce relație de implicație există între p_1 și p_2 ?

34. Se dau mulțimile :

Z mulțimea punctelor din plan egal depărtate de punctele A și B (proprietate pe care o notăm cu p_1).

$$p_1 = \{X | \overline{XA} = \overline{XB}\}.$$

Y mulțimea punctelor din plan care sînt situate pe mediatoarea segmentului \overline{AB} , (proprietate pe care o notăm cu p_2).

$$p_2 = \{X | X \in \overline{OM}\}.$$

Arătați că este adevărată relația :

$$p_1 \Rightarrow p_2.$$

35. Care din următoarele propoziții sînt adevărate și care sînt false (răspundeți prin „adevărat” sau „fals”).

- a) $\forall x \in R : x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$;
 b) $\exists x \in R : x + 1 < 2$;
 c) $\forall x \in R : (x - 1)(x^2 + x + 1) = x^3 - 1$.

36. Să se afle care din următoarele afirmații sînt adevărate și care sînt false :

- a) $\exists x \in R ; x < 5$; b) $\forall x \in R ; x > 5$; c) $\exists x \in R ; 3x < 6$;
 d) $\forall x \in R ; 2x > 8$; e) $\exists x \in R ; x^2 + 2 > 0$; f) $\forall x \in R ;$
 $x(x + 1) = x^2 + x$.

37. Se dau propozițiile :

$$p_1 : x < 5 ; p_2 : x \geq 3 ; p_3 : x + 1 > 0.$$

Să se scrie : $\bar{p}_1 ; \bar{p}_2 ; \bar{p}_3$.

38. Se dau propozițiile :

$$p_1 : \forall x \in N ; 2x \in N \text{ și } p_2 : \exists x \in N ; x + 1 < 2.$$

Să se scrie propozițiile :

$$\bar{p}_1 \text{ și } \bar{p}_2.$$

39. Arătați care din aceste propoziții sînt adevărate și care sînt false :

- a) $\forall x \in N ; x^2 + 1 \in N$; b) $\exists x \in N ; x^2 + 1 = 0$;
 c) $\exists x \in N ; x^2 + 1 \neq 0$.

40. Să se scrie mulțimile de adevăr ale următoarelor propoziții :

$$\exists x \in N ; x + 1 < 2 ; \exists x \in N ; x - 1 = 0.$$

41. Se dau predicatele :

- a) $A(x, y) \equiv \{x < y\}$,
 b) $B(x, y) \equiv \{x + y = 10\}$.
 c) $C(x, y) \equiv \{x \text{ divide } y\}$.
 d) $D(x, y) \equiv \{x + y \text{ este un număr prim}\}$.

Să se stabilească valoarea de adevăr a propozițiilor :

$$A(1, 3) \equiv \{1 < 3\}; A(2, 2) \equiv \{2 < 2\}; B(1, 3) \equiv \{1 + 3 = 10\}$$

$$C(4, 2) \equiv \{4 \text{ divide } 2\}; D(5, 6) \equiv \{5 + 6 \text{ este un număr prim}\}.$$

42. Se dă predicatul

$$A(x) \equiv \{x^2 + 1 > 0\}.$$

Să se completeze rîndul al doilea al tabelului alcătuit mai jos cu valorile de adevăr ale propozițiilor scrise în primul rînd :

$A(1)$	$A(2)$	$A(3)$	$A(4)$	$A(5)$	$A(6)$	$A(7)$	$A(8)$	$A(9)$

Să se folosească cuantificatorul $\forall x$ (orice x) pentru a exprima valoarea de adevăr a acestor propoziții.

43. Se dau predicatele :

$$A(Q) = \{\text{patrulaterul } Q \text{ este un romb}\},$$

$$B(Q) = \{\text{diagonalele patrulaterului } Q \text{ sînt perpendiculare}\}.$$

Să se stabilească valoarea de adevăr a propoziției :

$$A(Q) \Rightarrow B(Q).$$

44. Se consideră mulțimea

$$M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

și predicatul :

$$E(x, y) \equiv \{x + y \text{ aparține mulțimii } M\}.$$

Să se găsească toate perechile de numere $(a, b) \in M \times M$ astfel încît propoziția $E(a, b)$ să fie adevărată.

45. Să se folosească cuantificatori \forall și \exists pentru a scrie simbolice propozițiile :

a) Orice număr natural x verifică inegalitatea $x^2 > x$;

b) Există numere naturale care se divid la numărul natural 5;

c) Există triunghiuri care au cele trei laturi egale.

Capitolul 9

CALCULUL VECTORIAL

9.1. NOȚIUNEA DE VECTOR

Mai mulți pionieri se joacă cu un balon.

Din punctul A un pionier deplasează balonul pînă în punctul B (fig. 9.1).

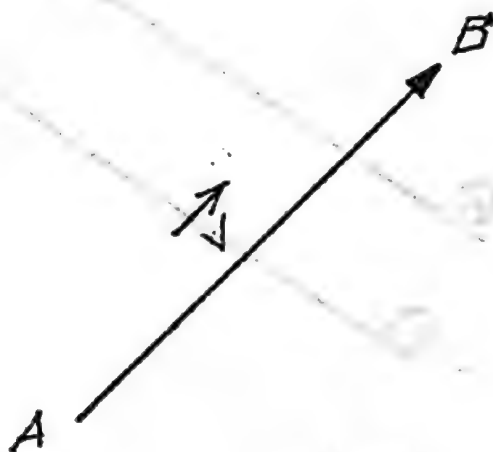


Fig. 9.1

Convenim să reprezentăm deplasarea balonului din punctul A pînă în punctul B printr-o săgeată care are originea în punctul A și extremitatea în punctul B . Săgeata o vom nota simbolic \overrightarrow{AB} și este caracterizată prin următoarele elemente :

- 1) are o direcție, care este direcția segmentului AB ;
- 2) are un sens care, este sensul de la A la B al segmentului AB ;
- 3) are o valoare absolută care este egală cu lungimea segmentului de dreaptă AB .

O mărime geometrică care este caracterizată prin valoare absolută, direcție și sens se numește vector.

Direcția vectorului \overrightarrow{AB} este direcția dreptei AB . Sensul vectorului \overrightarrow{AB} este sensul de la punctul A la punctul B pe dreapta AB . Valoarea absolută a vectorului este egală cu lungimea segmentului de dreaptă AB .

Punctul A se numește originea vectorului, iar punctul B se numește extremitate. Un vector se notează prescurtat \overrightarrow{AB} sau \vec{V} .

9.2. VECTORI ECHIPOLENȚI

Să considerăm din nou un balon care se deplasează de la C la D , astfel încât să avem $CD \parallel AB$ și $CD = AB$ (fig. 9.2).

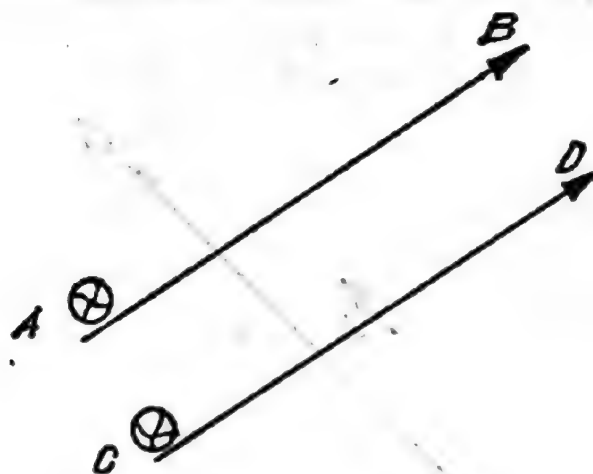


Fig. 9.2

Din punctul C pînă în D , balonul parcurge aceeași distanță ca cea de la punctul A la punctul B , pe aceeași direcție și în același sens.

Segmentele de dreaptă AB și CD care arată o aceeași deplasare a balonului și sînt paralele reprezintă doi vectori echipolenți.

Definiție Doi sau mai mulți vectori în plan sînt echipolenți dacă au aceeași valoare absolută, aceeași direcție și același sens.

Vectorii \overrightarrow{AB} și \overrightarrow{CD} sînt doi vectori echipolenți, deoarece :

- 1) $AB = CD$,
- 2) $AB \parallel CD$.

Pentru notația relației de echipolență vom folosi semnul „=” scris între vectorii corespunzători vom scrie $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

Relația de echipolență are următoarele proprietăți :

a) este reflexivă :

$$\vec{V} = \vec{V};$$

b) este simetrică (fig. 9.3):

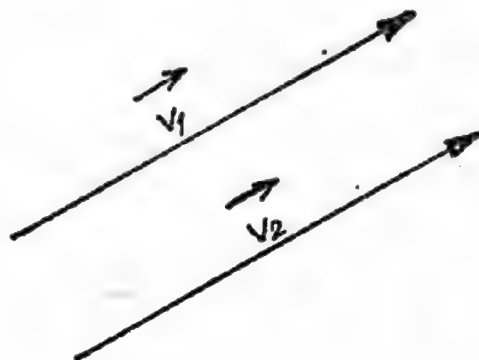


Fig. 9.3

$$\vec{V}_1 = \vec{V}_2 \Rightarrow \vec{V}_2 = \vec{V}_1;$$

c) este tranzitivă (fig. 9.4):

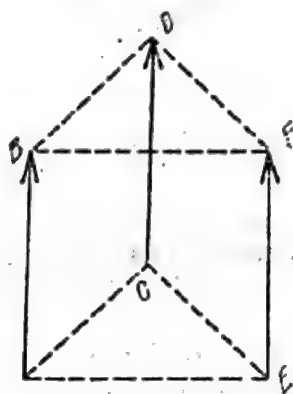


Fig. 9.4

$$\vec{V}_1 = \vec{V}_2 \text{ și } \vec{V}_2 = \vec{V}_3 \Rightarrow \vec{V}_1 = \vec{V}_3.$$

Demonstrație

Din relația $\vec{V}_1 = \vec{V}_2$ și $\vec{V}_2 = \vec{V}_3$, deducem : $AB = CD$ și $AB = CD$; $CD \parallel EF$ și $CD = EF$.

Prin urmare : $AB = EF$ și $AB \parallel EF$.

Observație

Relația de echipolență între vectori va permite ca, în operații, să înlocuim un vector cu un vector echipolent cu el pentru a efectua mai simplu calculele.

9.3. OPERAȚII CU VECTORI

9.3.1. ADUNAREA VECTORILOR

Să presupunem că un pionier deplasează balonul din punctul A pînă în punctul B (fig. 9.5).

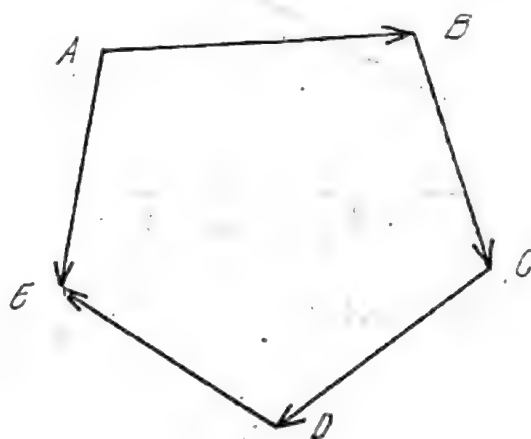


Fig. 9.5

Deplasarea balonului din punctul A pînă în punctul B este reprezentată prin \overrightarrow{AB} .

Din punctul B un alt jucător deplasează balonul pînă în punctul C . Deplasarea balonului din B pînă în punctul C se reprezintă prin \overrightarrow{BC} . Din punctul A balonul a ajuns în punctul C ca rezultat a două deplasări de la punctul A la punctul B , reprezentată prin vectorul \overrightarrow{AB} , și de la punctul B la punctul C , reprezentată prin vectorul \overrightarrow{BC} . Convenim să notăm operația corespunzătoare compunerii celor doi vectori prin semnul $+$ și să o numim adunarea vectorilor; vom scrie $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$.

Din punctul A pînă în punctul C , balonul se mai poate deplasa pe direcția AC , sensul de la A la C , deplasare care este reprezentată de vectorul \overrightarrow{AC} . Prin urmare: $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$. Doi vectori se numesc consecutivi dacă originea unuia este extremitatea celui-

lalt. Vectorii \overrightarrow{AB} și \overrightarrow{BC} sînt consecutivi, deoarece originea unuia este extremitatea celuilalt.

Definiție

Se numește suma a doi vectori consecutivi \overrightarrow{AB} și \overrightarrow{BC} vectorul \overrightarrow{AC} care are originea, originea primului vector și extremitatea, extremitatea celui de-al doilea vector.

Dacă în locul a doi vectori vom considera mai mulți vectori consecutivi, astfel încît extremitatea unui vector este originea vectorului următor, obținem un contur poligonal de vectori (fig. 9.5) format din vectorii \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{BC} , \overrightarrow{CD} , \overrightarrow{DE} , \overrightarrow{EA} .

Dacă vom considera, ca și în exemplul precedent, un balon care se deplasează din punctul A în punctul B și din B în C , din C în D , din D în E , atunci din punctul A pînă în punctul E , balonul se mai poate deplasa pe direcția AE și avem :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AE}.$$

Deci suma a doi sau a mai mulți vectori consecutivi este vectorul care unește originea primului vector cu extremitatea ultimului vector.

9.3.2. DIFERENȚA VECTORILOR

Se numește diferența a doi vectori \vec{a} și \vec{b} , și se notează $\vec{a} - \vec{b}$, vectorul \vec{x} care verifică relația $\vec{b} + \vec{x} = \vec{a}$ (fig. 9.6). Vectorul \vec{x} ,

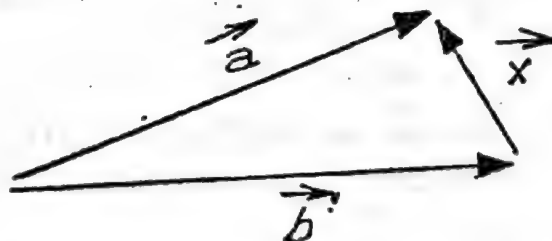


Fig. 9.6

sau diferența vectorilor \vec{a} și \vec{b} , este vectorul care unește extremitățile celor doi vectori, avînd originea extremitatea vectorului scăzător și extremitatea coincide cu extremitatea vectorului descăzut.

Proprietățile operației de adunare a vectorilor.

1. Adunarea vectorilor este comutativă

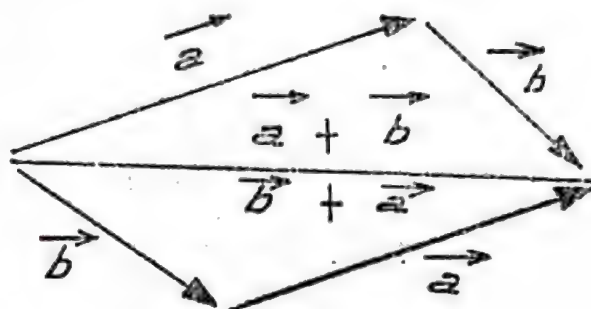


Fig. 9.7

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a} \text{ (fig. 9.7)}$$

2. Adunarea vectorilor este asociativă (fig. 9.8).

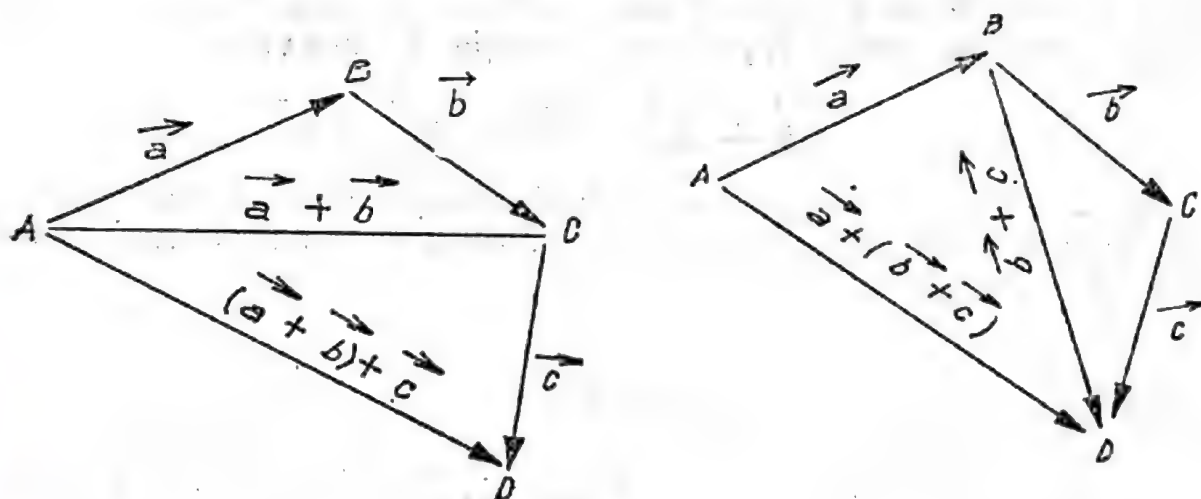


Fig. 9.8

Din punctul A pînă în punctul D , balonul poate ajunge în două moduri, efectuînd numai două deplasări.

1. Din A pînă în C , deplasare căreia îi corespunde vectorul $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC} = \vec{a} + \vec{b}$, și din C pînă în D , deplasare pe care o reprezentăm prin compunerea celor două deplasări deci prin vectorul $\vec{AD} = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$. (1)

2. Din punctul A pînă în punctul B , deplasare pe care o reprezentăm prin vectorul \vec{a} , și din B pînă în D , pe care o reprezentăm prin vectorul $\vec{BD} = \vec{b} + \vec{c}$. Compunerea celor două deplasări se reprezintă prin vectorul $\vec{AD} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$. (2)

Din relațiile (1) și (2), obținem :

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}).$$

3. Pentru orice vector \vec{v} există un vector opus ($-\vec{v}$):

$$\vec{v} + (-\vec{v}) = \vec{0}$$

4. Pentru orice vector \vec{v} există vectorul nul $\vec{0}$ cu proprietatea $\vec{v} + \vec{0} = \vec{v}$.

Să presupunem că balonul s-a deplasat din A pînă în punctul B și din punctul B pînă în punctul C , astfel încît :

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}.$$

Se numește modulul unui vector \overrightarrow{AB} lungimea segmentului de dreaptă AB . Doi vectori care au aceeași direcție, același modul și sensuri diferite se numesc opuși.

Cazuri particulare.

1. Să considerăm vectorii reprezentați prin săgețile \overrightarrow{AB} și \overrightarrow{CD} care au aceeași direcție și același sens (fig. 9.9).



Fig. 9.9

Suma lor este vectorul \overrightarrow{AD} care unește originea A a primului vector cu extremitatea D a celui de-al doilea vector.

$$\text{Vom scrie } \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$

2. Să luăm vectorii \overrightarrow{AB} și \overrightarrow{CD} care au aceeași direcție și sensuri diferite (fig. 9.10).

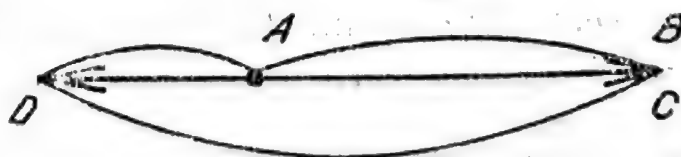


Fig. 9.10

Suma lor este vectorul care unește originea primului cu extremitatea celui de-al doilea, adică $\overrightarrow{AD} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD})$.

În primul caz, modulul sumei este egal cu suma modulelor celor doi vectori.

În al doilea, modulul sumei este egal cu diferența modulelor.

9.3.3. ÎNMULȚIREA UNUI VECTOR CU UN SCALAR

Să considerăm vectorii \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{BC} , \overrightarrow{CD} , care au aceeași direcție, același sens și același modul.

Prin urmare, vectorii \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{BC} și \overrightarrow{CD} sînt echipolenți și avem : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CD}$.

Să calculăm suma : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$. După regula stabilită anterior, avem :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$$

(fig. 9.11).

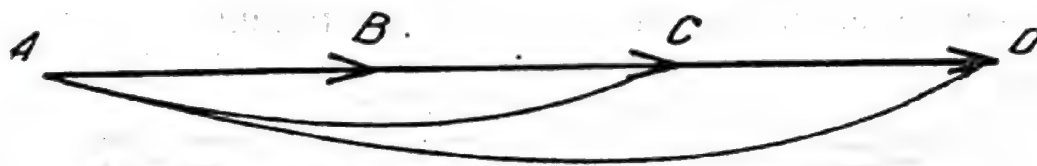


Fig. 9.11

Ținînd seama de echipolența vectorilor, avem :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD}.$$

Suma $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB}$ o mai putem scrie $3\overrightarrow{AB}$ și, prin urmare, avem : $3\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD}$.

Produsul unui vector \overrightarrow{AB} cu un număr real pozitiv α este un vector \overrightarrow{AD} care are aceeași direcție, același sens ca și vectorul \overrightarrow{AB} . Modulul vectorului \overrightarrow{AD} este egal cu modulul vectorului \overrightarrow{AB} înmulțit cu numărul real α .

Dacă numărul real α este negativ ($\alpha = -3$), atunci produsul numărului α cu vectorul \overrightarrow{AB} este vectorul $\overrightarrow{AD'}$, care are aceeași direcție ca și direcția vectorului \overrightarrow{AB} dar sens opus :

$$(-3) \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD'} \text{ (fig. 9.12).}$$

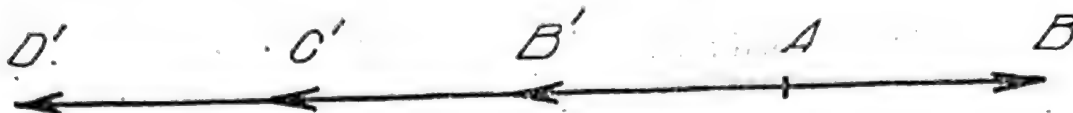


Fig. 9.12

9.4. EXERCIȚII ȘI PROBLEME

1. Se dau vectorii \vec{a} și \vec{b} (fig. 9.13).



Fig. 9.13

Să se afle vectorul $3\vec{a} + \vec{b}$; $3\vec{a} - \vec{b}$.

2. Se dau vectorii \vec{a} și \vec{b} (fig. 9.14).

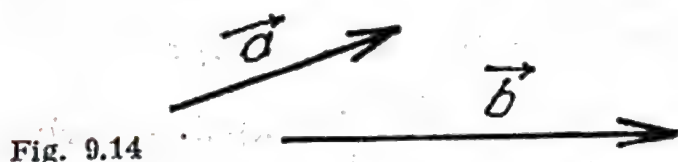


Fig. 9.14

Să se construiască vectorii : $\vec{a} + \vec{b}$, $3\vec{a} - 3\vec{b}$, $2\vec{a} + 2\vec{b}$, $2(\vec{a} + \vec{b})$.

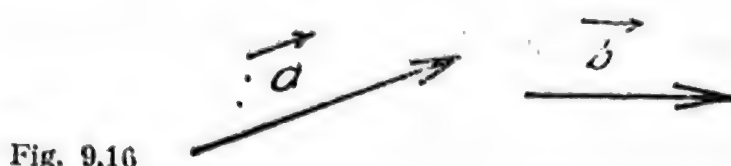
3. Se dau vectorii \vec{x} , \vec{y} (fig. 9.15).



Fig. 9.15

Să se construiască vectorii : $3(\vec{x} + \vec{y})$; $3\vec{x} + 3\vec{y}$.
Sînt acești vectori egali?

4. Se dau vectorii \vec{a} și \vec{b} (fig. 9.16).



Să se afle vectorii: $2(\vec{a} - \vec{b})$; $2\vec{a} - 2\vec{b}$.
Sint acești vectori egali?

5. Să se arate că pentru orice vector \vec{v} , avem relația :

$$2 \cdot (3\vec{v}) = (2 \cdot 3)\vec{v}.$$

6. Să se arate că pentru orice vector \vec{v} , avem relația :

$$(-3)\vec{v} = 3(-\vec{v}).$$

7. Să se arate că pentru orice vector \vec{v} , avem relațiile :

$$(-3) \cdot (4\vec{v}) = (3 \cdot 4)(-\vec{v}) = -(3 \cdot 4\vec{v}) = -(3 \cdot 4 \cdot \vec{v}) = (-4) \cdot (3\vec{v}).$$

8. Să se arate că pentru orice vector \vec{v} , avem relația :

$$\begin{aligned} [(-3)(-2)]\vec{v} &= (-3) \cdot (-2\vec{v}) = -[3 \cdot (-2\vec{v})] = \\ &= -[(3 \cdot (-2)) \cdot \vec{v}] = (3 \cdot 2) \vec{v}. \end{aligned}$$

9. Construiți doi vectori \vec{a} și \vec{b} . Aflați apoi vectorii următori :

$$3\vec{a} + \vec{b}; -\frac{1}{2}\vec{a}; 2\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}; \frac{1}{2}\vec{a} - 3\vec{b}.$$

10. În triunghiul ABC vectorul $\overrightarrow{AB} = \vec{m}$, iar vectorul $\overrightarrow{AC} = \vec{n}$.

Să se construiască vectorii următori $\frac{\vec{m} + \vec{n}}{2}$; $\frac{\vec{m} - \vec{n}}{2}$; $-\frac{\vec{m} + \vec{n}}{2}$.

Să notăm cu A' mijlocul laturii BC . Arătați că $\frac{\vec{m} + \vec{n}}{2} = \overrightarrow{AA'}$.

Capitolul 10

ORGANIZAREA ȘI PRELUCRAREA DATELOR

10.1. GENERALITĂȚI

Pentru a mări rapiditatea și exactitatea calculelor, matematicienii au alcătuit la început tabele de calcul cu ajutorul cărora ei au rezolvat problemele foarte dificile pe care le puneau, în diverse activități, practica socială.

Se cunosc din timpuri foarte îndepărtate tabelele pentru puterile numerelor, pentru extrageri de rădăcină pătrată etc.

Cu timpul însă, caracterul problemelor care trebuie rezolvate s-a complicat foarte mult și în raport cu ele, calculele au devenit foarte dificile. Aceasta a condus la căutarea unor mijloace mecanizate pentru prelucrarea datelor numerice.

În operațiile de calcul efectuate cu ajutorul mașinilor mecanice, o parte din operațiile efectuate de om în calculele așa-numite de mână sînt preluate de mașină. Așa, de exemplu, în operațiile de adunare, la mașina mecanică sau electrică, rolul calculatorului uman este numai acela de a înregistra valorile numerice ale termenilor. Efectuarea propriu-zisă a operațiilor de adunare revine mașinii.

Procedeele alese pentru rezolvarea unor probleme cu conținut numeric depind în mare măsură de disponibilitățile mașinii de calculat. Calculele se desfășoară la mașina de calculat după anumite reguli, mașina executînd operațiile în mai multe etape.

Rezultatele intermediare sînt păstrate în memoria mașinii și utilizate prin anumite instrucțiuni la anumite momente ale desfășurării calculului. Pentru a înțelege mai bine funcționarea mașinilor de calcul să analizăm organizarea calculelor atunci cînd ele se efectuează în mod obișnuit cu mîna.

Principalul tip de calcule, așa zise de mână, îl constituie calculele după o formulă dată.

Organizarea calculelor se face în acest caz într-o modalitate care permite în orice moment să găsim rezultatele intermediare. Pentru a rezolva o astfel de problemă trebuie să se determine mai întâi operațiile ce trebuie efectuate, ordinea în care aceste operații sînt efectuate, adică succesiunea operațiilor, și modul de reținere și utilizare a rezultatelor intermediare.

Exemplu :

$$\text{Să se calculeze : } x = \frac{145 \times 15 + 155 \times 15}{16 : 8 + 24 : 8}.$$

Acest exercițiu se poate rezolva în mai multe moduri.

a) O rezolvare a acestui exercițiu constă în efectuarea următoare succesiuni de pași :

pasul 1 — Se înmulțește 145 cu 15 ;

pasul 2 — Se înmulțește 155 cu 15 ;

pasul 3 — Se adună 145×15 cu 155×15 ;

pasul 4 — Se împarte numărul 16 la 8 ;

pasul 5 — Se împarte numărul 24 la 8 ;

pasul 6 — Se adună $(16 : 8)$ cu $(24 : 8)$;

pasul 7 — Se împarte $(145 \times 15 + 155 \times 15)$ care s-a obținut la pasul 3 la $(24 : 8 + 16 : 8)$ care s-a obținut la pasul 6 ;

b) O altă cale mai rațională de a rezolva acest exercițiu este următoarea :

$$x = \frac{(145 + 155) \cdot 15}{(16 + 24) : 8}.$$

Se efectuează următoarea succesiune de operații :

pasul 1 — Se adună 145 cu numărul 155 ;

pasul 2 — Se înmulțește $(145 + 155)$ cu numărul 15 ;

pasul 3 — Se adună numărul 16 cu numărul 24 ;

pasul 4 — Se împarte $(16 + 24)$ la numărul 8 ;

pasul 5 — Se împarte $(145 + 155) \cdot 15$ la $(16 + 24) : 8$.

Observăm că alegerea celei de a doua căi ne-a condus la un număr mai mic de pași sau operații.

În aceste succesiuni de operații, obținem și anumite rezultate intermediare pe care dealtfel le folosim mai departe, într-o anumită ordine.

Această succesiune a operațiilor, într-o anumită ordine, este denumită *rezolvarea algoritmică a problemelor date*.

Algoritmul este o suită organizată și finită de operații efectuable, capabilă să rezolve o anumită clasă de probleme.

A învăța un om să efectueze o anumită activitate înseamnă de fapt a-l face să-și însușească algoritmul de îndeplinire al acestei activități.

Pentru efectuarea calculelor, algoritmul se scrie sub forma unei scheme de calcul care constituie una din modalitățile cele mai raționale și simplificate de descriere a algoritmilor de rezolvare a unei anumite probleme.

Într-o schemă de calcul se indică în mod clar și precis ce operații se efectuează și în ce ordine.

Indicarea operațiilor într-o schemă logică de calcul se face folosind diferite semne convenționale prin care se notează introducerea, înregistrarea datelor și prelucrarea lor.

Aceste semne convenționale sînt (fig. 10.1): *a* — începutul și sfîrșitul programului; *b* — introducerea datelor; *c* — instrucțiuni de tratare; *d* — condiții sau verificări care se fac între mărimile problemei.

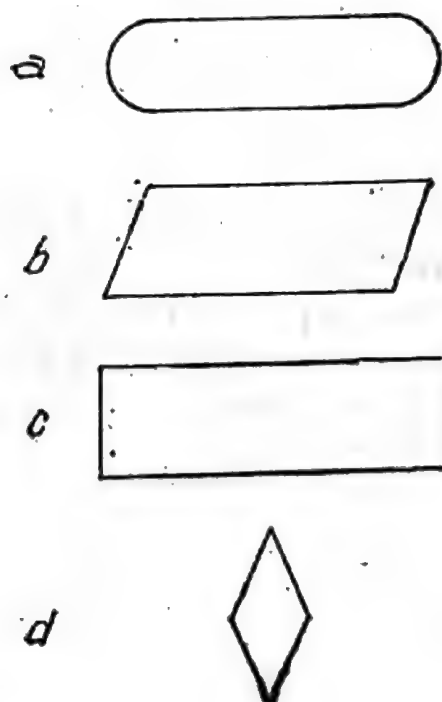


Fig. 10.1

Particularitățile alcătuirii schemei de calcul se înțeleg mai bine pe exemplul precedent (fig. 10.2).

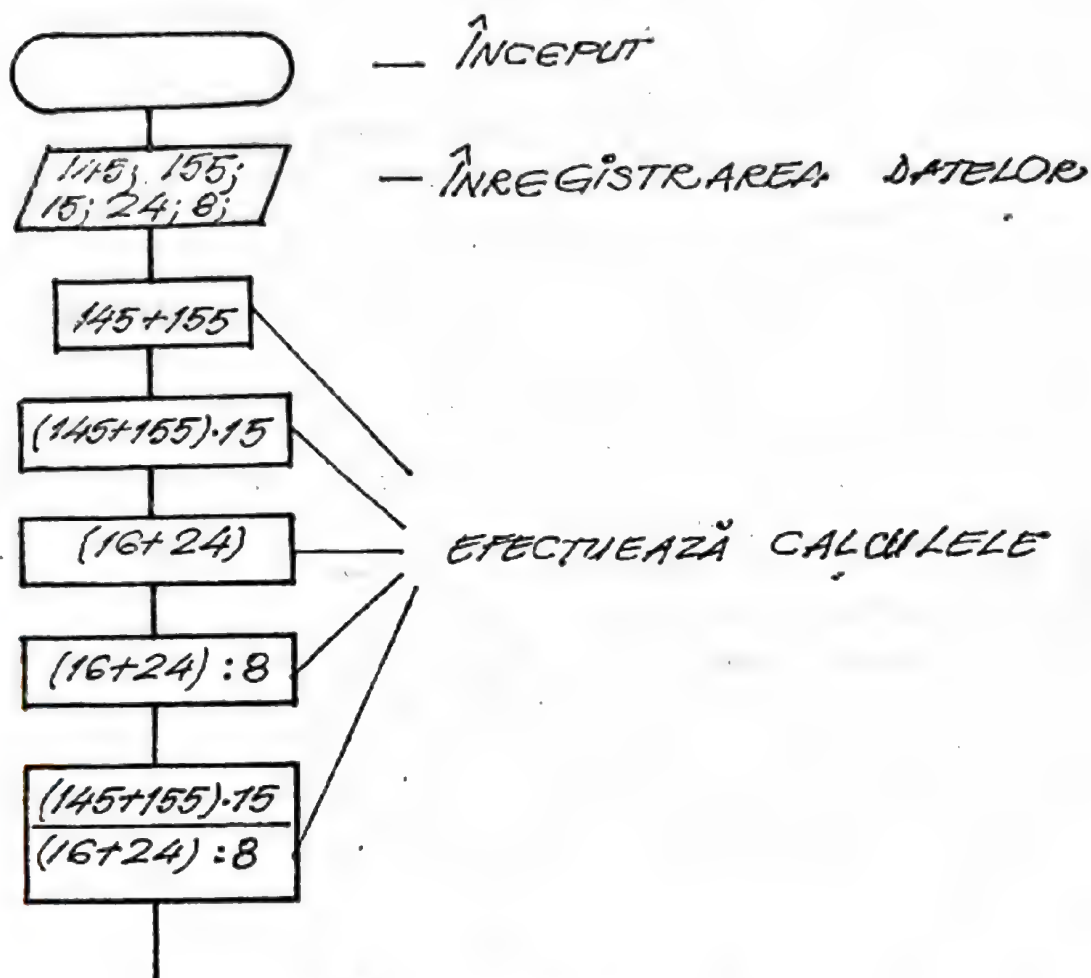


Fig. 10.2

Lista indicațiilor date mașinii pentru rezolvarea unei anumite probleme se numește program.

O schemă logică de calcul poate fi alcătuită și sub forma unui tabel. În primele rînduri se trec datele problemei, iar în următoarele rînduri sînt trecute tocmai indicațiile care se dau calculatorului pentru rezolvarea problemelor.

Exemplu

Să se afle valoarea lui $y = \frac{(ax + b)}{cx^2}$, unde $a = 5$, $b = 9$, $c = 9$, $x = 4$.

Procesul de calcul care conduce la aflarea valorii lui y este reprezentat în următoarea schemă :

Număr instrucțiune	Conținutul instrucțiunii	Rezultatul
1	a	5
2	b	9
3	c	9
4	x	4
5	$(1) \times (4)$	20
6	$(5) + (2)$	29
7	$(4) \times (4)$	16
8	$(3) \times (7)$	144
9	$(6) : (8)$	$\frac{29}{144}$

Această listă cuprinde programul instrucțiunilor codificate pentru calculatorul uman.

În coloana 2 se indică ce anume operații trebuie efectuate. Așa de exemplu în rîndul (5) se indică operația de înmulțire între valoarea lui a trecută în rîndul (1) și valoarea lui x trecută în rîndul (4).

Coloana a treia este lăsată liberă pentru a se trece rezultatele.

10.2 EXERCITII

1. Să se alcătuiască programul de calcul și să se calculeze valoarea polinomului $y = ax^2 + bx + c$, în punctele :

$$x_1 = 145,36, \quad x_2 = 103,35, \quad x_3 = 105,48,$$

$$x_4 = 119,68, \quad a = 11,36, \quad b = 0,015, \quad c = 11,136.$$

2. Să se alcătuiască și să se calculeze valoarea polinomului : $y = ax^3 + bx^2 + cx$, $a = 11,36$, $b = 0,015$, $c = 13,135$, în punctele $x_1 = 147,63$, $x_2 = 114,74$, $x_3 = 1103,36$.

3. Să se alcătuiască programa de calcul pentru rezolvarea sistemului :

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0, \end{cases}$$

unde :

$$a_1 = 0,143, \quad b_1 = 1,157, \quad c_1 = 114,36,$$

$$a_2 = 0,105, \quad b_1 = 1,046, \quad c_1 = 108,30.$$

4. Să se alcătuiască programul de calcul pentru parcelarea unui lot de forma unui triunghi avînd $S = 140,36$ ha și $L = 1483,15$ mm și 100 de parcele egale.

Capitolul 11

PROBLEME CU CONȚINUT PRACTIC

1. Dintr-o sîrmă de oțel cu diametrul de 5 mm se confecționează un arc elicoidal cu o lungime de 122 mm. Să se stabilească numărul de spire, dacă distanța dintre ele este de 8 mm.

2. O scîndură de lățime $b = 236$ mm trebuie tăiată în șipci a căror grosime să fie $b_1 = 20$ mm. Lățimea tăieturii este $t = 4$ mm. Cîte șipci se obțin din această scîndură?

3. Un geam are forma unui dreptunghi. Cît de mare trebuie să fie lungimea și lățimea geamului, pentru ca la perimetrul dat de $2p$ să pătrundă lumină cît mai multă.

4. Prețul de cost al unui produs se compune din mai multe elemente (valoarea materiilor prime, retribuțiile lucrătorilor etc.). Valoarea materiilor prime și a retribuțiilor reprezintă d lei pentru fiecare produs finit. Cheltuielile indirecte de producție (de exemplu : amortizarea clădirilor și echipamentelor, fondul de retribuire a acelor care nu sînt direct în producție) sînt de s lei pe an. Prețul de vînzare este r lei pentru o unitate a produsului.

Cîte unități de produs trebuie realizate pe an, pentru a avea un cîștig mai mare decît p lei?

5. Diferența de înălțime între locuințele așezate în punctul cel mai înalt al unui oraș și stația de pompare pentru alimentarea cu apă este h . Pierderea de presiune care apare în conductele de apă din cauza frecărilor nu este mai mare de $f\%$ în punctele cele mai îndepărtate.

Ce presiune trebuie să aibă apa de la stația de pompare pentru ca în întreaga conductă de apă a orașului scăderea de presiune să fie sub p pascali?

6. Dintr-o foaie de tablă trebuie să confecționăm 25 de șaibe (inele circulare) al căror diametru exterior este de 50 mm și diametrul interior de 22 mm (fig. 11.1).

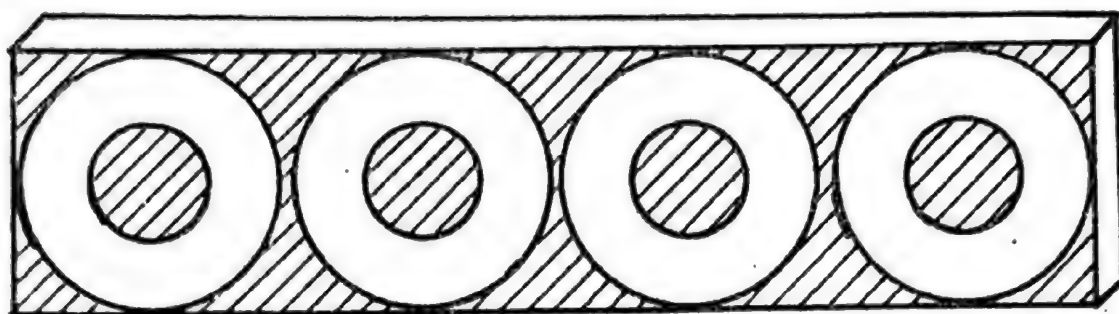


Fig. 11.1

a) Ce suprafață de tablă trebuie să avem dacă 35 % se consideră pierdere tehnologică?

b) Dacă utilizăm porțiunea de tablă din interiorul inelului, cu cât scade procentul de pierdere tehnologică?

7. Coeficientul de frecare la transmisii prin curele este dat de formula $\mu = a + bv$, coeficient care depinde de viteza de deplasare v a curelei.

Stabiliți mărimile constante a și b pentru o curea din piele dacă pe cale experimentală s-au găsit următoarele valori ale coeficientului :

$$\mu_1 = 0,4 \text{ la viteza de alunecare } v_1 = 0,1 \text{ m/s,}$$

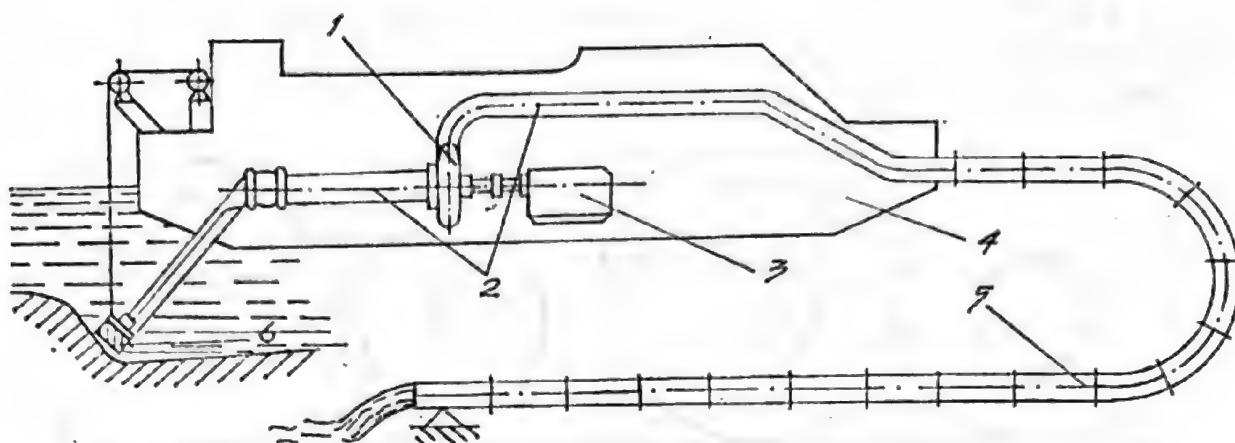
$$\mu_2 = 0,5 \text{ la viteza de alunecare } v_2 = 0,5 \text{ m/s.}$$

8. Corpul unui om matur are greutatea de m kg și volumul $v \text{ dm}^3$. Calculați câte plăci de plută cu volumul $v_1 \text{ dm}^3$ sînt necesare pentru un colac de salvare, care să asigure ca, după scufundarea completă în apă dulce, volumul unui înotător să iasă cu $f\%$ deasupra apei.

Densitatea plutei este $0,2 \text{ kg dm}^{-3}$.

9. Din cîți elementî (țevi individuale) trebuie să fie formată conducta unei nave absorbant refulantă (fig. 11.2), astfel ca să transportenisiplu aluvionar la o distanță de 350 m de la locul de extragere pînă la un dig, dacă lungimea fiecărui element este de 8 m și lungimea țevii în interiorul elevatorului absorbant este de 46 m?

10. Un oraș este așezat lîngă un rîu. La ce distanță de portul orașului trebuie amenajat un ștrand pentru ca o cursă cu vaporul dus-întors să dureze t min. (nu se ține cont de opriri). Viteza proprie a vaporului se notează cu v (km/min) și viteza curentului cu v_1 (km/min), unde ($v_1 < v$).



1. POMPĂ CENTRIFUGĂ;
2. CONDUCTĂ ABSORBANT REFULANTĂ;
3. MOTOR PRINCIPAL;
4. CARCASĂ;
5. SEGMENT;
6. FREZĂ;

Fig. 11.2

11. Localitățile A și B sînt la o distanță de 5 km una față de alta. În localitatea A prețul de cost al unei tone de cărbune este 1 lei, în localitatea B cu $p\%$ mai mult. La care punct între A și B va fi mai ieftin cărbunele care vine din B față de cel din A dacă pentru o tonă de cărbune pe km cheltuielile de transport sînt de n lei.

12. Să se pregătească o soluție $p_1\%$ iod și alcool. Cîte grame de alcool trebuie puse la o soluție de iod de $p\%$ pentru a obține o soluție a cărei concentrație să nu fie mai mică de $p_1\%$ ($p_1 < p$)?

13. Brațele șublerului care se folosește la măsurarea diametrelor orificiilor au o rază mult mai mică decît cel mai mic orificiu de măsurat (fig. 11.3). Să se stabilească eroarea care se face la măsurarea diametrului unei găuri, dacă brațele șublerului

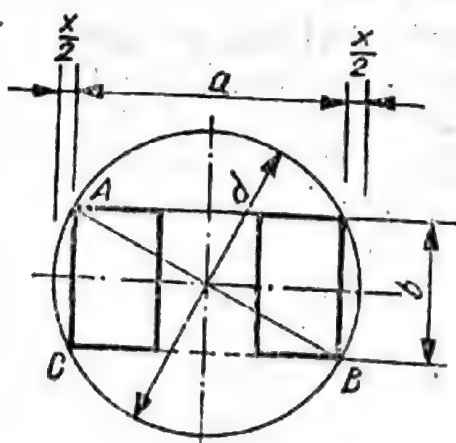


Fig. 11.3

sînt drepte și la măsurare a fost obținut diametrul $a = 15$ mm. Lățimea brațului este $b = 6$ mm.

14. Într-o tablă dreptunghiulară cu laturile $a = 6$ cm și $b = 400$ cm, să se taie o deschizătură dreptunghiulară cu o suprafață $A = 1000$ cm², astfel încît marginile să se afle la distanță egală de marginea tablei.

15. O geamandură care are forma unui trunchi de con (fig. 11.4) cu greutatea m se scufundă într-un lichid cu densitatea ρ pînă la o

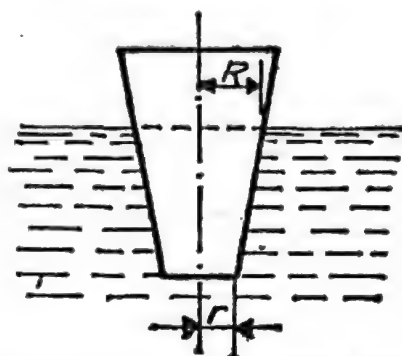


Fig. 11.4

adîncime h . Baza geamandurii care se scufundă în lichid are raza r . Să se determine raza bazei geamandurii la suprafața lichidului.

16. Două roți dințate cilindrice sînt angrenate ca în fig. 11.5. Vitezele periferice pe cele două cercuri de rostogolire sînt la ambele roți egale. Se știe că dacă n_1 și n_2 reprezintă numărul de rotații al celor

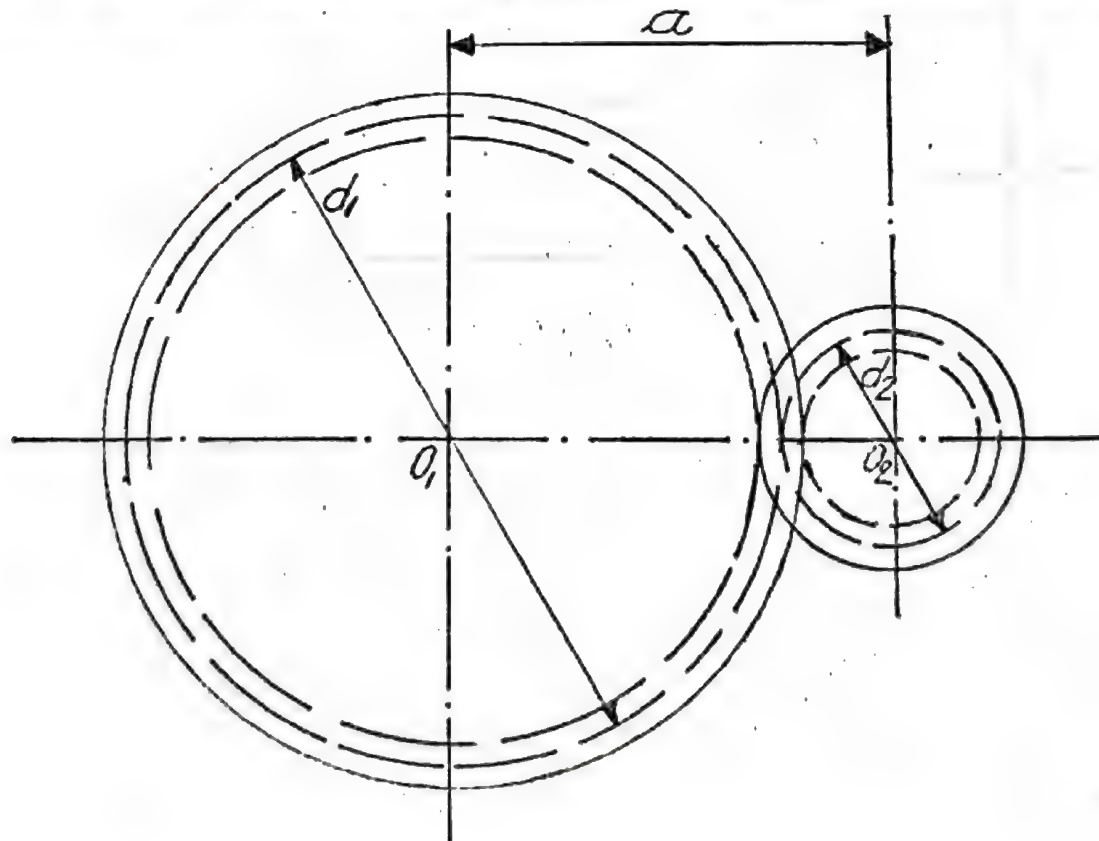


Fig. 11.5

două roți dințate și d_1 și d_2 diametrele cercurilor de rostogolire atunci avem relația $n_1 d_1 = n_2 d_2$. Cunoscînd că z_1 și z_2 reprezintă numărul de dinți al roților și distanța dintre centrele roților dințate fiind a , să se afle diametrele centrelor de rostogolire a celor două roți dințate angrenate.

17. Doi arbori paraleli sînt legați între ei prin două roți dințate (fig. 11.6). Pentru obținerea unui alt raport de turații $\frac{n_1}{n_2} = i$,

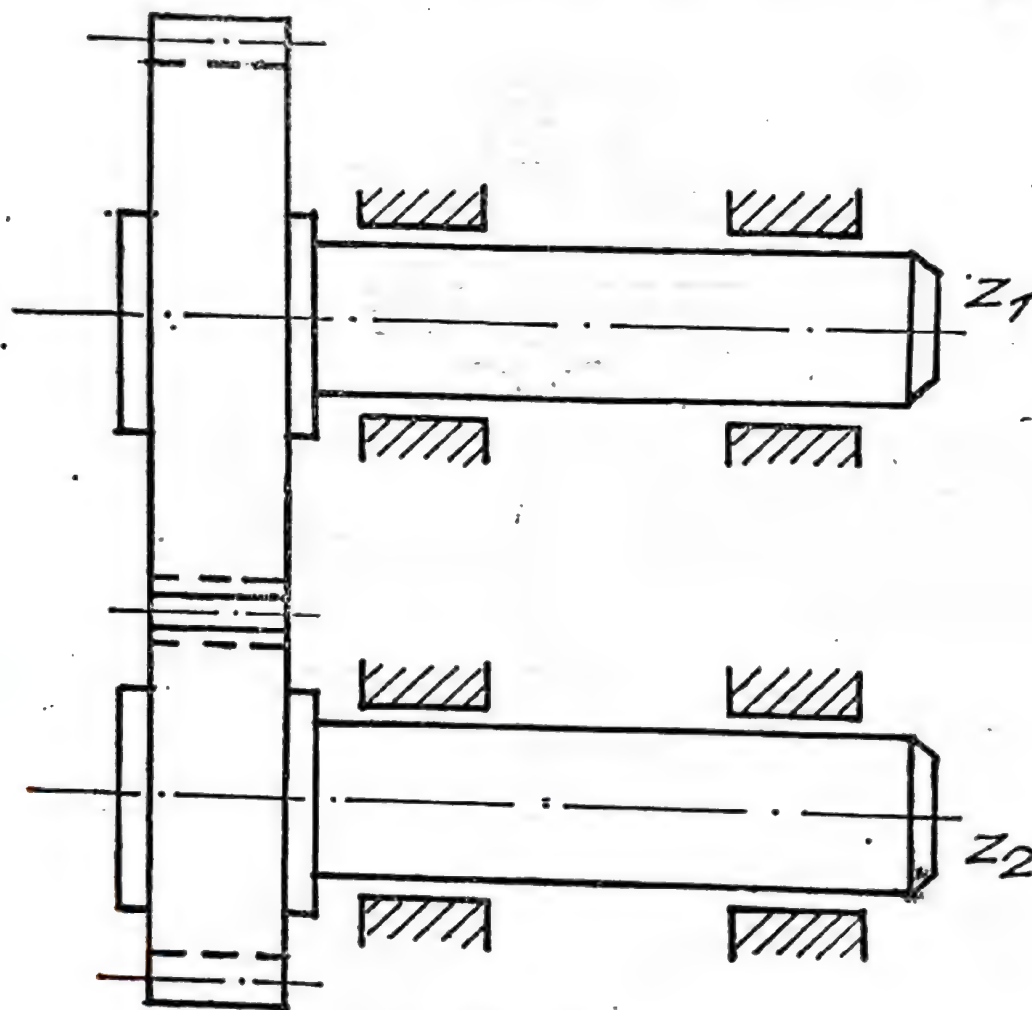


Fig. 11.6

vom schimba în așa fel roțile dințate între ele astfel încît suma numărului de dinți z_1 și z_2 să nu se schimbe, rămînînd egală cu z_0 . Să se afle z_1 și z_2 după schimbare.

18. Dintr-o foaie de tablă vom tăia în sensul lungimii două benzi de 10 cm lățime. Suprafața diminuată a foi de tablă a rămas de 12 dm². Vom tăia în sensul lățimii două benzi de 10 cm lățime și noua suprafață diminuată este de 560 cm². Care sînt dimensiunile foi de tablă și suprafața sa?

19. Formatul A_0 utilizat în desen este un dreptunghi de 1188 × 840 mm.

a) Care este suprafața acestui format?

b) Care este raportul dintre lungime și lățime?

20. O masă pătrată, a cărei latură este 1,10 m, este prevăzută la capete cu două semicercuri. Care este suprafața acestei mese?

Pentru acoperirea ei cu o față de masă se cumpără o pânză a cărei lățime este 1,40 m. Ce lungime de pânză este necesară, pentru ca la extremitățile mesei pânza să cadă la fel pe fiecare latură?

21. Dintr-o bucată de țesătură vom tăia pătrate cu latura de 12 cm în sensul lățimii și vom tăia 5 benzi de 12 cm lățime. Din fiecare bandă vom obține 7 pătrate. Extremitățile neutilizate din benzi formează un dreptunghi cu suprafața de $3,6 \text{ dm}^2$. Care sînt dimensiunile și suprafața țesăturii? Efectuați un desen.

22. Un tâmplar trebuie să execute o ușă după schița din figura 11.7.

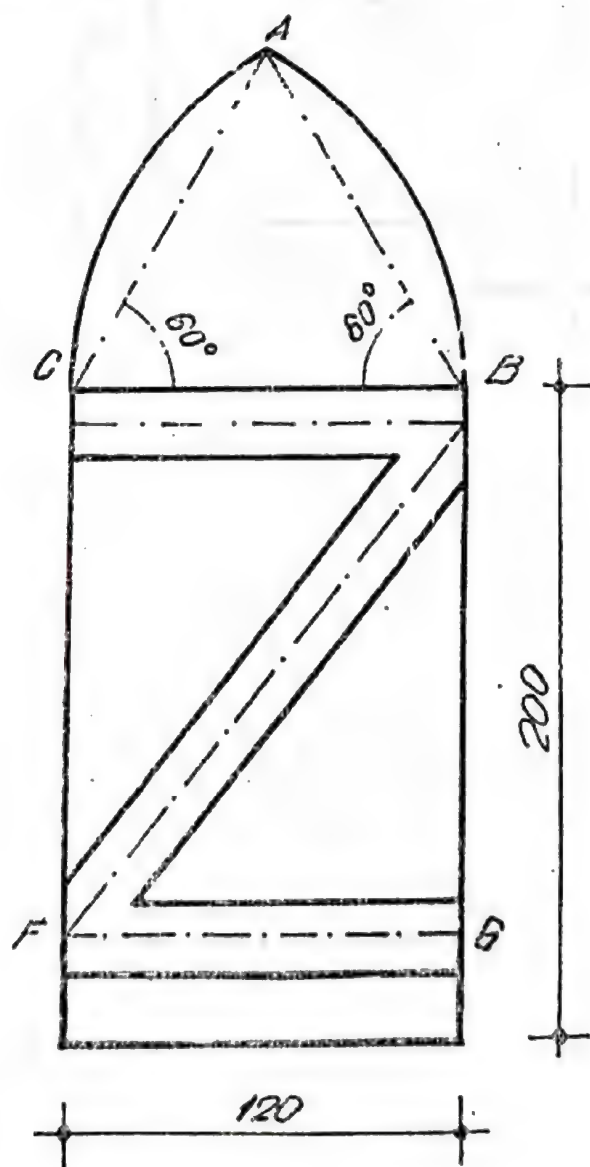


Fig. 11.7

- a) Calculați înălțimea acestei uși.
- b) Calculați suprafața sa, fără să țineți seama de pierderi tehnologice sau de grinzile transversale (dimensiuni în cm).

23. Aveți de confecționat ușa reprezentată în figura 11.8.

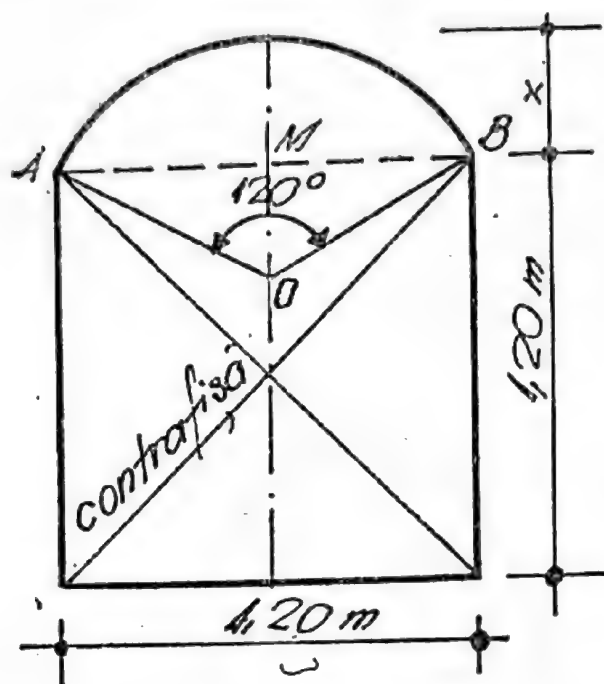


Fig. 11.8

Calculați :

- a) lungimea unei contrafișe ;
- b) raza OA a bolții ;
- c) săgeata bolții (în figură notată x) ;
- d) suprafața totală a ușii.

24. Un planșeu circular este perforat în centru cu o deschizătură în formă exagonală așa cum este indicat în figura 11.9.

Dindu-se raza planșeului egală cu 3,25 m și latura $OM = 1,3$ m, calculați :

- a) lungimea segmentelor CD , AB și OA ;
- b) aria planșeului ;
- c) care este suprafața de material lemnos care a fost necesară pentru realizarea cofrajului acestui planșeu, știind că 20% reprezintă pierderile tehnologice de lemn brut pentru tăieturi și asamblare.

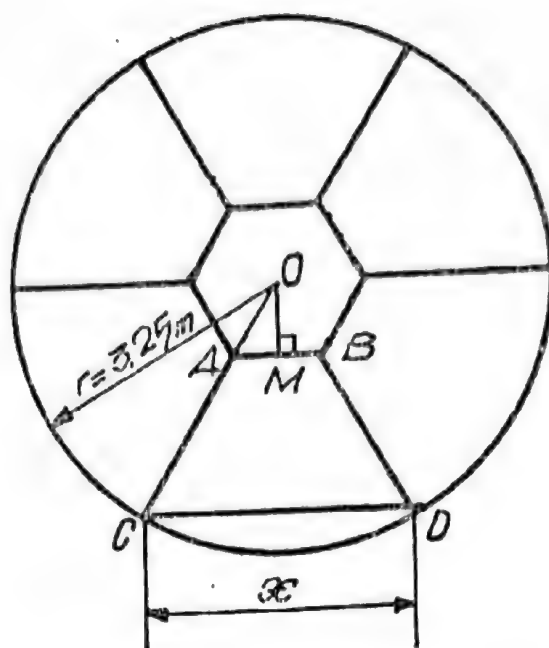


Fig. 11.9

25. Un timplar vrea să realizeze dintr-o foaie de placaj, a cărei formă este un pătrat cu latura de 1 m, un octaedru regulat conform desenului de mai jos (fig. 11.10)

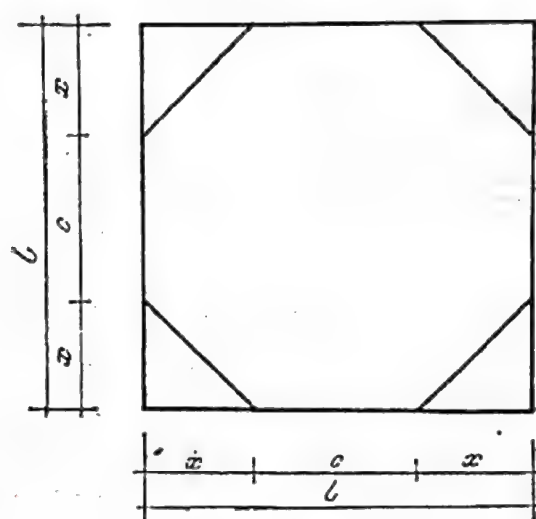


Fig. 11.10

Calculați :

- lungimea x care trebuie dusă din vîrfuri pentru a tăia bucățile necesare ;
- lungimea laturii c a octaedrului ;
- suprafața sa ;
- procentajul deșeurilor.

- c) suprafața jumătății de elipsă $ABCD$;
 d) suprafața ce trebuie vopsită.

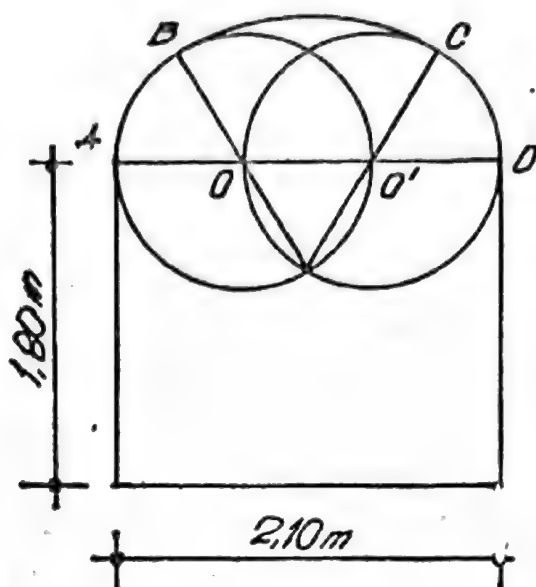


Fig. 11.13

29. Dintr-o țesătură care are următoarele dimensiuni : 50 cm și 60 cm se taie benzi oblice necesare pentru bordarea unui volan de 2,5 m lungime. Lățimea benzilor oblice este de 2 cm. Executați un desen la scara 1/10.

30. Planșeul unei încăperi are forma unui trapez dreptunghic cu dimensiunile următoare : $B = 4,5$ m, $b = 3,5$ m și $h = 3$ m. Calculați suprafața acestui planșeu.

Planșeul este susținut de grinzi distanțate unele față de altele la 50 cm, paralele cu bazele, și încastrate 15 cm în zidărie. Calculați lungimea totală a grinzilor.

31. Într-o bucătărie de 6 m lungime și 4,5 m lățime un faianțar are de placat cu faianță suprafața bucătăriei pînă la înălțimea de 1,50 m. O placă de faianță are dimensiunile 15×15 cm. În această bucătărie există o ușă cu dimensiunile 1×2 m și o fereastră de $1,80 \times 0,8$ m și baza ei se află la 90 cm de la nivelul pardoselii.

Calculați cantitatea de faianță necesară plăcării acestei bucătării.

32. Un fotogravor are de executat trei clișee asemănătoare după trei documente. Primul document are forma unui cerc cu diametrul 0,26 m și pe care trebuie să-l reducă la jumătate. Al doilea document are forma unui dreptunghi cu lungimea de 0,36 m și lățimea de 0,15 m. Acesta, după execuție, trebuie să fie cu 12 cm mai lung. Al treilea document este un pătrat a cărui latură este 9 cm și trebuie executat la fel.

Dacă metalul folosit costă 2,10 lei/cm² care este prețul metalului folosit pentru confecționarea acestor trei clișee.

33. Pe un plan de sistematizare a unui oraș vom măsura cu rigla :

- planul unei coloane măsurînd 8,2 cm,
- peronul gării 16 cm.

Care sînt dimensiunile reale, știind că 4,1 cm din plan reprezintă 30 m în realitate.

34. Se încheie o fentă de 33,5 cm lungime de pe o haină cu 12 butoni, astfel ca butonii să fie cusuți la o distanță de 1 cm unul față de celălalt. Centrul primului și ultimului buton să fie la o distanță de 3 cm față de extremități. Găsiți ce diametre au butonii.

35. Pentru construirea canalelor de scurgere se utilizează tuburi lungi de 1,2 m. Fiecare tub are la una din extremități o porțiune lărgită în care intră, pe o distanță de 10 cm tubul următor. Un elev susține că lungimea totală a 10 tuburi asamblate este de 11 m ; un altul afirmă că lungimea celor 10 tuburi asamblate este de 11,10 m.

Să se arate prin calcul care dintre cei doi elevi are dreptate.

36. Figura 11.14 reprezintă planul orizontal a unei săli, a

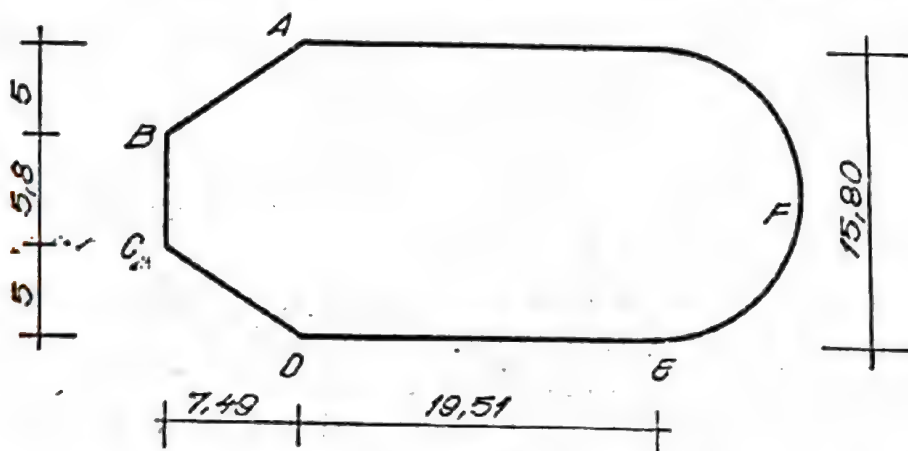


Fig. 11.14

cărei înălțime este de 6,35 m, avînd 4 uși de acces cu înălțimea de 3,25 m și lățimea de 2,3 m. Se propune zugrăvirea cu vinacet a acestei săli.

Calculați :

- a) suprafața planșeului ;
- b) suprafața pereților ce trebuie zugrăviți ;
- c) suprafața totală de zugrăvit ;

d) cantitatea de material folosit pentru zugrăvirea sălii știind că pe metru pătrat se consumă 0,500 kg vinacet.

37. Ornamentul central al unei pardoseli din mozaic are două culori. Forma sa este reprezentată în figura 11.15 a și dimensiunile

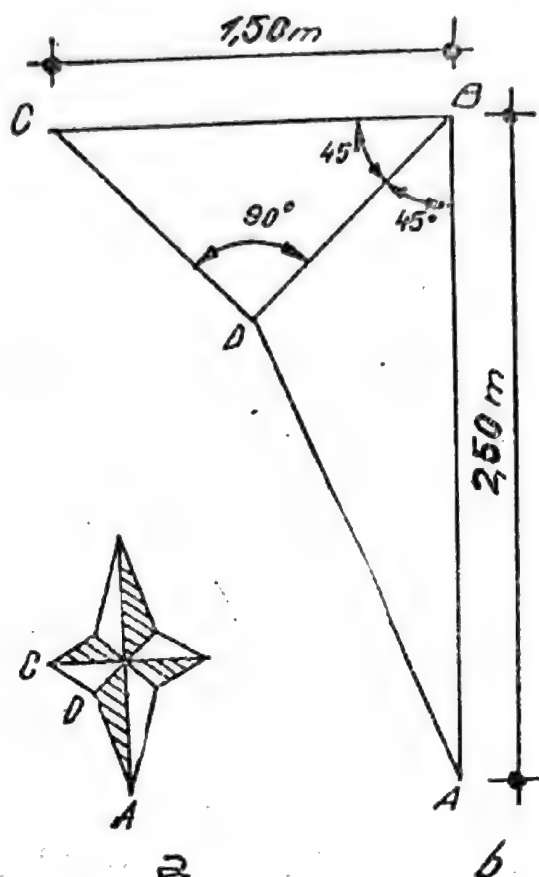


Fig. 11.15

sînt date pe figura 11.15 b.

Care este suprafața ornamentului și ce suprafață are fiecare culoare?

38. Vestibulul unui apartament avînd o formă exagonală are două ziduri opuse la distanța de 5,2 m unul față de celălalt.

Calculați :

a) lățimea fiecărui zid al vestibulului;

b) suprafața totală a vestibulului, urmînd ca acesta să fie zugrăvit, știind că :

- înălțimea la care se află planșeul este de 4 m;
- pe fiecare din aceste ziduri se află uși către alte încăperi ale apartamentului;
- dimensiunile ușilor sînt de $1 \times 2,2$ m.

39. O încăpere urmează a fi acoperită cu mochetă. Dimensiunile încăperii sînt de $4 \times 3,5$ m iar lățimea unei fișii din mochetă

este de 70 cm. Efectuați un desen la scara 1/100 reprezentând și dispunerea fișilor din mocheta. Care este lungimea totală a mochetei ce trebuie cumpărată?

40. O încăpere avînd o formă dreptunghiulară cu dimensiunile de $4,2 \times 3,2$ m și înălțimea de 3,20 m urmează a fi tapetată. Știind că pe unul din ziduri se află o fereastră a cărei suprafață este de $2,60 \text{ m}^2$ și o ușă cu dimensiunile de $1 \times 2,20$ m, calculați suprafața totală de tapet necesară.

41. Dintr-o foaie de hîrtie format comercial de 210×270 cm vom decupa etichete de dimensiunile 5×3 cm. Cite etichete vom obține din această coală de hîrtie?

42. Se comandă vopsirea a 50 de borne de kilometraj situate pe un drum național. Bornele au forma unui paralelipiped vopsit în alb și sînt montate pe semisfere ce sînt vopsite în roșu. O bornă are 40 cm lățime și 35 cm grosime iar înălțimea totală de 86 cm.

Care este suprafața totală a bornelor vopsite în roșu? Dar în alb?

43. Un tinichigiu are de confecționat din tablă zincată de 2 mm un burlan cilindric al cărui diametru interior este de 0,240 m și lungimea de 2,265 m.

Calculați :

a) dimensiunile foi din tablă din care este confecționat burlanul, știind că pentru îmbinare avem nevoie de 28 mm în plus;

b) masa cantității acestei table, dacă densitatea tablei este de $7,6 \text{ kg/dm}^3$.

44. Se confecționează un recipient de formă cilindrică, cu capac din tablă ce cîntărește 5 kg/m^2 . Înălțimea este egală cu diametrul. Calculați suprafața de tablă utilizată, știind că recipientul confecționat cîntărește 2543 gr. Care este capacitatea recipientului?

45. Într-un cilindru de 40 mm în diametru se execută la freză tăietura definită prin cota $a = 30$ mm (figura 11.16).

a) Calculați lungimea b a tăieturii obținute.

b) Care este raportul între noua și vechea greutate a cilindrului, știind că el măsoară în lungime 150 mm.

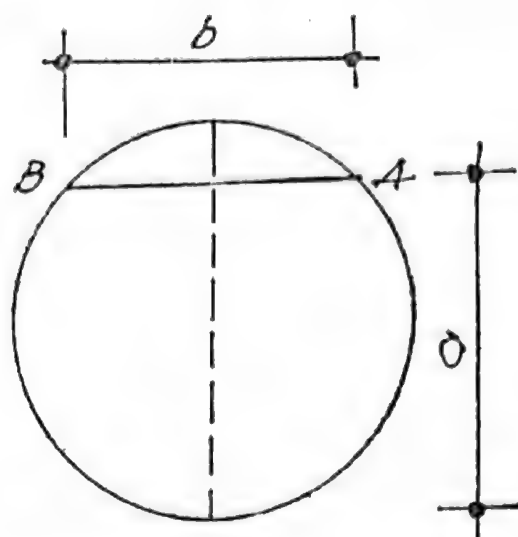


Fig. 11.16

46. Partea conică a unei mandrine port-sculă are [diametrele de 12,04 mm și 9,04 mm și lungimea de 54 mm.

a) Care este conicitatea mandrinei?

b) Ce unghi formează generatoarea cu axa? (Se știe că unghiul corespondent unei pante de 0,01 dă $4/7$ grade).

47. Pentru confecționarea unui dulap din stejar avem nevoie de $0,3 \text{ m}^3$ de lemn prelucrat și 35 ore pentru confecționare, asamblare și finisare. Se știe că lemnul brut costă 650 lei/ m^3 și că deșeurile reprezintă 10%. Pentru o oră tâmplarul este plătit cu 11 lei. Cu cât trebuie vândut dulapul pentru realizarea unui beneficiu de 40%. Care este volumul de lemn neprelucrat necesar pentru confecționarea a cinci dulapuri?

48. O persoană vrea să-și repare casa. Arhitectul întocmește un deviz estimativ în modul următor;

— repararea elementelor de construcții: 9500 lei, tencuirea 2500 lei, acoperișul 1050 lei, vopsirea 2065 lei și diverse 606 lei.

Beneficiul ICRAI-ului este fixat la 5% din cheltuielile la care se ridică reparația casei.

Care este valoarea totală a reparațiilor casei?

49. Un rezervor cilindric din tablă are diametrul de 1,4 m și 1,45 m înălțime. Se vopsește pe partea laterală și capacul de la baza rezervorului la prețul de 5 lei/ m^2 .

Care este prețul vopsirii și cantitatea de vopsea necesară pentru un metru pătrat știind că s-a utilizat 7,920 kg de vopsea?

50. Un tinichigiu efectuează 16 burlane pentru sobă, de 95 cm lungime și de diametrul 12 cm.

Calculați :

a) Suprafața de tablă necesară confecționării burlanelor, știind că pentru îmbinare sînt necesari 1,25 cm ?

b) Calculați masa acestor burlane știind că tabla are 0,8 mm grosime iar densitatea metalului este $7,8 \text{ kg/dm}^3$.

51. Într-un atelier se confecționează cutii cilindrice din carton pentru pălării. Înălțimea cilindrilor este de 30 cm- iar capacele au diametrul de 50 cm. Exteriorul suprafeței laterale și a capacului se acoperă cu hîrtie colorată, iar muchiile și bordurile cutiei se finisează cu o pînză avînd un adeziv.

Calculați suprafața cutiei, suprafața hîrtiei necesară pentru acoperirea unei cutii și lungimea pînzei cu adeziv necesară pentru o cutie ?

52. Un grilaj este format din : 4 bare de oțel, cu lungimea de 3 m și diametrul de 2 cm, o foaie din tablă de 3 m lungime și 1,8 m înălțime, două bare plate de 3 m lungime, cu 4,5 cm lățime și 15 mm grosime. Ce suprafață de vopsire anticorozi-vă, avem ?

53. O garnitură de fier are forma indicată în figura 11.17

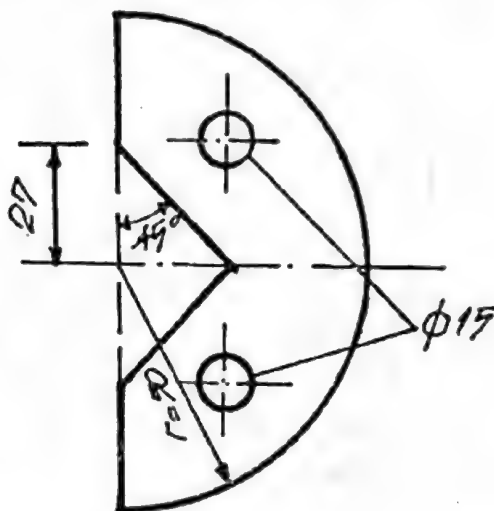


Fig. 11.17

(cotele în mm). Calculați greutatea acestei garnituri știind că ea este confecționată din tablă a cărei grosime este de 5 mm și cîntărește 3,894 kg (densitatea este de $7,8 \text{ kg/dm}^3$).

54. Un cilindru metalic din oțel are înălțimea de 100 mm și diametrul de 50 mm. Calculați diametrul burghiului cu care s-a

străpuns cilindrul în sensul înălțimii lui, știind că șpanul rezultat din operația efectuată cântărește 0,3 kg iar densitatea oțelului este de $7,8 \text{ kg/dm}^3$.

55. Un șlefuitor trebuie să repolizeze un mic monument din marmoră, schițat în figura 11.18. Acesta se compune dintr-un soclu

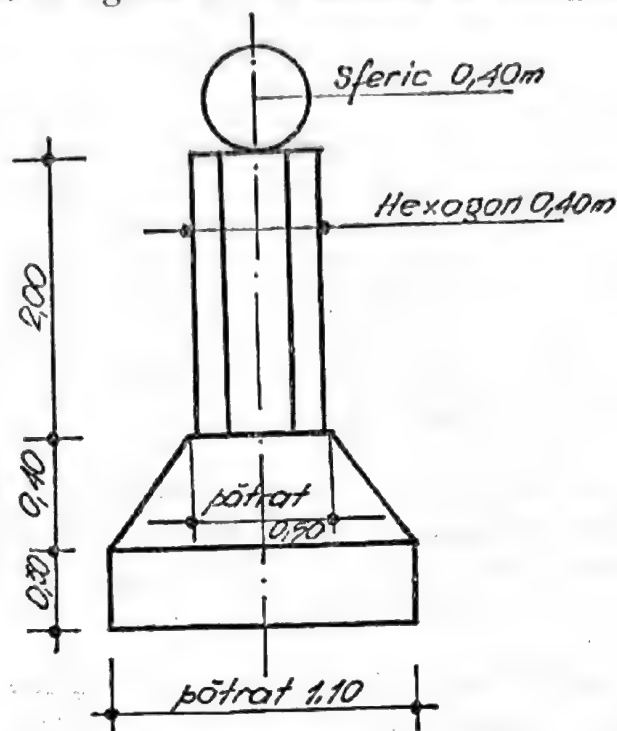


Fig. 11.18

și dintr-un trunchi hexagonal, și o sferă. Numai porțiunile care se văd se tratează. Care va fi prețul acestei operații dacă prețul unitar de șlefuire netedă este de 300 lei/m^2 .

56. Piesa finită din figura 11.19 folosită pentru frâna de vagoane

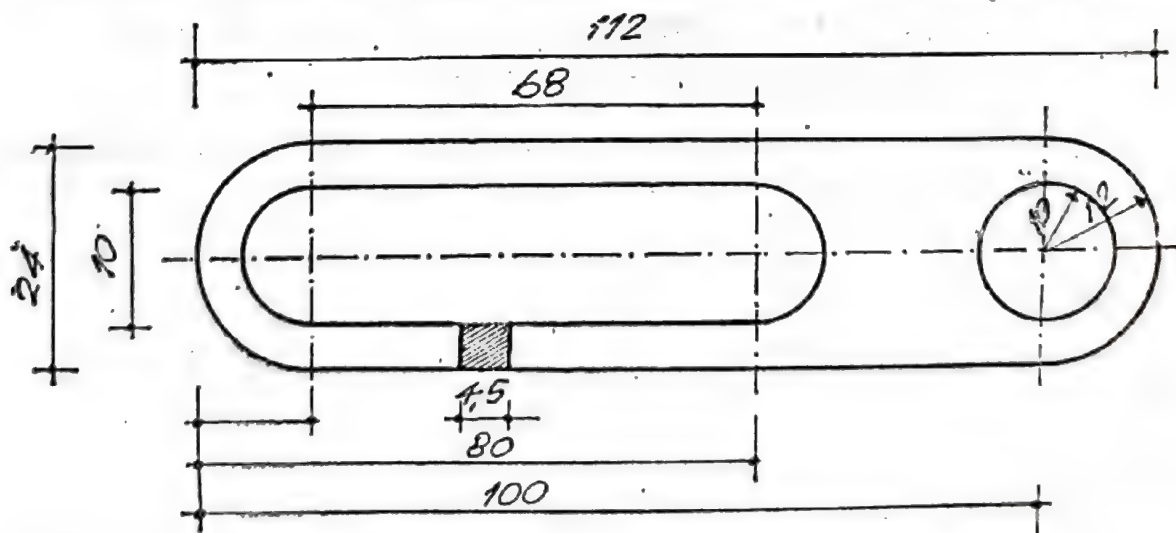


Fig 11.19

este obținută prin forjare (cotele sînt în mm). Se cere :



- a) Volumul piesei finite în dm^3 ;
- b) masa în kg ($\rho = 7,8 \text{ kg/dm}^3$);
- c) greutatea metalului pierdut prin prelucrare, care reprezintă 12% din greutatea piesei finite;
- d) calculați cantitatea de material folosit la forjarea piesei.

57. Dintr-o bară cilindrică din oțel se taie o altă bară a cărei secțiune este un pătrat. Care este diametrul barei inițiale?

58. Care este masa unui cablu din oțel, lung de 100 m, avînd diametrul de 5 cm. Densitatea oțelului este de $7,8 \text{ kg/dm}^3$.

59. Care este lungimea unui fir de cupru, avînd diametrul de 1 mm și cîntărind 1 kg ? (Densitatea cuprului este de $8,9 \text{ kg/dm}^3$).

60. Un jgheab din piatră are în exterior forma unui paralelipiped dreptunghic de 1,2 m lungime, 0,75 m lățime și 0,45 m înălțime. Grosimea pietrei este uniform repartizată și măsoară 75 mm. Calculați volumul acestei pietre.

61. Se confecționează un abajur, avînd forma unui trunchi de con și a cărei muchie laterală este a și înălțimea h . Aria laterală se desfășoară după un sector de coroană circulară, al cărui unghi la centru este de 120 grade. Calculați suprafața abajurului în funcție de razele $r = 60 \text{ cm}$ și $R = 120 \text{ cm}$.

62. Care este cantitatea de piele necesară pentru confecționarea unei mingi, a cărei diametru este de 30 cm și adăugînd 12% din aria teoretică în plus pentru cusături.

63. Din tablă se confecționează un stingător, avînd formă cilindrică cu înălțimea de 0,650 m și diametrul cercului de bază de 0,220 m.

Determinați :

- a) suprafața tablei necesare pentru confecționarea stingătorului;
- b) capacitatea în litri;
- c) greutatea electrozilor de sudură autogenă știind că recipientul este sudat urmînd generatoarea și circumferința bazei. Pentru fiecare dm de sudură se folosesc 4,5 g de electrozi.

64. Secțiunea orizontală într-o cisternă este reprezentată în figura 11.20. Lungimea ei este de 4,5 m.

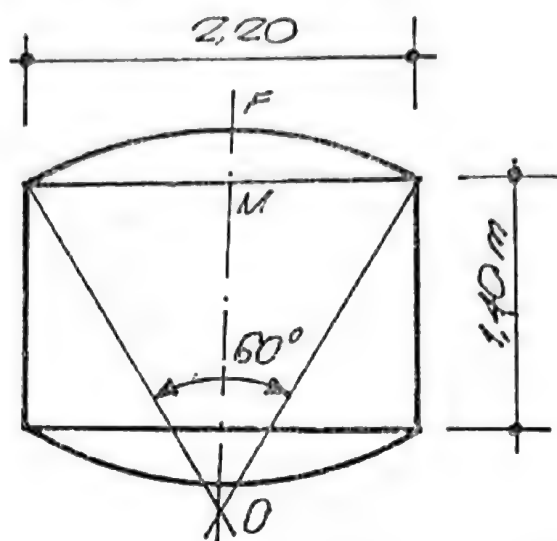


Fig. 11.20

- calculați lungimea MF a săgeții arcelor superioare și inferioare;
- suprafața fundului cisternei;
- calculați suprafața laterală și totală a tablei întrebuintate;
- calculați capacitatea cisternei în hl.

65. Un cazan este construit dintr-un cilindru, la capete terminat cu două calote sferice egale. Calculați volumul acestui cazan, știind că raza cilindrului este de 0,80 m, lungimea totală a cazanului este de 4,60 m și săgeata calotei de 0,30 m.

66. O țeavă confecționată din tablă de plumb, a cărei grosime este de 4 mm și avînd un diametru interior de 20 mm are traseul $ABCD$ indicat în figura 11.21. Calculați :

- urmărind axa, lungimea porțiunii AD ;
- care este suprafața secțiunii țevii;
- masa țevii, știind că densitatea este de $11,35 \text{ kg/dm}^3$.

67. Determinați pentru sifonul din țeavă de plumb, cu diametrul exterior de 34 mm și grosimea peretelui de 4 mm, reprezentat în figura 11.22, lungimea desfășurată și suprafața secțiunii lui.

68. Calculați lungimea sforii necesare pentru legarea în cruce a unei lăzi, avînd forma unui paralelipiped dreptunghic cu lungimea

de 80 cm, lăţimea 50 cm şi înălţimea de 60 cm. Se presupune că pentru fiecare nod sînt necesari 40 cm.

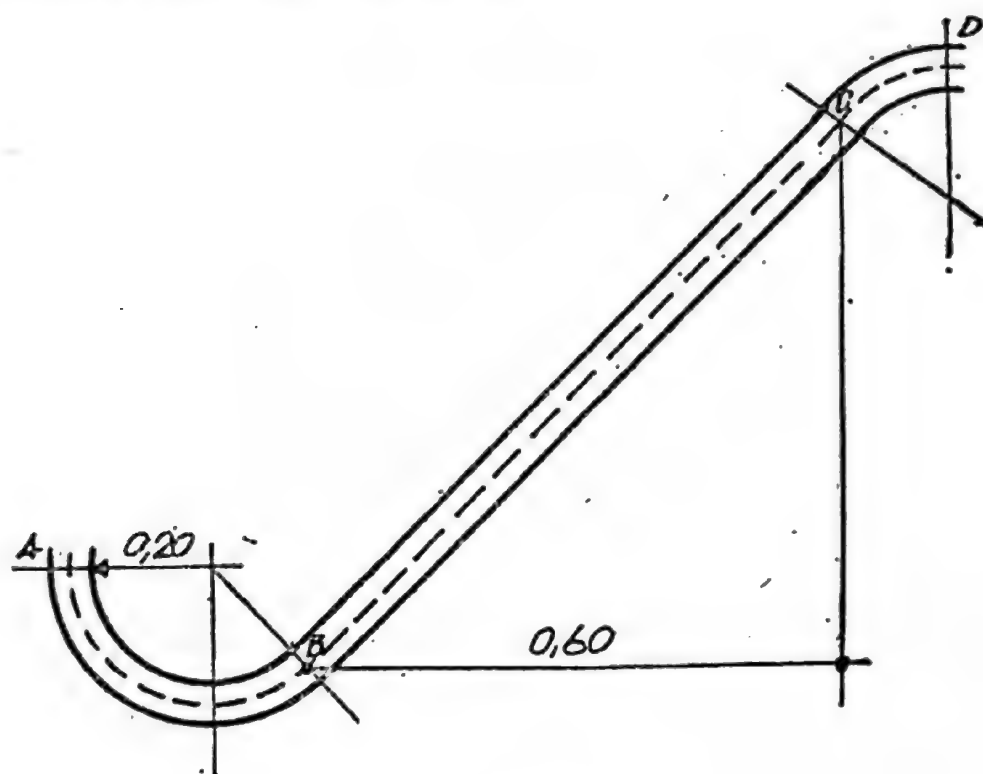


Fig. 11.21

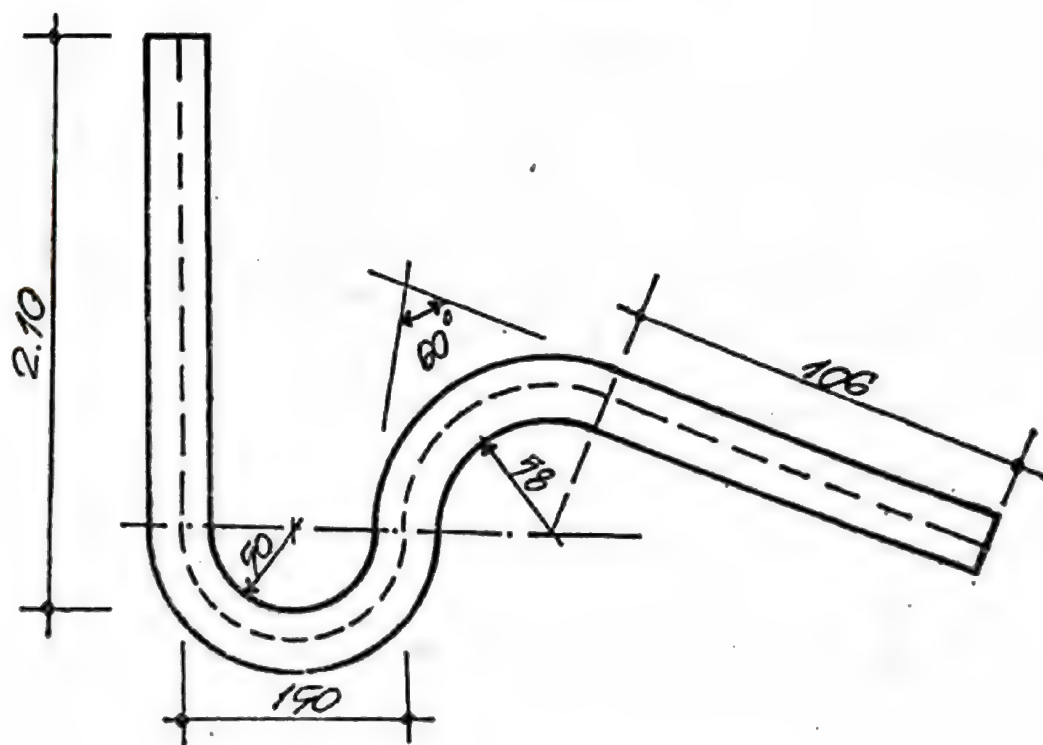


Fig. 11. 22

69. Un colet avînd forma unui paralelipiped dreptunghic se leagă cu sfoară. Lungimea coletului este de 60 cm, lăţimea reprezintă $7/12$ din lungime şi înălţimea $4/5$ din lăţime. Calculaţi lungimea sforii, ştiînd că pentru noduri se folosesc 11 cm de sfoară în plus.

70. Într-o cutie a cărei bază este un dreptunghi ce măsoară în interior 7,2 cm lungime şi 5,8 cm lăţime, trebuie să aranjeze cuburi a căror latură este de 14 mm.

a) Cîte cuburi se pot aranja în primul rînd al cutiei;

b) Care este înălţimea pe care trebuie să o aibă cutia pentru ca ea să conţină 60 cuburi cu latura de 14 mm?

c) Care este volumul interior al cutiei ştiînd că grosimea cartonului din care este confecţionată este de 2 mm?

d) Care este înălţimea interioară a unei cutii de acelaşi volum, avînd baza de 116 mm lungime şi 44 mm lăţime?

71. Calculaţi masa unei bile din oţel de diametru a mm (densitatea oţelului este de $7,8 \text{ kg/dm}^3$).

72. Un recipient semisferic, avînd 10 cm în diametru, este umplut cu apă. Conţinutul se varsă într-un alt recipient conic de 10 cm în diametru. Care este înălţimea minimă a acestui recipient pentru ca el să conţină tot lichidul?

73. O bielă este confecţionată din fontă şi grosimea ei este de 15 mm. Calculaţi masa unităţii bielei ştiînd că densitatea fontei $\rho = 7,8 \text{ kg/dm}^3$ (figura 11.23).

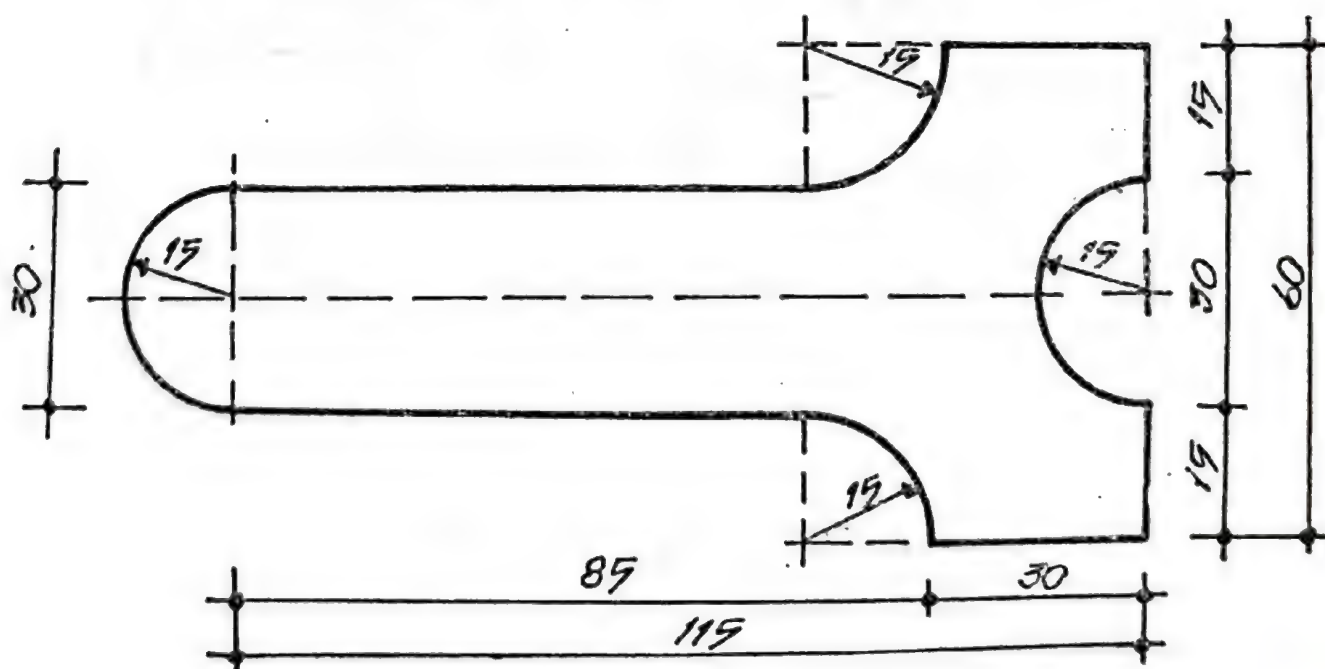


Fig. 11. 23

74. Geamandura indicată în figura 11.24 este formată din 2 conuri, unite prin bază (dimensiunile date în mm).

a) Care este suprafața de tablă întrebuințată?

b) Care este volumul acestei geamanduri?

c) Care este cantitatea de cositor necesar pentru lipirea acestei geamanduri, știind că pentru 1 m liniar de lipitură sînt necesare 80 gr de cositor și că geamandura este lipită pe diametrul AB și generatoarele CD și BD ?

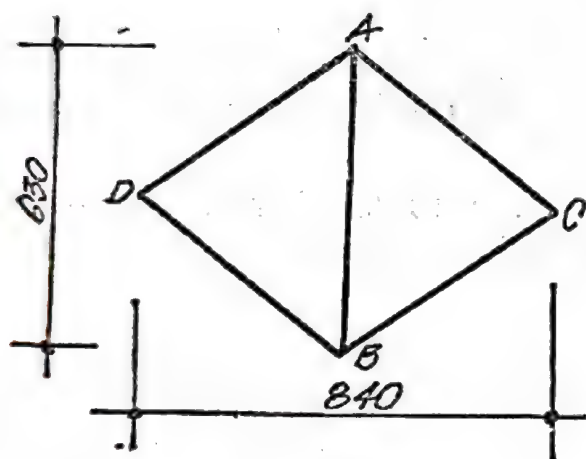


Fig. 11. 24

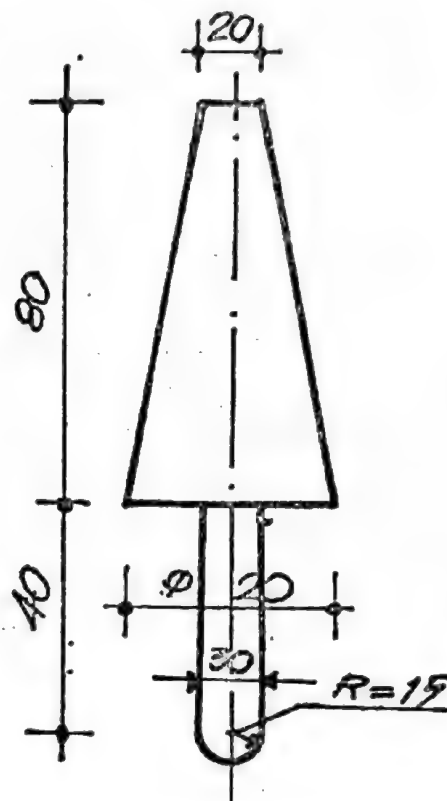


Fig. 11. 25

75. Se confecționează o piesă a cărei formă este cea reprezentată în figura 11.25.

Calculați:

a) Conicitatea;

b) masa piesei, știind că densitatea materialului este de $\rho = 7,8 \text{ kg/dm}^3$.

76. Roata unei căruțe este protejată cu o bandă din oțel lată de 8 cm și groasă de 1 cm. Care este masa protecției, știind că diametrul roții este de 1 m și densitatea oțelului este de $7,8 \text{ kg/dm}^3$.

77. Un puț cilindric, avînd în diametru 2 m și o adîncime de 12 m este căptușit cu o zidărie groasă de 0,25 m.

Care este volumul pămîntului săpat și volumul zidăriei;

78. O cisternă cilindrică al cărei diametru este de 1,5 m se umple cu 8000 l apă pînă la înălțimea de $1/5$. Care este înălțimea cisternei?

79. Un rezervor paralelipipedic realizat din beton armat are lungimea interioară de 2 m, lățimea de 1,6 m, înălțimea de 1,5 m și grosimea pereților de 0,10 m. Calculați volumul zidăriei din beton a rezervorului.

80. Se propune fixarea cu parchet din stejar într-o încăpere de 7,8 m lungime și 7 m lățime și finisarea cu parchet din fag într-o încăpere de 6,5 m lungime și 4,6 m lățime. Calculați masa totală a parchetului necesar știind că parchetul din stejar are o grosime de 10 mm și cîntărește 900 kg/m^3 iar parchetul din fag are grosimea de 15 mm și cîntărește 660 kg/m^3 .

81. Pentru confecționarea cîtorva piese de tîmplărie sînt necesare : 8 scînduri de 4 m lungime, 27 mm grosime și 0,15 m lățime și 7 scînduri de 3 m lungime, 4 cm grosime și 0,4 m lățime. Calculați cubajul total și suprafața totală a acestor scînduri.

82. O masă de lucru este compusă dintr-un blat de $50 \times 35 \text{ cm}$ și de 22 mm grosime, din 4 picioare avînd secțiunea patrată de $4 \times 4 \text{ cm}$ și 65 cm lungime și 4 traverse de 9 cm lățime. Picioarele și traversele susțin blatul. Calculați suprafața de lăcuit. Calculați prețul lăcuirii acestei mese, știind că 1 m^2 costă 10,80 lei.

83. Secțiunile buloanelor sînt calculate astfel ca ele să suporte eforturile la care sînt solicitate.

Știind că un bulon în diametru de 15 mm suportă un efort de 1000 kg, calculați :

a) efortul pe care îl suportă un bulon de 30 mm în diametru ;

b) diametrul unui bulon care suportă un efort de 2000 kg

84. O grindă din nuc de 2,5 m lungime și o secțiune patrată a cărei latură este de 0,40 m se desface în foi de furnir de 1 mm grosime. Calculați suprafața de furnir obținută din acest bloc, știind că $1/20$ din total sînt pierderi tehnologice prin tăierea cu fierăstrăul precum și rebuturile rezultate din noduri.

85. Care este timpul necesar pentru găurirea unui orificiu care are în diametru 25 mm și 300 mm în adîncime, știind că viteza

de aşchiere este de 10 m pe minut şi că avansul pentru gaură în profunzime este de 0,6 mm.

86. Dimensiunile unei statui, reprezentînd un om în picioare se notează în proporţiile următoare, unitatea măsurii fiind lungimea capului (virful capului şi mijlocul bărbiei). Vom nota : lungimea capului = t ; lungimea piciorului = $4t$; lungimea braţului = $3t$; înălţimea gleznei = $\frac{3}{t}$; înălţimea trunchiului = $3t$.

Se ştie că, dacă se ţine seama de înălţimea piciorului, mijlocul înălţimii totale se situează la nivelul şoldurilor. În aceste condiţii, care este numărul de capete (t) conţinute :

- de la cap la talpă;
 - înălţimea totală a piciorului.
- Pentru $t = 24$ cm, calculaţi :

- înălţimea gambei;
- înălţimea braţului;
- înălţimea totală.

87. Vom executa pe o coală de hîrtie, a cărei lungime este de 594 mm şi 297 mm lăţime, un desen. Care este înălţimea desenului, dacă vom avea o margine egală cu 47 mm în jurul colii de desen.

88. Desenul din figura 11.26 reprezintă un bolt.

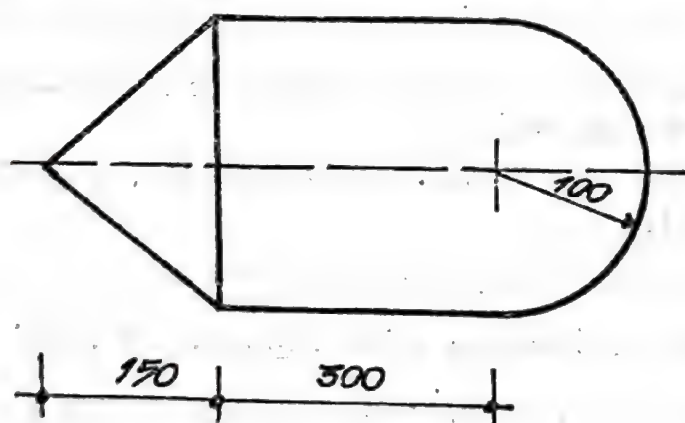


Fig. 11.26

Calculaţi :

- suprafaţa şi volumul semisferei boltului;
- suprafaţa laterală şi volumul părţii cilindrice;
- suprafaţa laterală şi volumul părţii conice;
- suprafaţa exterioară şi volumul acestui bolt.

89. Un flotor este compus dintr-un cilindru cu diametru egal cu 30 cm și lungimea 200 cm, terminat cu două zone sferice cu rază = 17 cm și înălțimea 6 cm (fig. 11.27). Calculați suprafața de tablă care a fost necesară confecționării lui.

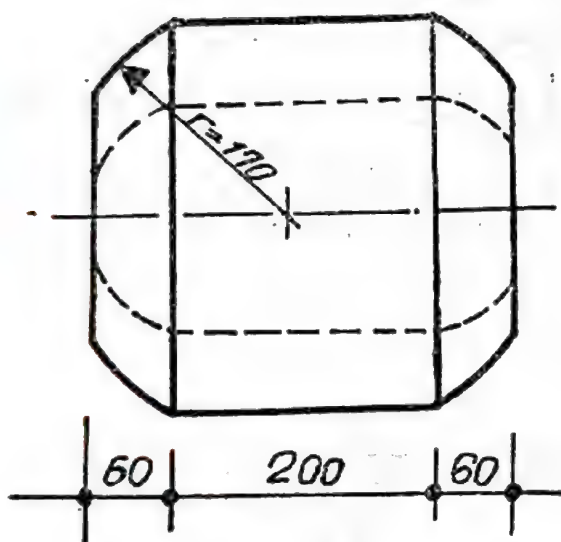


Fig. 11.27

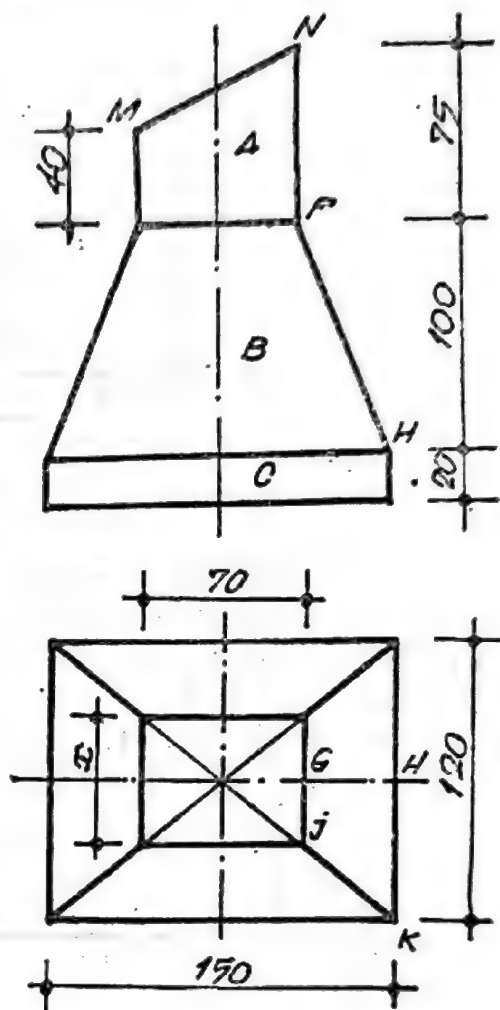


Fig. 11.28.

90. Fie dat colectorul de ventilare reprezentat în figura 11.28.

Calculați :

- MN în $^\circ$;
- înălțimea GH a feței laterale B ;
- latura x ;
- lungimea liniei de sudură JK ;
- aria totală a conductei superioare.

91. Un profil laminat a cărui secțiune este reprezentată în figura 11.29 are o lungime de 6 m. Care este suprafața ce trebuie vopsită cu miniu de plumb pentru al proteja de oxizi, știind

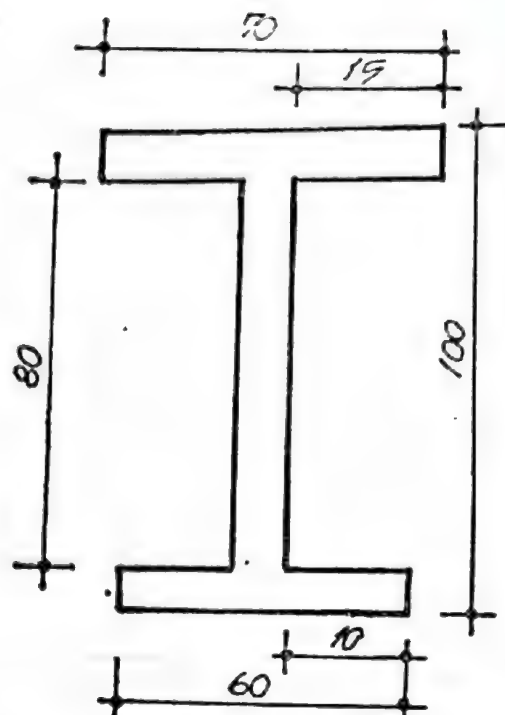


Fig. 11.29

că în desen cotele sînt date în mm ? Dar cantitatea de vopsea dacă stratul de vopsea are o grosime de 0,1 mm.

92. Un rezervor trebuie căptușit cu tablă de plumb. Rezervorul este prevăzut pe o parte cu o gură de evacuare și o conductă de preaplin ca în figura 11.30.

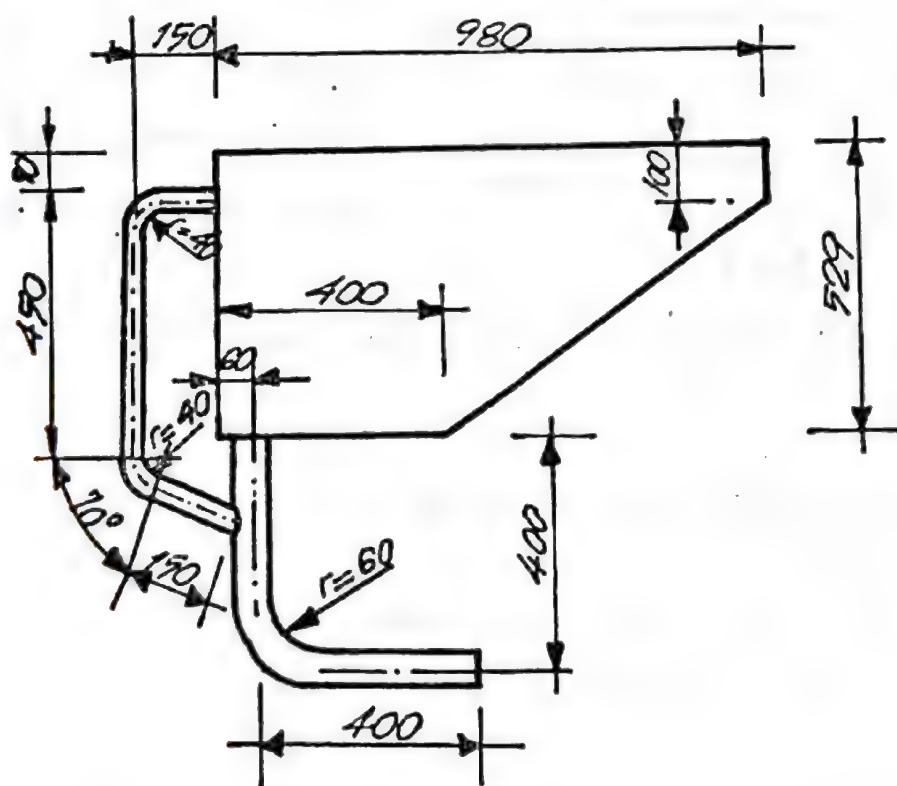


Fig. 11.30

Calculați :

- a) suprafața plăcii de plumb necesară căptușirii ;
- b) lungimea țevii de evacuare (realizată din țeavă de plumb cu dimensiunile $\varnothing 50 \times 4$) ;

c) lungimea conductei de preaplin realizată din plumb de $\varnothing 35 \times 3$.

93. Calculați masa piesei realizată din lemn din figura 11.31 știind că lemnul cântărește 750 kg/m^3 .

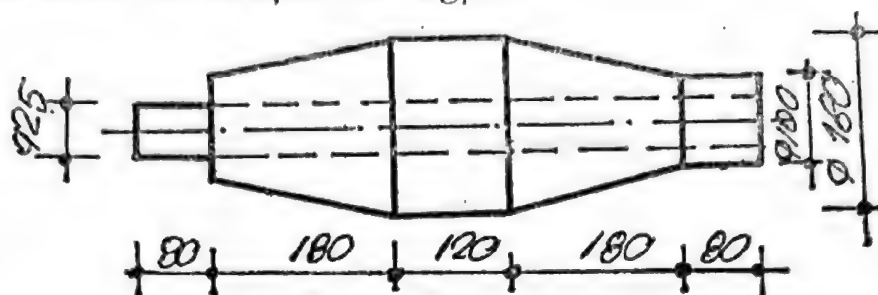


Fig. 11.31

94. Calculați masa jumătății de cuzinet, din bronz reprezentat în figura 11.32 (densitatea bronzului este de $8,9 \text{ kg/dm}^3$).

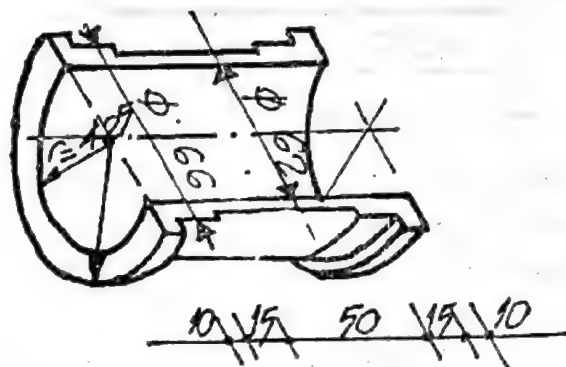


Fig. 11.32

95. Fie piesa reprezentată în figura 11.33.

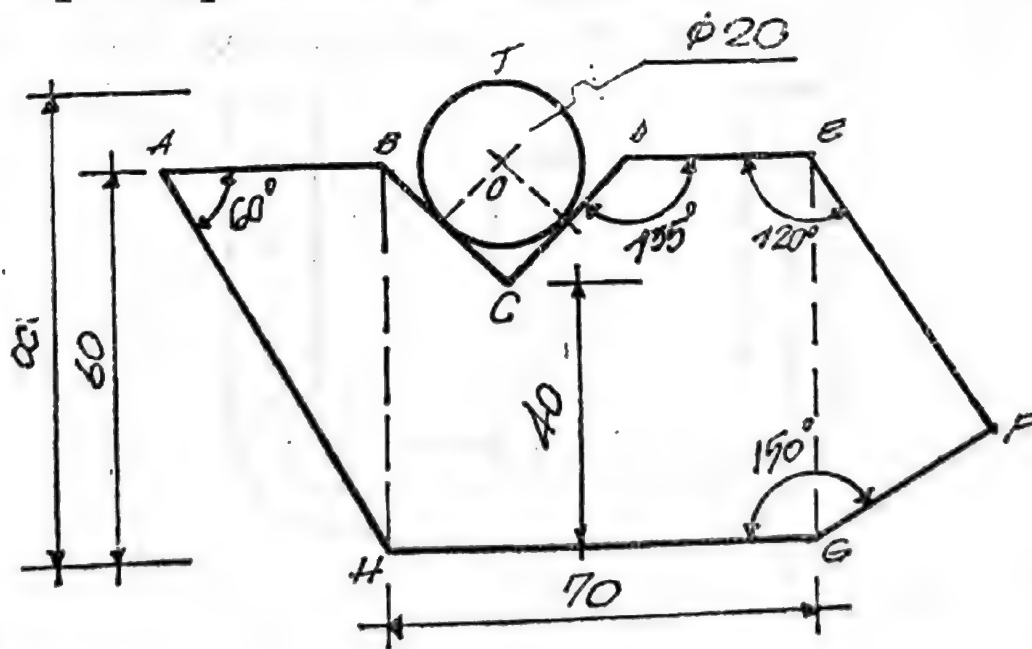


Fig. 11.33

1. Calculați cota x de verificarea tăieturii la 90 grade ;
2. Perimetrul piesei ;
3. Masa piesei știind că ea este din oțel cu densitatea de $7,8 \text{ kg/dm}^3$ și are o grosime de 20 mm.

96. O piesă are forma unui corp născut din mișcarea de rotație a figurii geometrice $ABCDEFGHM$ în jurul axei AD (figura 11.34).

Calculați :

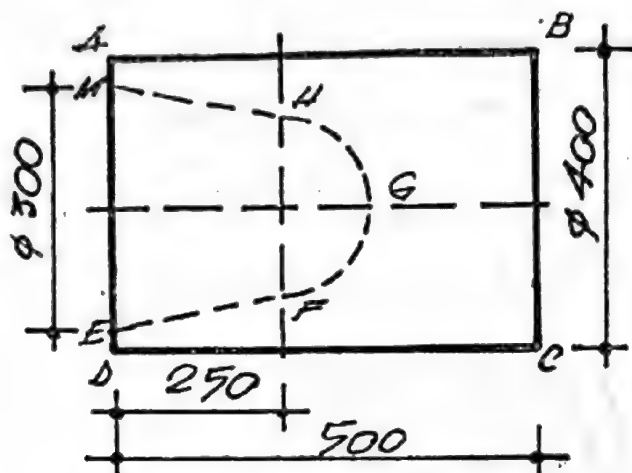


Fig. 11.34

- a) volumul și suprafața laterală a cilindrului ;
- b) volumul și suprafața laterală a trunchiului de con ;
- c) volumul și suprafața semisferei ;
- d) volumul piesei.

97. Determinați pentru sifonul din țevă de plumb, cu diametrul exterior de 34 mm și grosimea peretelui de 4 mm, reprezentat în figura 11.35, lungimea desfășurată și suprafața secțiunii lui.

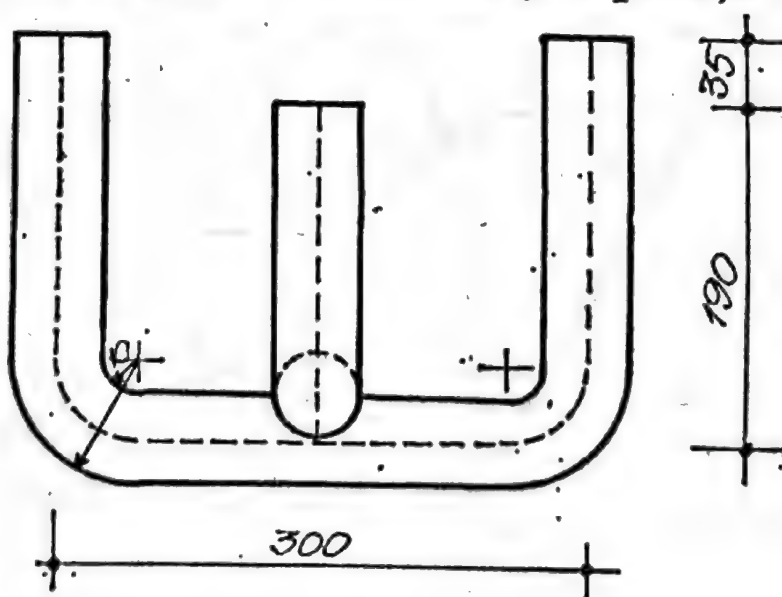


Fig. 11.35

98. Un colector pentru captarea apelor provenite din ploii, ce se montează pe streșina unui acoperiș, este reprezentat în figura 11.36.

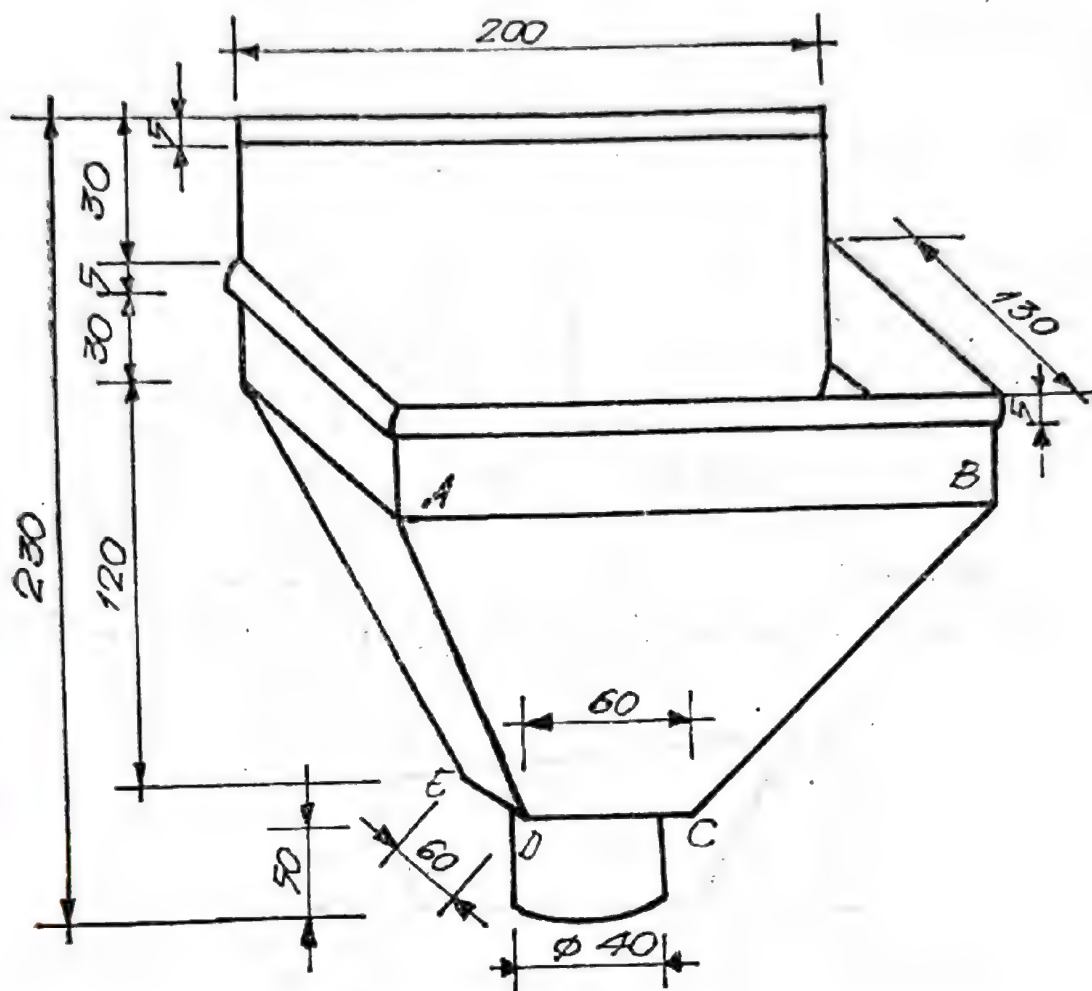


Fig. 11.36

Calculați cantitatea de tablă zincată necesară pentru confecționarea colectorului.

99. Prin ștanțarea suprafețelor AEB , BFC , CLD , DGA , dintr-o tablă $ABCD$ de forma unui pătrat cu latura de 40 cm rezultă o piramidă regulată cu baza $EFGL$. Vîrfurile bazei piramidei sînt mijloacele apotemelor patraturului $EFLG$ (baza piramidei) (fig. 11.37). Calculați :

- perimetrul bazei ;
- apotema CM ;
- muchia laterală CL .

100. Figura 11.38 reprezintă un ancadrament al unei ferestre compus din 3 pietre ABC .

Distanța dintre 2 fețe a fiecărei pietre este de 0,40 m. Determinați dimensiunile de bază ale blocului în formă de paralelipiped din care a fost tăiat ancadramentul.

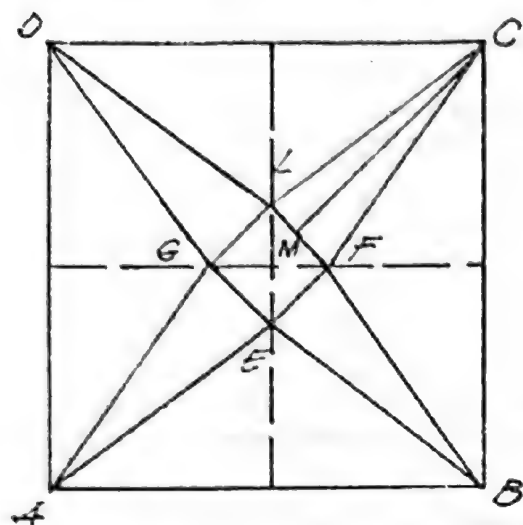


Fig. 11.37

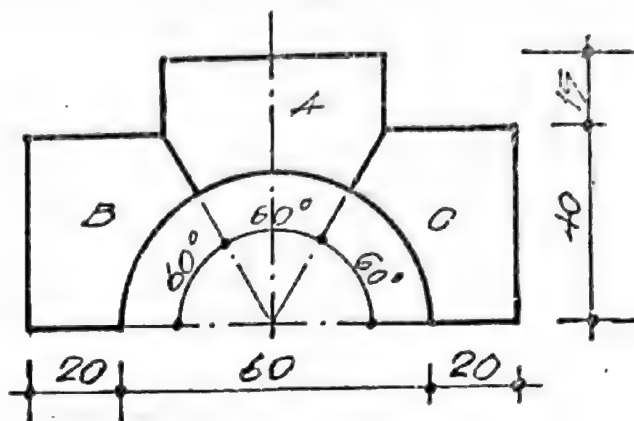


Fig. 11.38

101. Fie dată o roabă metalică reprezentată în figura 11.39.

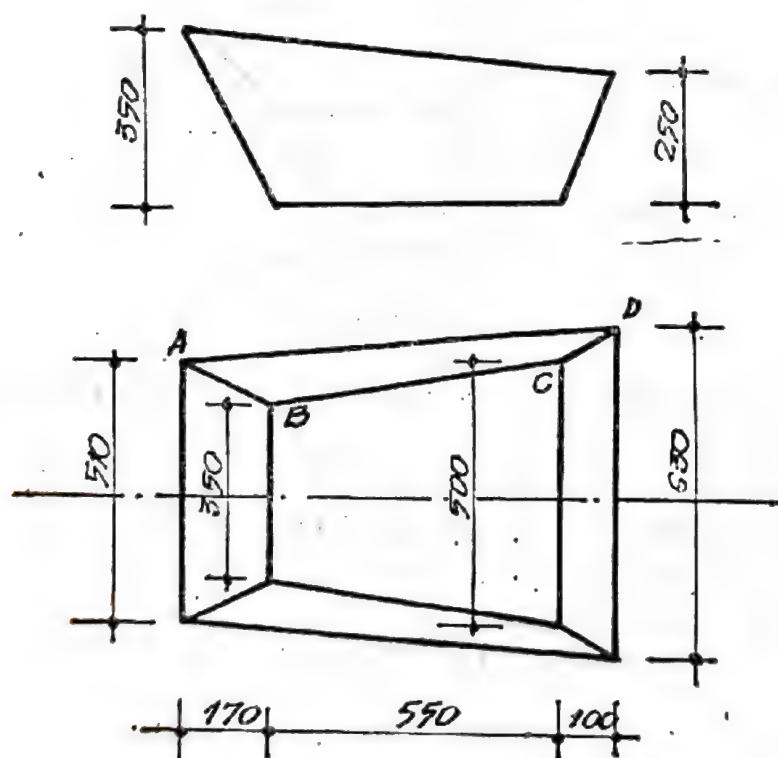


Fig. 11.39

Calculați :

- suprafața fundului roabei;
- panta tăbliilor din față și spate în raport cu planul orizontal;



- c) lungimea muchiilor laterale sudate (AB și CD);
 d) perimetrul roabei măsurat pe marginea superioară a tablei.

102. Pentru verificarea cozii de rîndunică a piesei reprezentată în figura 11.40, se utilizează 2 valțuri cu diametrul de 12 mm.

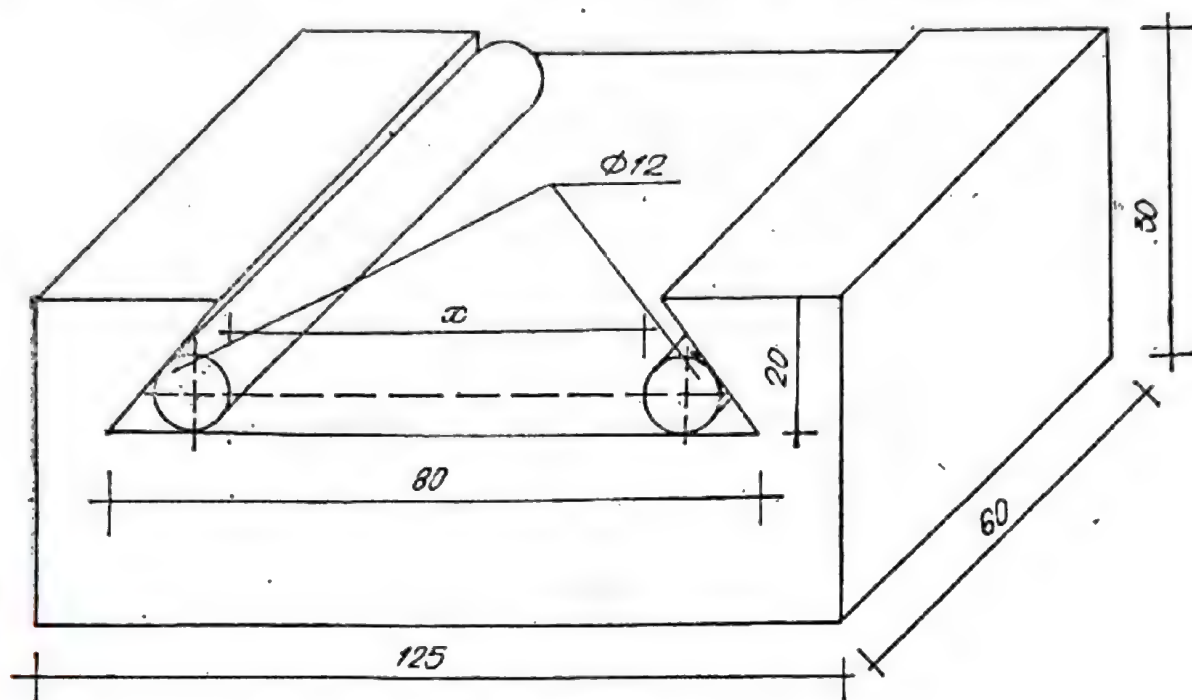


Fig. 11.40

- a) care este la $1/100$ cota lui x ;
 b) greutatea specifică a metalului fiind de $7,9 \text{ gr/cm}^3$, calculați masa piesei.

103. Secțiunea într-un canal are forma unui trapez, ale cărui laturi neparalele sînt egale și baza mică $a = 2 \text{ m}$. Pereții laterali ai canalului au o înclinație $\alpha = 30^\circ$, față de verticală (figura 11.41).

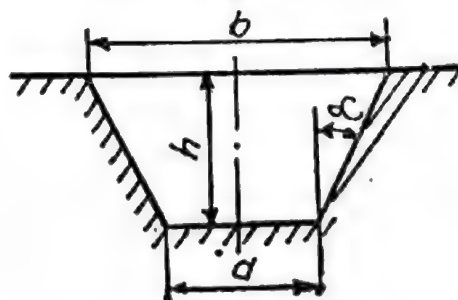


Fig. 11.41

Determinați adîncimea canalului, dacă pentru viteza apei care curge prin canal este necesară o secțiune de $A = 4,5 \text{ m}^2$.

104. Pentru calculul adâncimii fundurilor curbate la cazane cu aburi, cea mai importantă mărime este înălțimea h_1 a fundului cazanului (fig. 11.42). După normele de calcul pentru elementele unui cazan cu aburi de rezistență h_1 , trebuie să verifice relația $h_1 < 0,2 d$, unde d este diametrul fundului cazanului. Să notăm cu r și R razele celor două emisfere din care fac parte cele două porțiuni ale fundului cazanului.

Determinați înălțimea h a cazanului cu cotele date în desen.

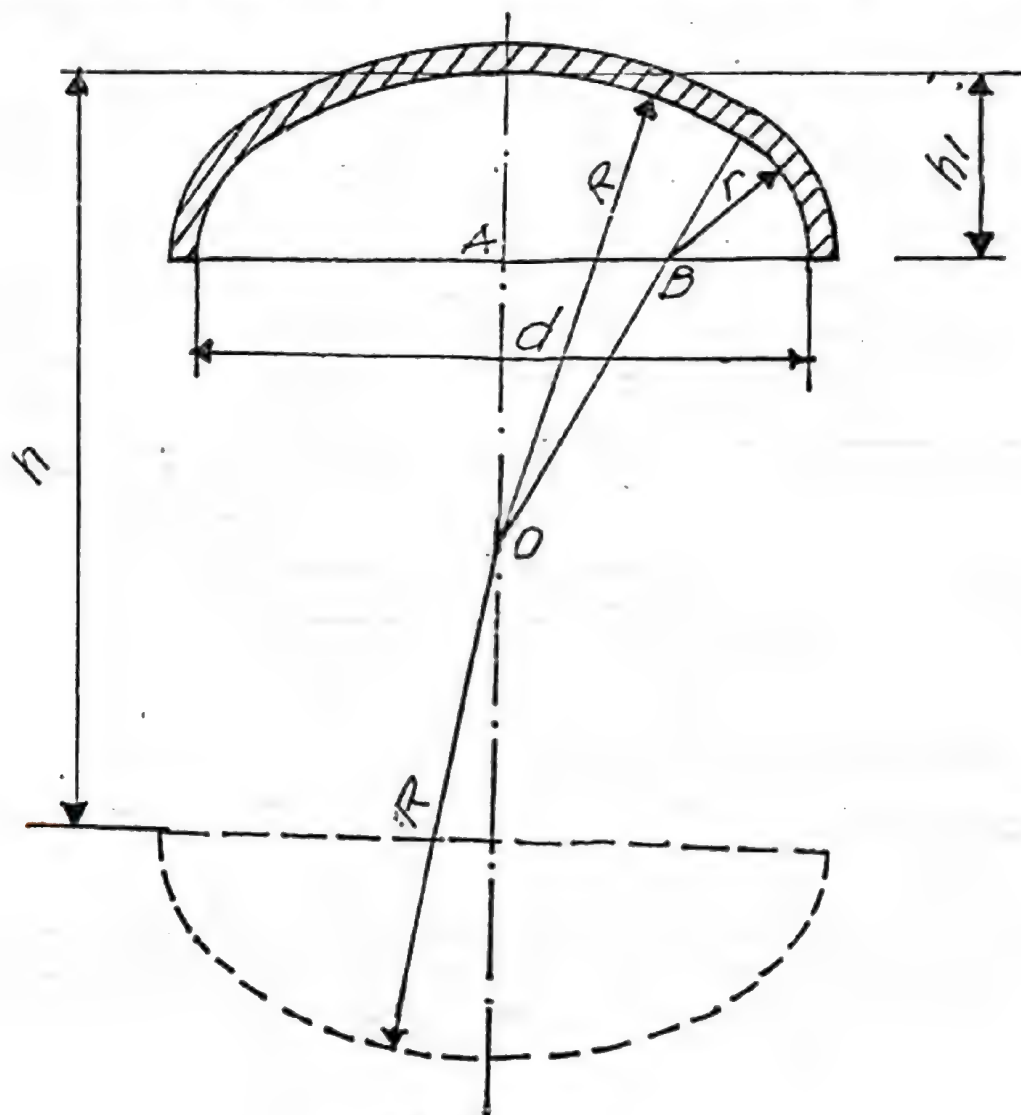


Fig. 11.42

105. Pentru proiectarea unei grinzi în consolă (fig. 11.43), lungimea l a fost împărțită în n părți egale, construind astfel $(n - 1)$ traverse. Pentru a stabili greutatea grinzii proiectantul trebuie să cunoască suma lungimilor tuturor elementelor.

Găsiți o formulă pentru stabilirea lungimii traverselor dacă lungimea BC este egală cu h .

Cu ajutorul formulei stabiliți lungimea totală a traverselor dacă $h = 1$ m și $n = 5$.

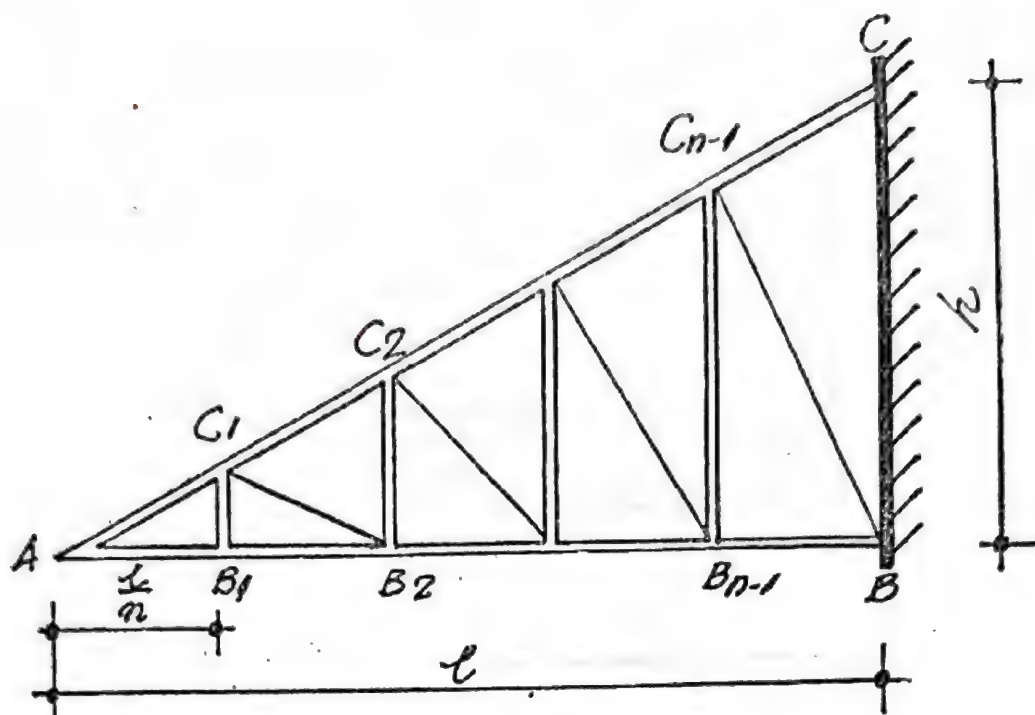


Fig. 11.43

106. O ușă este reprezentată în figura 11.44 și este confecționată din scânduri care au lățimea de 0,15 m și 0,18 m grosime. Scheletul acestei uși este constituit din două scânduri paralele și încă una în diagonală prinsă de ele. Știind că lungimea unei singure scânduri măsoară 2,5 m, calculați :

a) numărul de scânduri folosite;

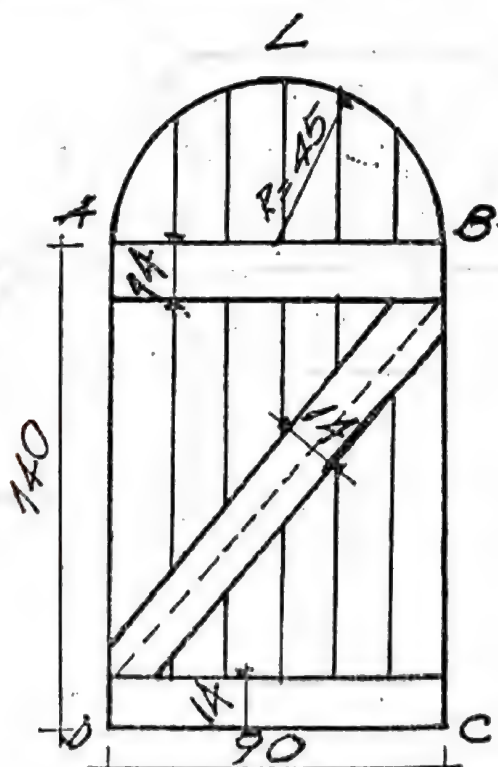


Fig. 11.44

- b) suprafața ușii;
- c) volumul materialului lemnos întrebuințat pentru confecționarea ușii;

107. Măsurarea diametrelor mari se face cu șublerul (fig. 11.45). Dimensiunea h este de obicei cunoscută sau se poate măsura foarte ușor. Dimensiunea l se poate obține prin măsurarea cu ajutorul unui șubler. Determinați diametrul D al unui arbore.

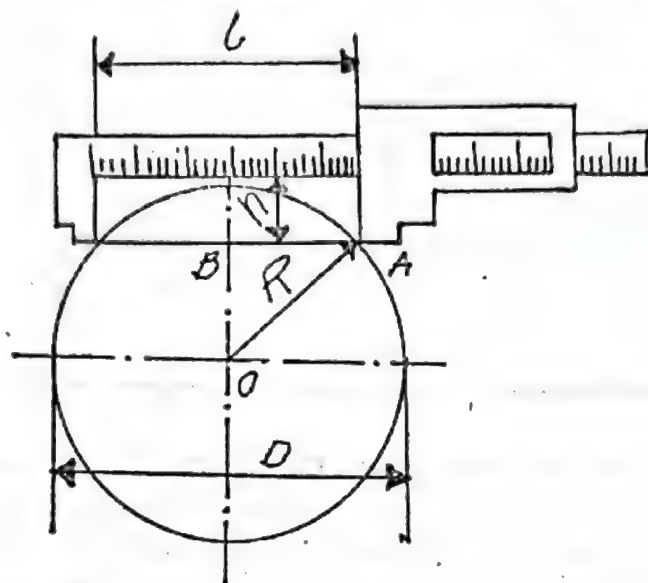


Fig. 11.45

108. Un planșeu are forma indicată în figura 11.46.

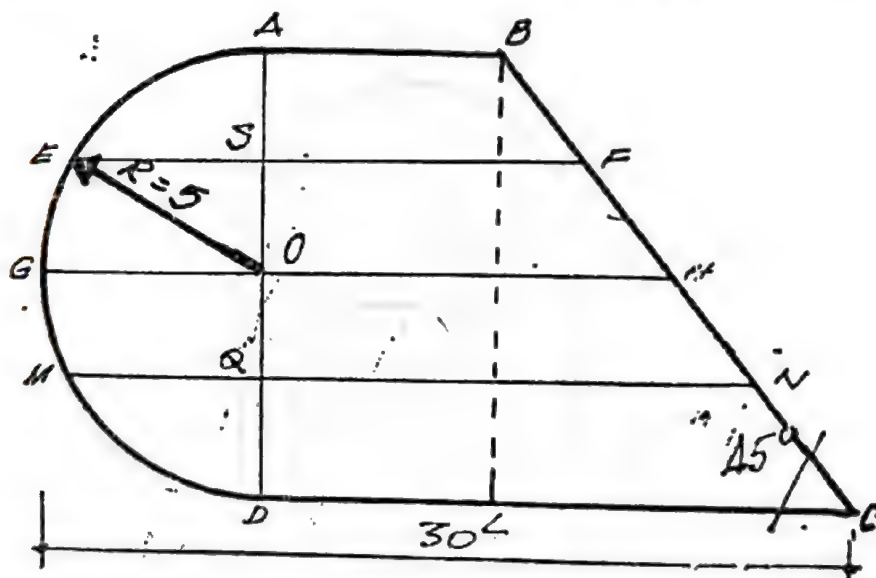
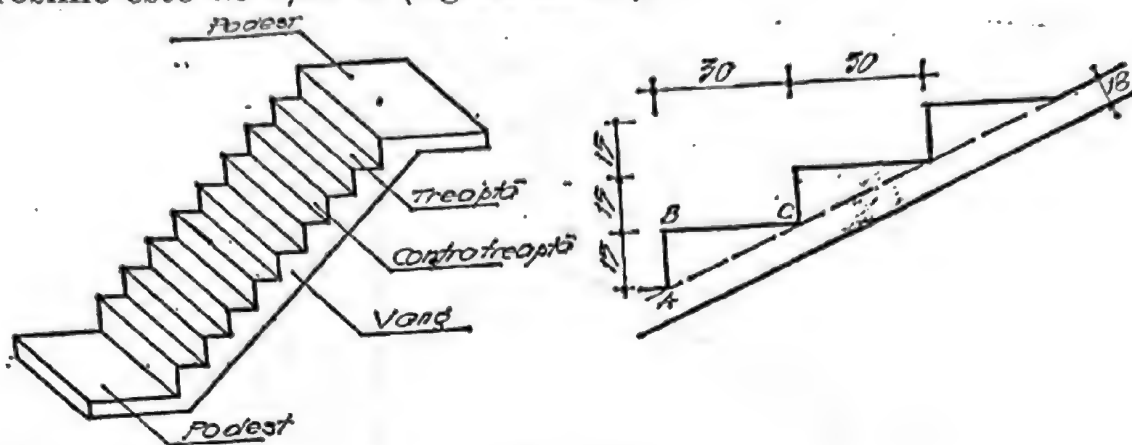


Fig. 11.46

Calculați:

- a) suprafața planșeului;
- b) perimetrul planșeului;
- c) lungimile a trei grinzi longitudinale echidistante duse prin punctele F , H și N care împart segmentul BC în patru părți egale.

109. O rampă de scară din beton armat a cărei lungime este de 1 m, este constituită din nouă trepte, cu dimensiunile treptei și contratreptei de $0,30 \times 0,15$ m așezate pe un vang a cărui grosime este de 0,18 m (figura 11.47).



Calculați:

Fig. 11.47

- volumul scării;
- masa armăturii din oțel știind că vangul este armat în sensul lungimii cu fier beton de 10 mm, așezat la distanța de 10 cm și în sensul lățimii cu fier beton de 6 mm, distanțele de 10 cm, formînd astfel o rețea și că densitatea oțelului este de $7,8 \text{ kg/dm}^3$.

110. Calculați masa unei bucăți dintr-un pilastru, reprezentată în figura 11.48. Densitatea pietrei folosite este de $1,8 \text{ kg/dm}^3$.

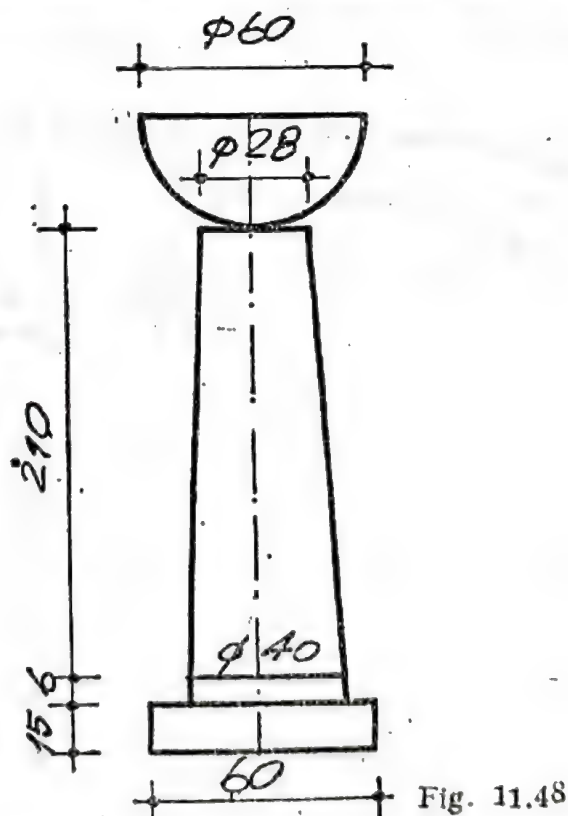


Fig. 11.48

111. Un zid din beton armat are o lungime de 30 m. Secțiunea transversală P prin zid este reprezentată în figura 11.49. Calculați volumul zidului.

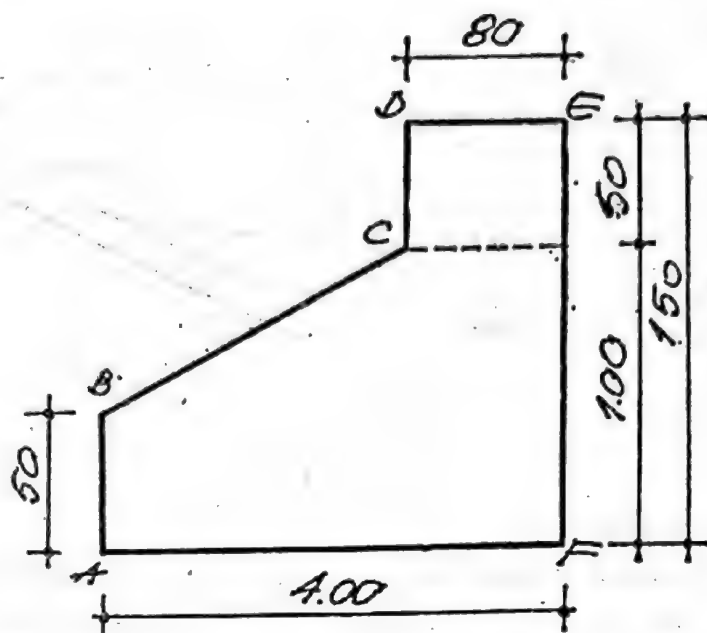


Fig. 11.49

112. Un pedestal din piatră are forma din figura 11.50. Calculați:

- volumul pietrei netăiate;
- volumul pedestalului;
- procentul detașat în raport cu piatra netăiată.

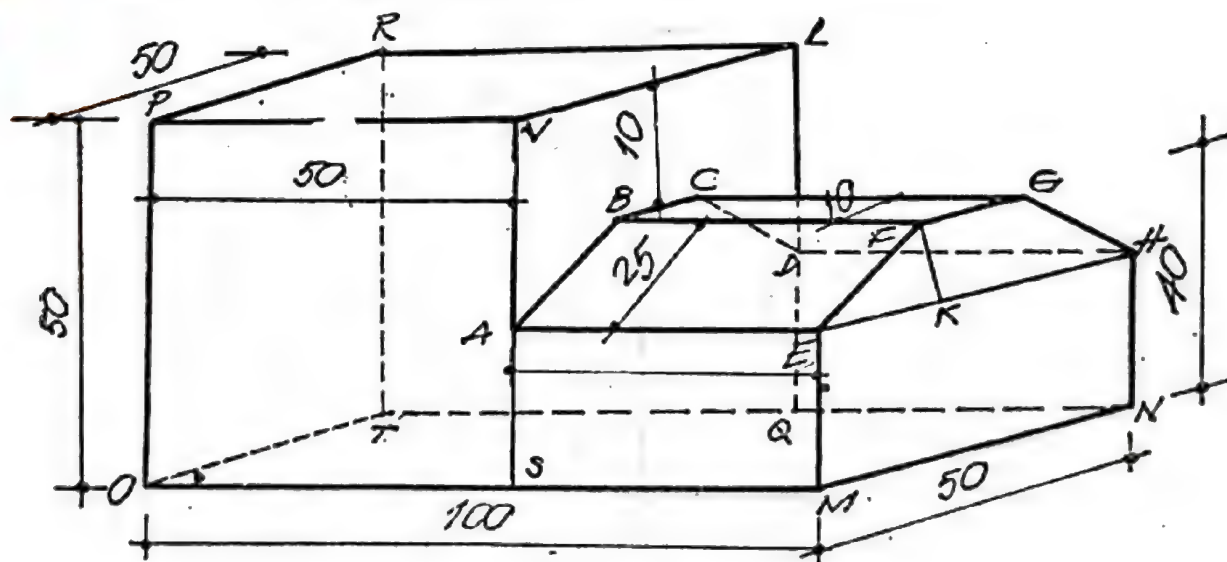


Fig. 11.50

113. Un tinichigiu a confecționat dintr-o foaie de tablă din cupru o placă după următoarele indicații: pe cele două laturi ale unui dreptunghi se descriu două semicercuri ale căror diametre sînt

egale cu lățimea dreptunghiului. Figura astfel obținută are suprafața de 249 cm^2 și depășește cu 132 cm^2 pe cea a dreptunghiului. Determinați pe figura 11.51 :

- lungimea coardei AE ;
- suprafața segmentului circular AFE ;
- lungimea și lățimea dreptunghiului.

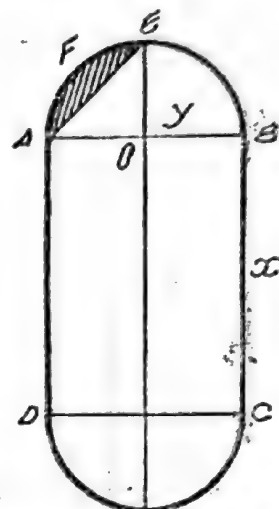


Fig. 11.51

114. Calculați volumul și masa piesei din fontă reprezentată în figura 11.52 știind că densitatea fontei este de $7,4 \text{ kg/dm}^3$.

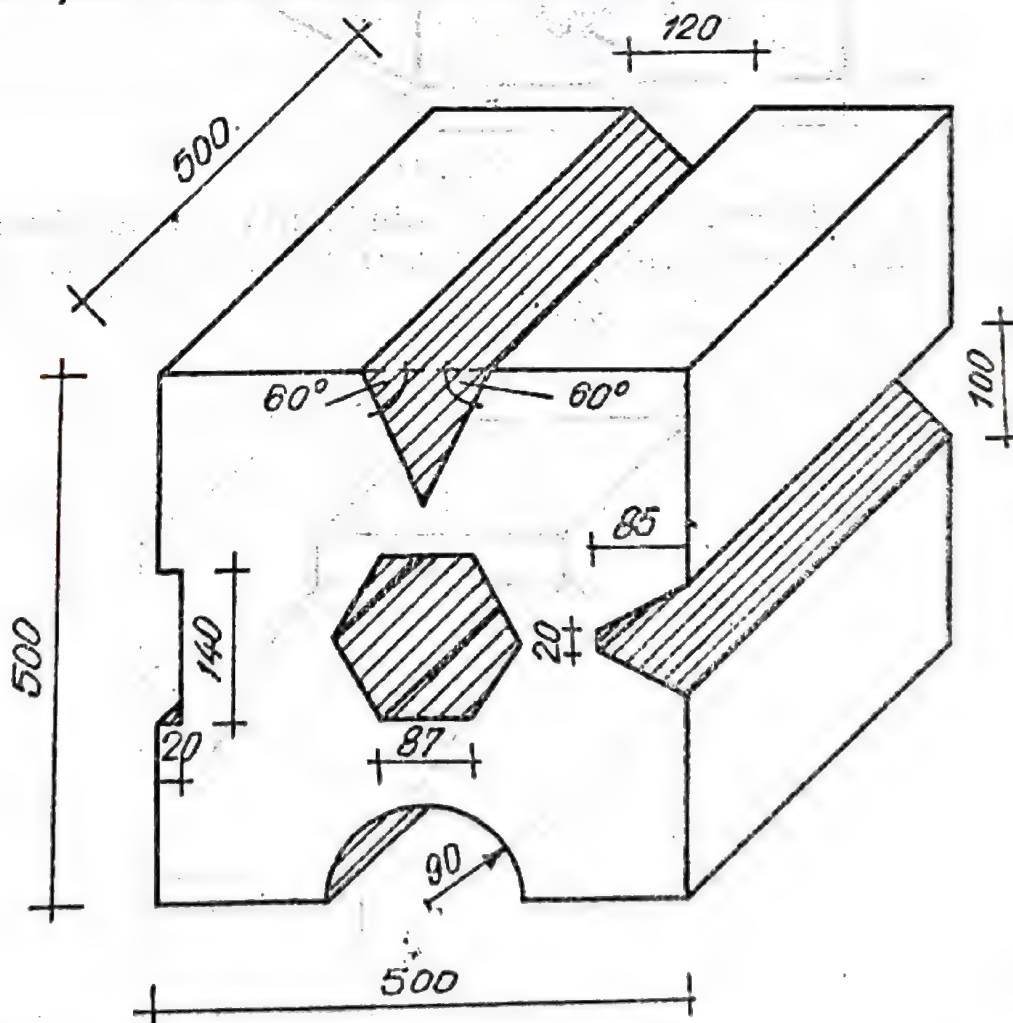


Fig. 11.52

115. Calculați masa piesei din oțel reprezentată în figura 11.53 știind că densitatea oțelului este de $7,8 \text{ kg/dm}^3$.

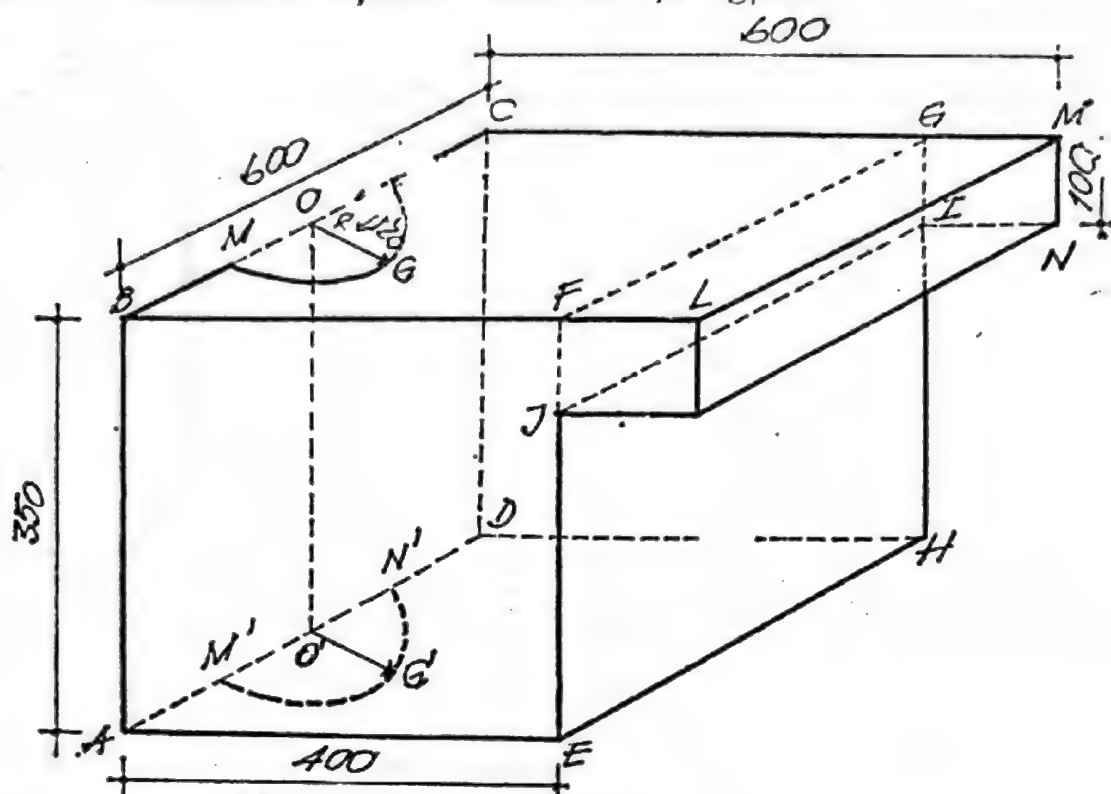


Fig. 11.53

116. Calculați masa piesei din fontă având forma și dimensiunile reprezentate în figura 11.54 știind că densitatea

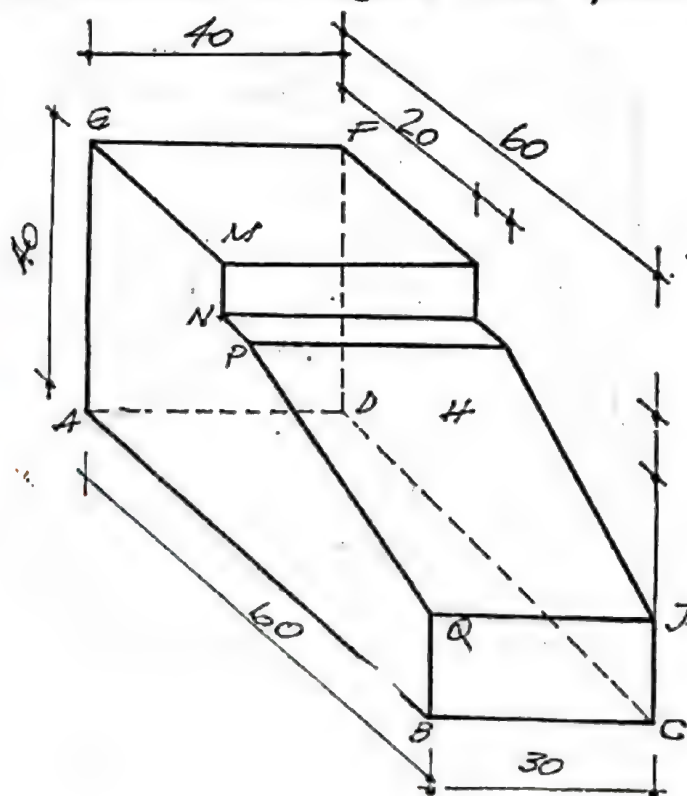


Fig. 11.54

fontei este $7,2 \text{ kg/dm}^3$. Găsiți câte piese din același fel se pot fixa într-un vagon a cărei încărcătură maximă este de $10\,360 \text{ kg}$.

117. Un forjor vrea să amplaseze o tablă la coșul forjei. Diferitele panouri aplicate pe construcție au formele indicate în figura 11.55, avînd în totalitate patru panouri.

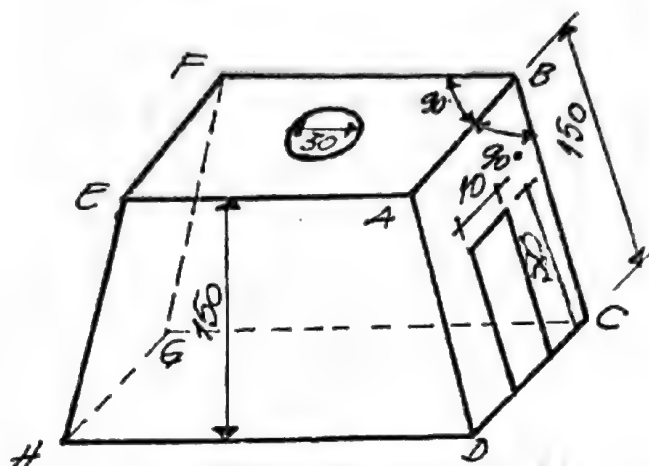


Fig. 11.55

Panoul superior este prevăzut cu o deschizătură de $0,30 \text{ m}$ în diametru. Un alt panou lateral este prevăzut cu o deschizătură dreptunghiulară de $0,10 \times 0,50 \text{ m}$. Figurile $ABFE$ și $CDHG$ sînt dreptunghiuri iar figurile $ABCD$ și $EFGH$ sînt trapeze egale. Se dau cîteva elemente: $AB = 1 \text{ m}$; $CD = 1,5 \text{ m}$; $AE = 2 \text{ m}$; $DH = 3 \text{ m}$; unghiurile ABC și EFG sînt drepte. Panourile trapezoidale au o înălțime de $1,5 \text{ m}$.

Calculați :

- suprafața tablei pe care trebuie să o aibă forjorul;
- densitatea piesei confecțioante știind că tabla cîntărește 24 kg .

118. Un vopsitor are de vopsit fațada unei case, care are forma din figura 11.56.

Calculați cantitatea de vopsea care-i este necesară cunoscînd că pentru un metru pătrat sînt necesare 45 gr de vopsea.

120. Secțiunea transversală a unei piese de locomotivă Diesel hidraulică are forma din figura 11.58.

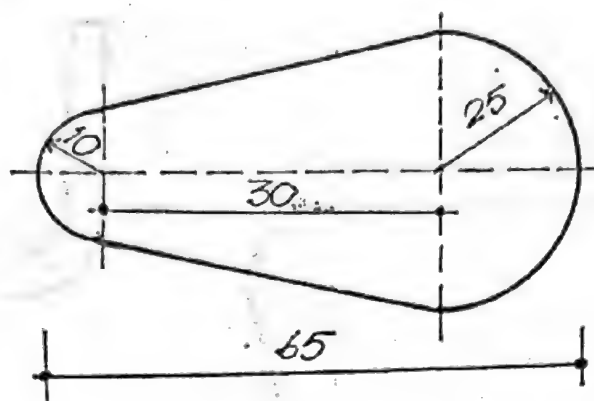


Fig. 11.58

Să se calculeze masa acestei piese din oțel care are grosimea de 20 mm, densitatea oțelului fiind $7,8 \text{ kg/dm}^3$.

121. Calculați masa piesei din fontă reprezentată în figura 11.59 știind că densitatea este de $7,3 \text{ kg/dm}^3$.

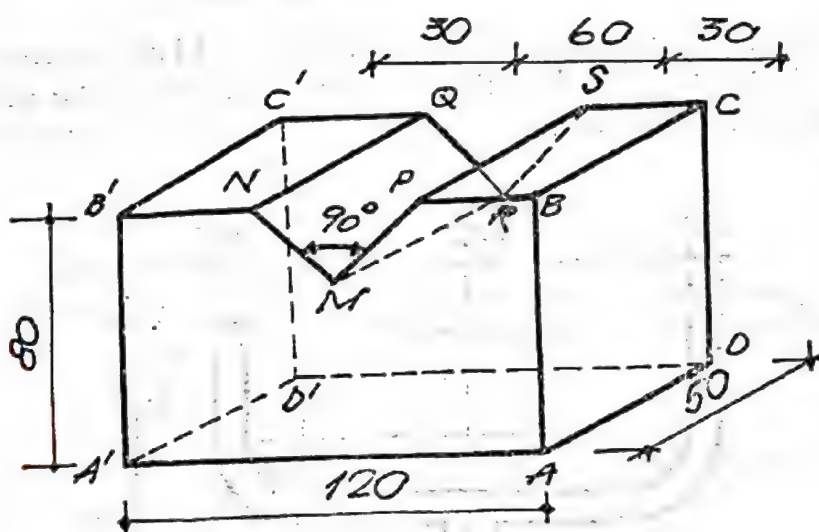


Fig. 11.59

122. O întreprindere de construcții are de executat la o grădiniță de copii montarea parchetului într-o sală de clasă, având forma și dimensiunile indicate în figura 11.60.

Calculați suprafața de parchet necesară și lungimea pervazului, știind că sînt existente două uși de acces în sală, care au lățimea de 90 cm.

Să se calculeze numărul de lamele de dimensiunile 300/40 mm pentru parchetarea sălii.

123. Calculați lungimea desfășurată și masa piesei din plumb reprezentată în figura 11.61, știind că densitatea plumbului este, de $11,3 \text{ kg/dm}^3$.

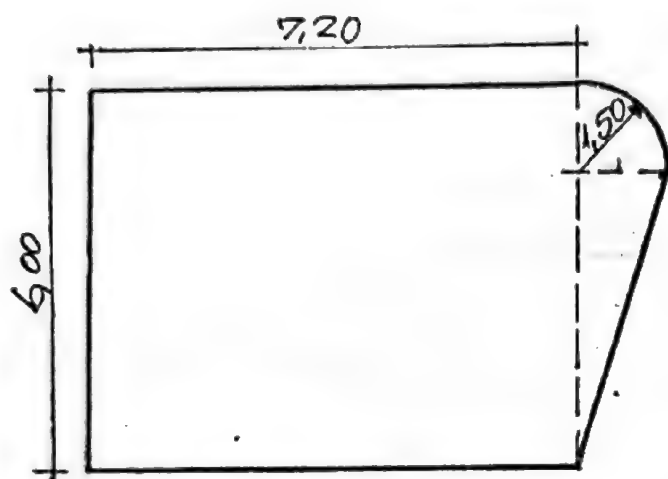


Fig. 11.60

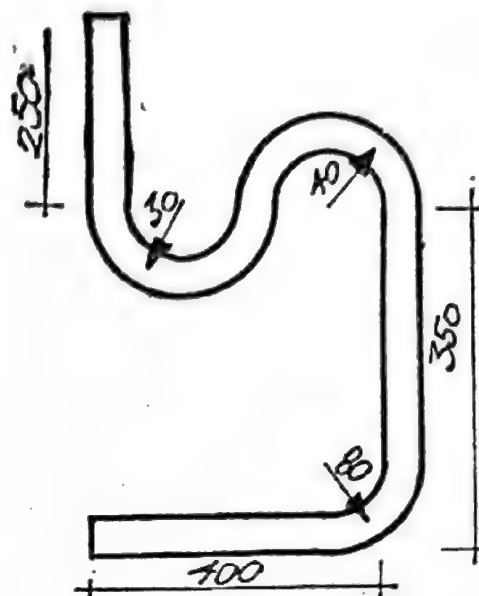


Fig. 11.61

124. Calculați masa furculiței din figura 11.62, știind că grosimea ei este de 20 mm și densitatea metalului din care este confecționată este de $7,8 \text{ kg/dm}^3$.

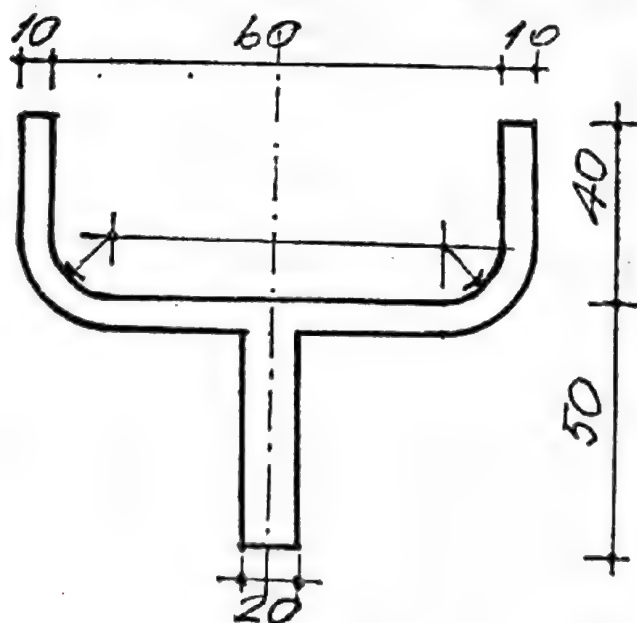


Fig. 11.62

125. Calculați lungimea desfășurată și volumul interior al țevii din oțel reprezentate în figura 11.63, știind că diametrul

exterior este de 35 mm și cel interior de 30 mm iar densitatea oțelului este de $7,8 \text{ kg/dm}^3$.

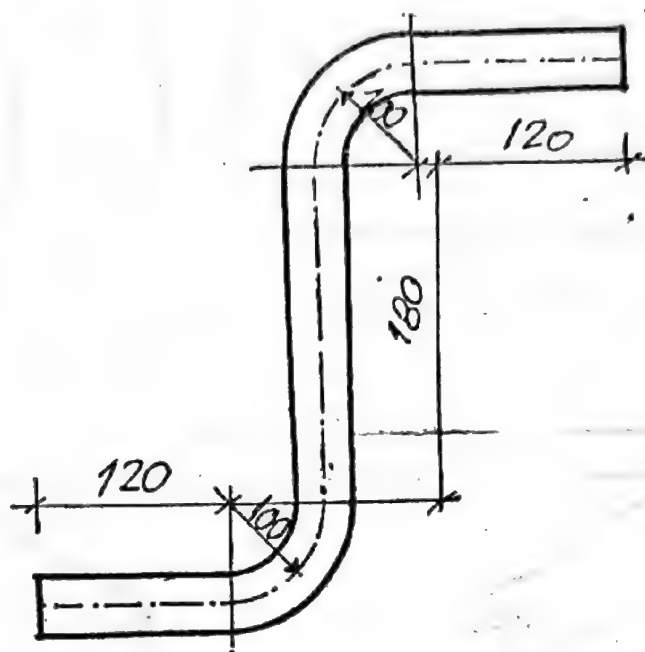


Fig. 11.63

126. Piesa din figura 11.64 este realizată prin forjare. Calculați volumul ei.

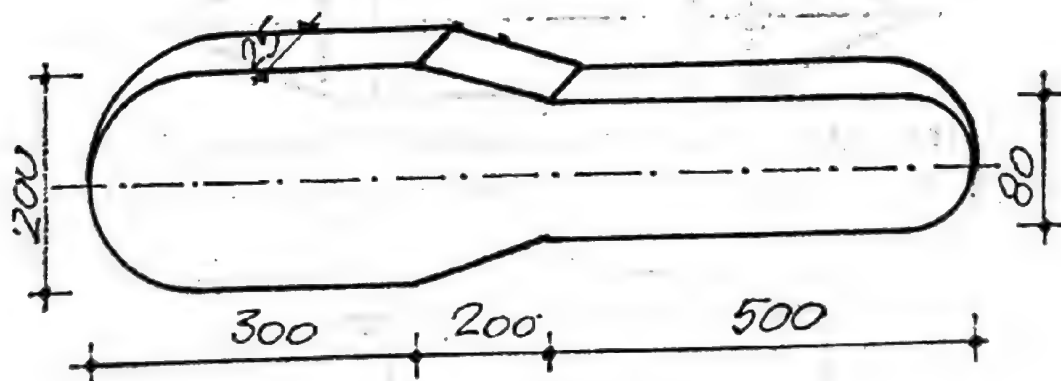


Fig. 11.64

127. Dintr-un bloc de piatră ale cărui dimensiuni sînt de $450 \times 220 \times 530$ se realizează un alt bloc finisat cu dimensiunile din figura 11.65. Calculați volumul și masa acestui bloc, știind că densitatea pietrei este de $2,5 \text{ kg/dm}^3$.

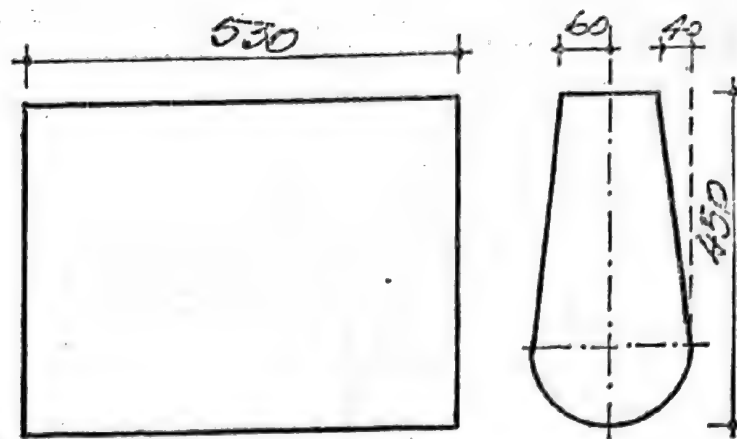


Fig. 11.65

128. Calculați volumul și masa nicovalei din figura 11.66, știind că extremitățile ei au forma de piramidă și că densitatea metalului din care este construită este de $7,8 \text{ kg/dm}^3$.

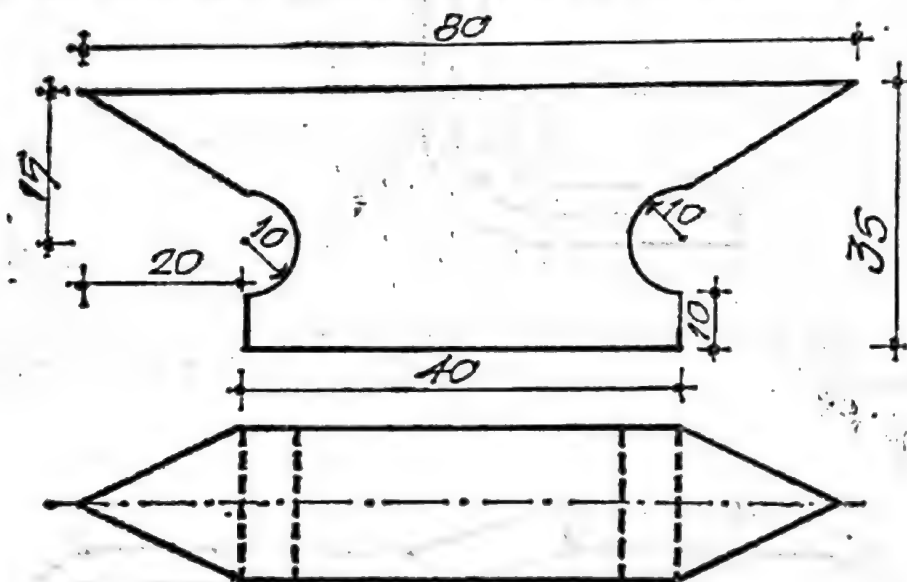


Fig. 1.66

129. Într-un parc se găsește o coloană ornamentală confecționată din marmură, care are dimensiunile indicate în figura 11.67.

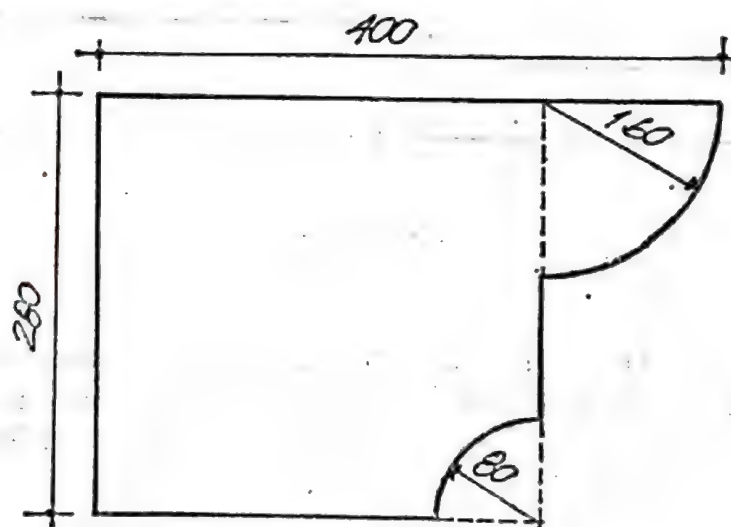


Fig. 11.67

Calculați volumul coloanei, știind că înălțimea ei este de 2,5m.

130. Calculați masa piesei din figura 11.68, știind că densitatea metalului este de $7,8 \text{ kg/dm}^3$, grosimea piesei este de 4,5 mm.

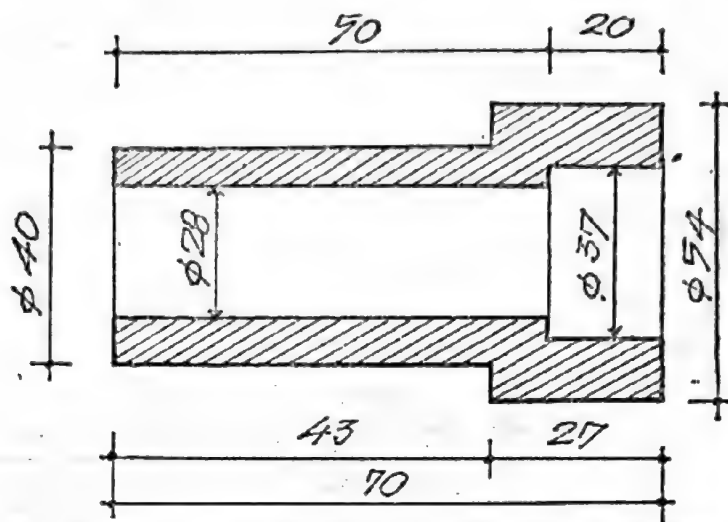


Fig. 11.68

131. Figura 11.69 reprezintă secțiunea dintr-un rezervor de forma unei piramide exagonale drepte, a cărei înălțime este de 6 m și grosimea fundului rezervorului este de 60 mm.

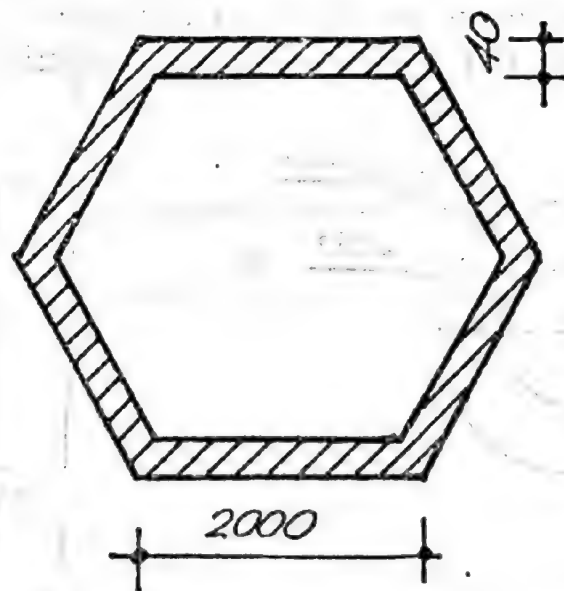


Fig. 11.69

a) Calculați dimensiunile interioare ale rezervorului și capacitatea maximă a sa, exprimată în hl;

b) calculați cantitatea de material din care se confecționează rezervorul.

132. Calculați masa porțiunii dintr-o grilă reprezentată în figura 11.70, avînd, cotele date în mm iar densitatea metalului din care este confecționată este de $7,8 \text{ kg/dm}^3$. Pierderile tehnologice ce se obțin la forjare reprezintă 17% din greutatea piesei finite. (grosimea și lățimea grilei sînt indicate în secțiune).

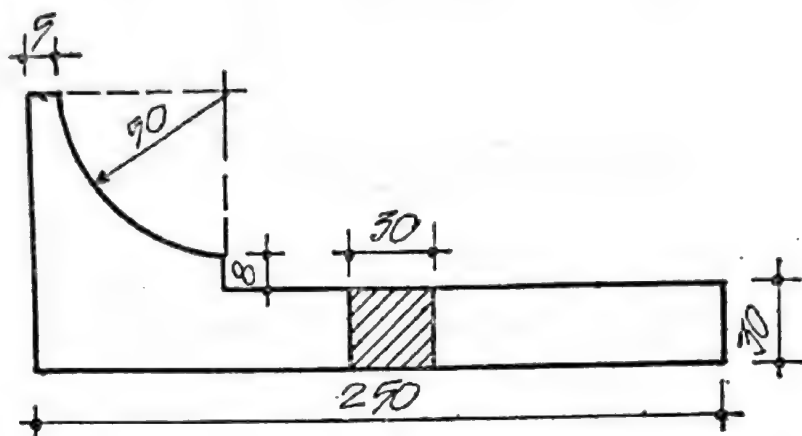


Fig. 11.70

133. Calculați masa piesei din fontă, reprezentată în figura 11.71, știind că densitatea fontei este $7,3 \text{ kg/dm}^3$. Se acoperă piesa pe toate fețele cu un strat de cupru de 0,02 mm. Să se afle cantitatea de cupru depusă (densitatea cuprului este de $8,9 \text{ kg/dm}^3$).

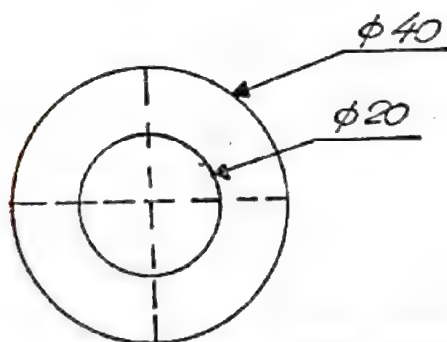


Fig. 11.71 a

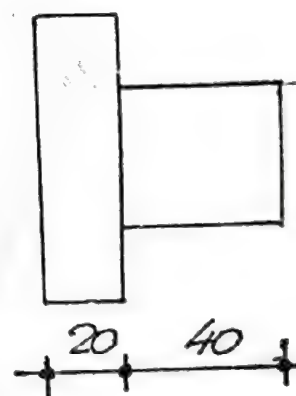


Fig. 11.71 b

134. Pe un ax de 400 mm diametru, se execută cu freza un plan de diferență de cota $a = 300 \text{ cm}$. Calculați masa materialului

transformat în așchii. Materialul poate fi din :

- Fe (fontă cenușie) densitatea $7,3 \text{ kg/dm}^3$;
- OT (oțel turnat) „ $7,8$ „ ;
- Cu (cupru) „ $8,9$ „ ;

Dacă materialul este transformat în așchii topite într-un cuptor, câte piese de $0,05 \text{ kg}$ am putea obține prin turnare, știind că la topire 10% din material se consumă prin ardere.

135. Dintr-un bloc de piatră, avînd forma unui paralelipiped drept, cu baza un pătrat și înălțimea de $0,60 \text{ m}$, se taie o piesă a cărei secțiune se compune dintr-un pătrat și patru semicercuri avînd ca diametru laturile pătratului (fig. 11.72).

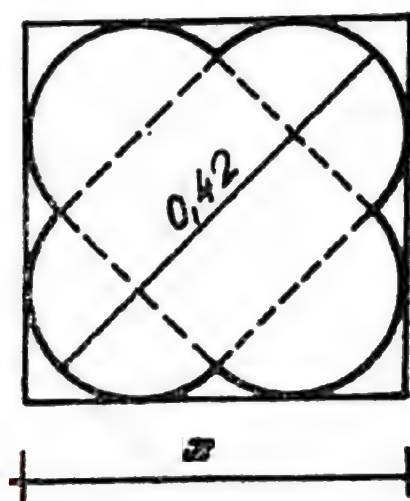


Fig. 11.72

Calculați:

- a) suprafața laterală a piesei tăiate ;
- b) masa piesei, știind că densitatea ei este de $2,1 \text{ t/m}^3$;
- c) latura x , reprezentînd baza blocului de piatră.

136. Aleile unui parc — reprezentate în figura 11.73, trebuie acoperite cu beton. Calculați cantitatea de beton necesară acoperirii, știind că grosimea stratului este de 2 cm.

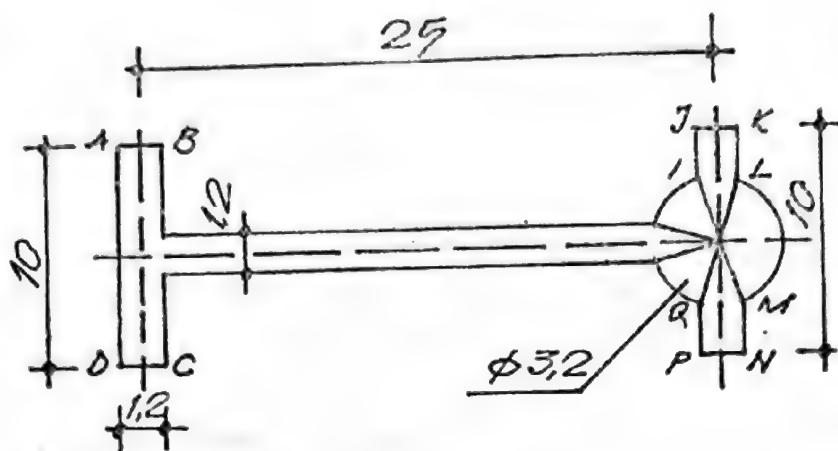


Fig. 11.73

137. Se cere controlarea unei cozi de rîndunică după metoda valțurilor, utilizînd valțuri de $\varnothing 16$ (figura 11.74). Calculați cota x în două cazuri :

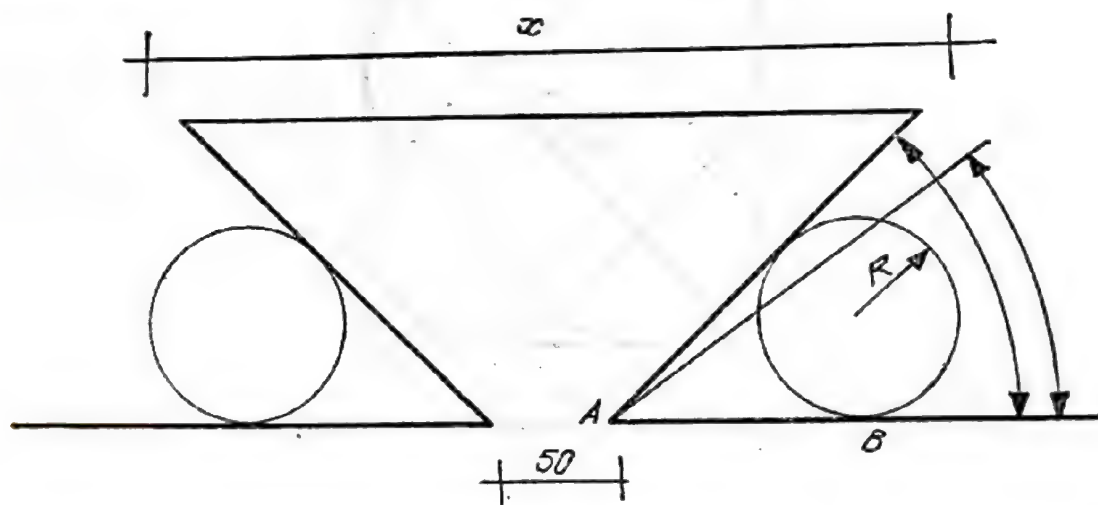


Fig. 11.74

— unghiul $A = 60^\circ$;

— unghiul $A = 50^\circ$;

138. Coșul unei locomotive cu aburi este constituit din trei părți sudate între ele (fig. 11.75). Calculați suprafața tablei necesară pentru confecționarea acestui coș.

Calculați greutatea metalului de la sudură știind că la un metru de sudură se utilizează 200 grame de metal.

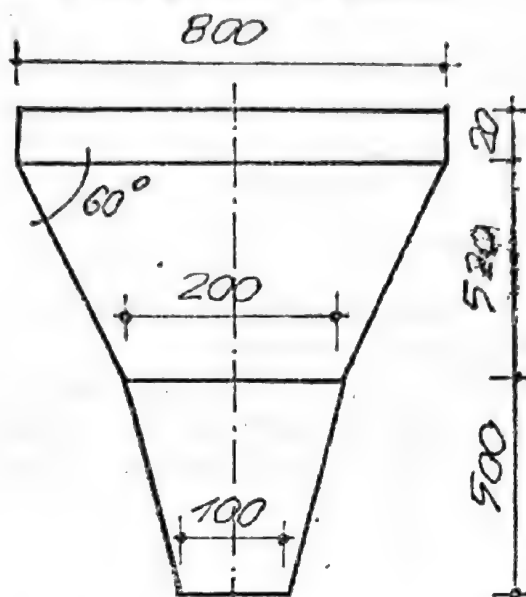


Fig. 11.75

139. Figura 11.76 reprezintă secțiunea într-un gard metalic ce se compune din 22 de elemente. Calculați :

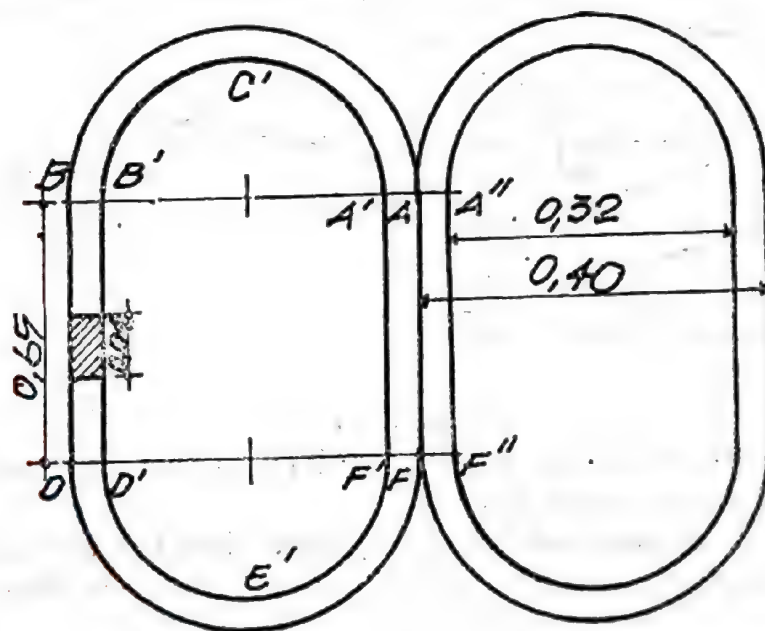


Fig. 11.76

a) suprafața cilindrică avînd ca baze două semicercuri interioare $A'O'B'$ și $D'E'F'$;

b) suprafața cilindrului avînd ca bază două semicercuri exterioare ABC și DEF ;

c) suprafața unei carcase circulare formată din reuniunea celor două semicercuri ACB , $A'O'B'$ și DEF , $D'E'F'$;

d) suprafața totală a părții curbe a unui element și deduceți suprafața corespunzătoare pentru 22 elemente;

e) secțiunea dreaptă într-un element constituie un patrat de 4 cm latură. Calculați suprafața dreptunghiului $BDD'B$;

f) suprafețele vopsite, egale cu cele ale lui $BDD'B$ (o față comună, știind că AF' nu este vopsit).

g) suprafața totală vopsită;

d) cantitatea de vopsea necesară, știind că un kg de vopsea acoperă 7 m^2 pentru un singur strat.

140. Calculați distanța x , care reprezintă dezaxarea contrapunctului unui strung pentru obținerea unui trunchi de con reprezentat în figura 11.77, presupunând că punctele axelor nu se întretaie.

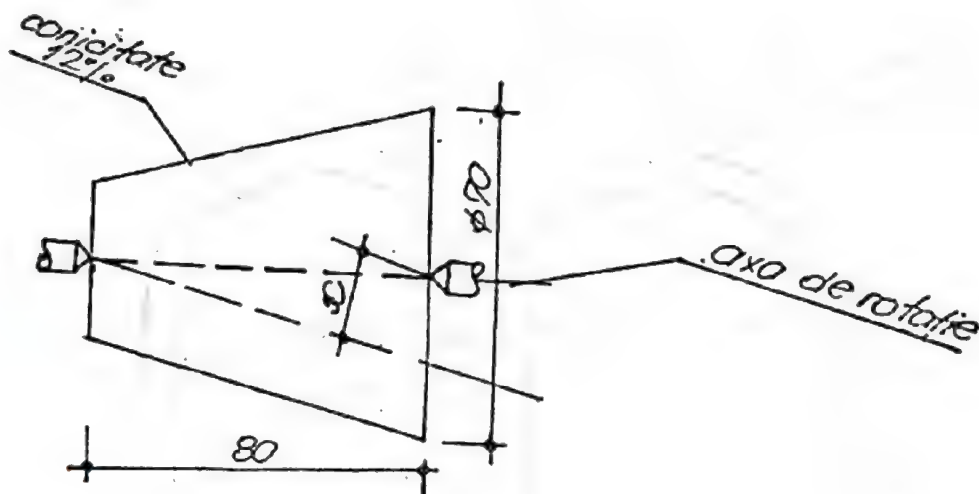


Fig. 11.77

Aceeași problemă dacă punctele pătrund fiecare 5 mm (calculați apoi distanța dintre puncte).

141. Calculați perimetrul, înălțimea fiecărui montant și lungimea diagonalelor din figura 11.78, ce reprezintă o formă metalică,

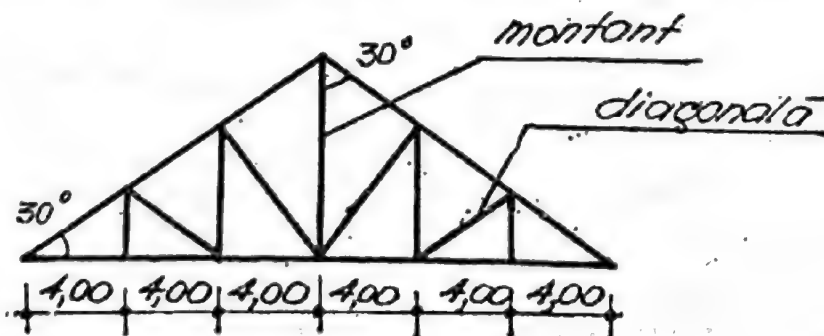


Fig. 11.78

calculind și cantitatea de profil laminat necesar realizării acestei grinzi.

142. Determinați lungimea totală de profile laminate ce se folosesc în construcția fermelor metalice, reprezentate în figura 11.79, cotele fiind date în metri.

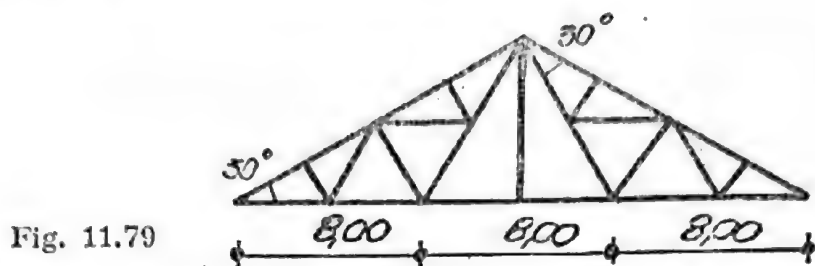


Fig. 11.79

143. Fundul unei cutii este reprezentat în figura 11.80.

a) Care este înălțimea cutiei, știind că ea are o capacitate de 100 litri;

b) Care este lungimea foi din tablă din care s-a decupat peretele său.

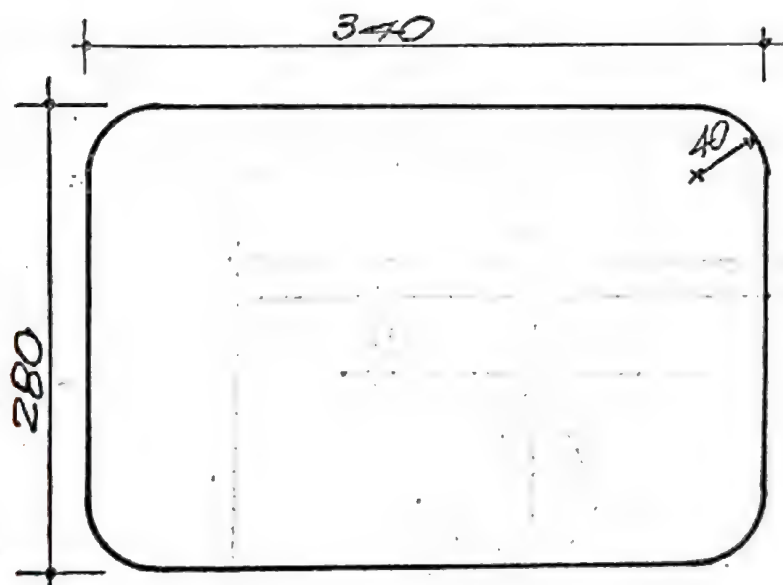


Fig. 11.80

144. Cotele consolei reprezentată în figura 11.81 sînt exprimate în mm. Calculați lungimea desfășurată:

a) a sfertului de cerc cu centrul în O ;

b) a cercului cu centrul în O' .

145. Calculați lungimea și lățimea piesei din lemn $ABCD$, obținută dintr-un sfert de inel circular, așa cum este indicat în figura 11.82.

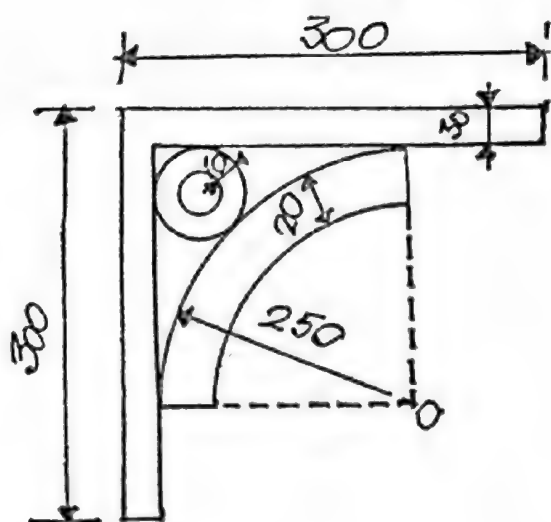


Fig. 11.81

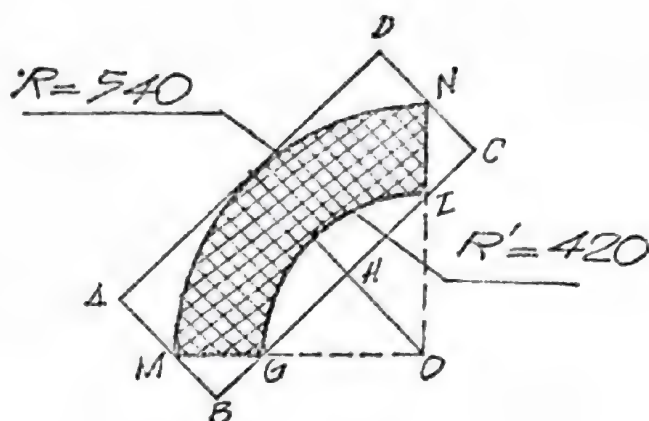


Fig. 11.82

146. Pe un bloc paralelipipedic din oțel aliat de grosime de 20 mm aveți de efectuat străpungerea acestuia cu 6 găuri echidistante de 8 mm în diametru (fig. 11.83).

a) Pentru efectuarea găurii, se utilizează un burghiu din plăcuțe dure cu diametrul de 8 mm, avînd turația de 850 ture/minut.

b) Care este viteza de tăiere a burghiului exprimată în mm/minut (avansul pe gaură este 10/100 pe minut).

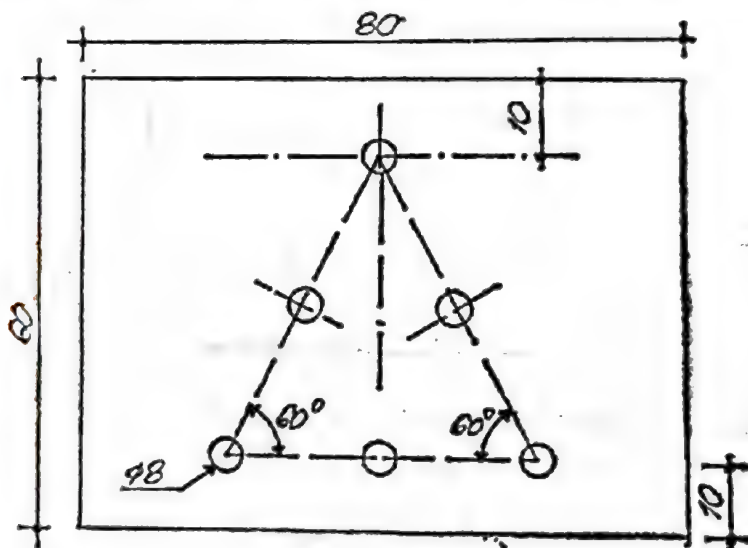


Fig. 11.83 a

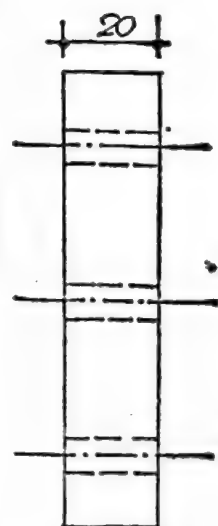


Fig. 11.83 b

147. Un panou dreptunghiular cu o lungime de 650 mm, este împărțit în 10 benzi de lățimi egale, așa cum este indicat în figura 11.84. Calculați;

- a) lungimea unei diagonale a panoului;
- b) lăţimea unei benzi;
- c) lungimea totală a benzilor utilizate, ştiind că fiecare bandă este conţinută în panou;
- d) procentajul pierderii de lemn rezultat prin tăiere, dacă pînza de fierăstrău are grosimea de 1 mm.

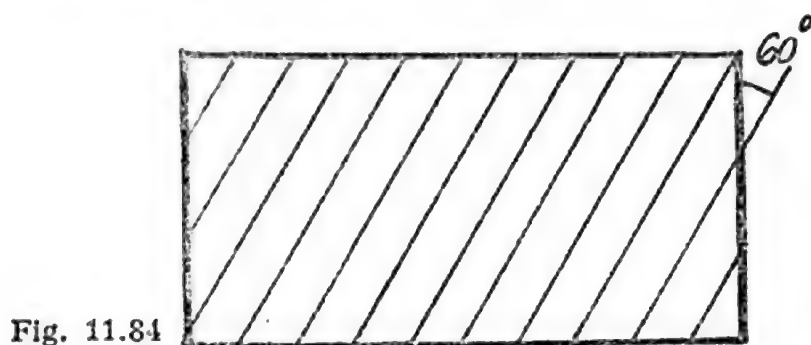


Fig. 11.84

148. O boltă în formă de semicerc este susţinută de doi stâlpi CE şi DF , aşa cum este arătat în figura 11.85. Ştiind că $AC = CD = DB$ şi că $AB = 6$ m, calculaţi lungimile CE şi DF .

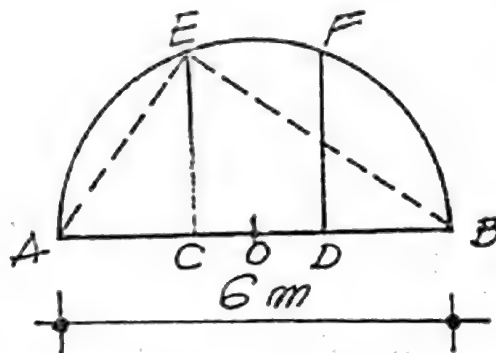


Fig. 11.85

149. Pe un panou ale cărui dimensiuni sînt de $4,2 \times 0,70$ m, un pictor are scris cuvîntul *cofetărie*. Ştiind că literele ce urmează a fi pictate au înălţimea de 50 cm, lăţimea de 25 cm şi că între două litere consecutive se lasă o distanţă de 10 cm, să se găsească la ce distanţă faţă de margini, pictorul stabileşte limitele înălţimii şi bazei literelor de la marginea exterioară a literei C .

150. Un muncitor trasează o linie care este perpendiculară pe bordurile unei şosele a cărei lăţime este de 10 m, urmînd să planteze semnalizatoare albe pentru marcarea trecerii pietonilor.

Ştiind că ele sînt egal depărtate, că au un diametru de 70 mm şi că axele consecutive sînt la 240 mm, să se afle ce lungime este între două axe consecutive şi cîte semnalizatoare plantează muncitorul.

151. Un acoperiș avînd două pante formează cu planul orizontal unghiurile de 45° și 30° ; știind că înălțimea clădirii este de 4 m și coama acoperișului de 8 m de la sol, să se calculeze toate laturile clădirii (CD) (fig. 11.86).

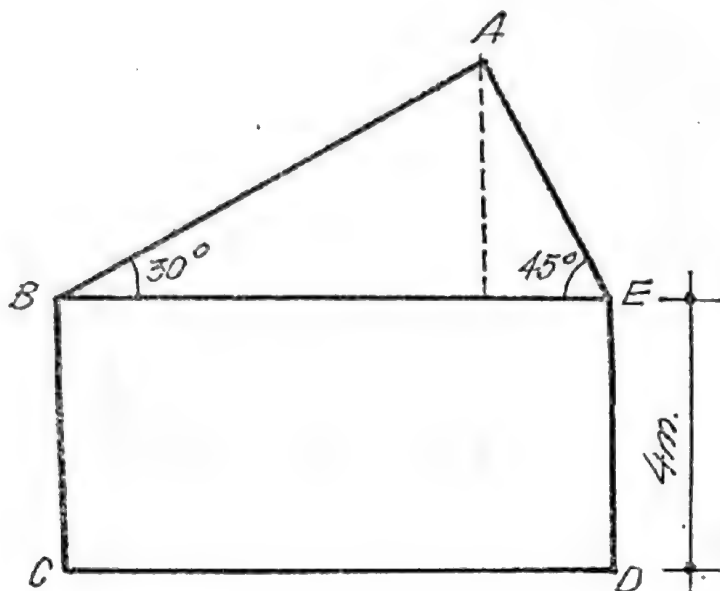


Fig. 11.86

152. O profesoară maistră dă elevelor sale, ca probă de lucru la sfîrșit de trimestru, ornarea unei fețe de masă (ale cărei dimensiuni sînt de $0,56 \times 0,80$ m) cu puncte roșii și albastre. Știind că primul rînd de puncte se va fixa la 8 cm de marginea feței de masă, celelalte se vor fixa la 4 cm față de primul rînd, la colțuri vor fi numai puncte albastre, să se calculeze cîte puncte roșii și albastre sînt pe fața de masă, punctele alternînd.

153. Un tapițer a cumpărat o bucată de rips de 25 m pentru acoperirea a trei fotolii (necesitînd pentru fiecare în parte 3,5 m de rips). Prețul pe care-l cere pentru aceste huse este constituit din costul ripsului pe cantitatea utilizată, majorată cu 30%, procent pentru confecționarea și beneficiul său.

Restul materialului îl folosește pentru acoperirea unor scaune, pentru fiecare fiind necesari 2,2 m. Prețul cerut pentru husele de scaune este cel utilizat de la husele fotolii.

Calculați numărul de fotolii care se pot acoperi.

Determinați dacă prin vinderea celor două feluri de huse, tapițerul este în cîștig sau pierdere, dacă pentru tot ripsul a plătit 1600 lei.

154. La sfârșitul anului școlar un profesor maestru fixează elevilor săi ca probă de lucru decuparea din tablă a unor piese necesare înzestrării laboratorului de matematică al școlii.

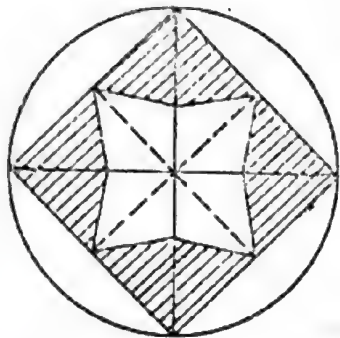


Fig. 11.87 a

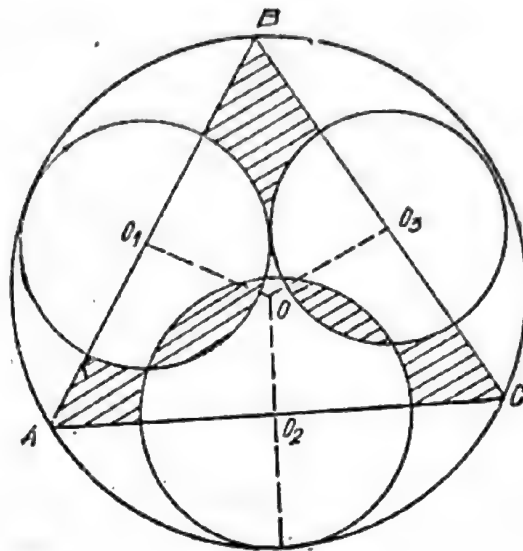


Fig. 11.87 b

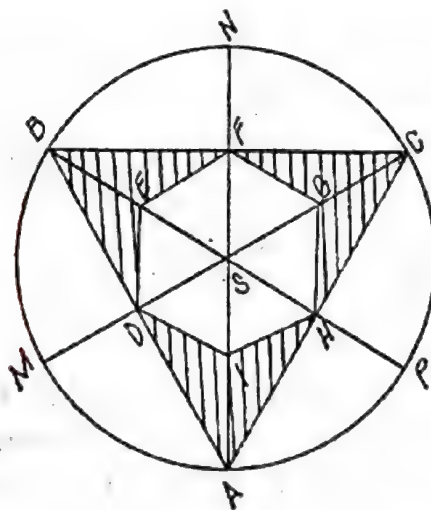


Fig. 11.87 c

Materialul oferit reprezintă deșeuri din tablă de formă rotundă provenite din matrițarea unor tole pentru motoare electrice (fig. 11.87). Se cere să se afle suprafața circulară maximă din care se pot executa piesele din figură cu pierdere minimă de material.

155. Înălțimea h a unui jet de apă este dată în formula :

$$h = H - \frac{H^2}{100}$$

unde H este înălțimea apei din rezervor deasupra ajutorului.

Calculați înălțimea jetului de apă alimentat de un rezervor unde lichidul se ridică la 10, 20, 30 m deasupra ajutorului jetului.

156. Debitul d în litri/sec al unui injector este dat de formula : $d = S p$, unde S este secțiunea minimă a duzei în cm^2 și p este presiunea vaporilor în kg/cm^2 . Care este după această formulă, debitul unui injector având diametrul de 8 cm și presiunea vaporilor de 12 kg/cm^2 .

157. Calculați înălțimea unui coș de fum de la o uzină, știind că un observator se află la distanța de 15,6 m de piciorul coșului și cu ajutorul teodolitului, el măsoară mărimea unghiului format pe orizontală de direcția ochiului său și a vârfului coșului rezultând un unghi egal cu $50^\circ 20'$. Ochiul observatorului se află la 1,5 m deasupra solului.

158. Un electromotor acționează o pompă centrifugă. Roata electromotorului are un diametru de 210 mm, viteza sa de rotație este de 1000 ture/min pentru un regim al motorului de 1500 ture/min. Pompa efectuează 1500 ture/min roata sa având un diametru de 140 mm. Calculați viteza teoretică în ture/min a roții electromotorului pentru antrenarea corectă a pompei.

159. O sculă așchietoare are cursa de 140 mm/min. Cursa totală pentru prelucrarea unei piese este de 130 mm. Returul sculei este de două ori mai rapid decât turul. Numărul de curse (du-te-vino) este de 30 ture/min. Care este viteza de așchiere a uneltei.

160. Figura 11.88 indică modul de îmbinare a materialelor lemnoase prin nut și feder. Calculați lungimea de intrare și ieșire a federului, apoi calculați bc , știind că $ab = 20$. Cotele sînt date în mm.

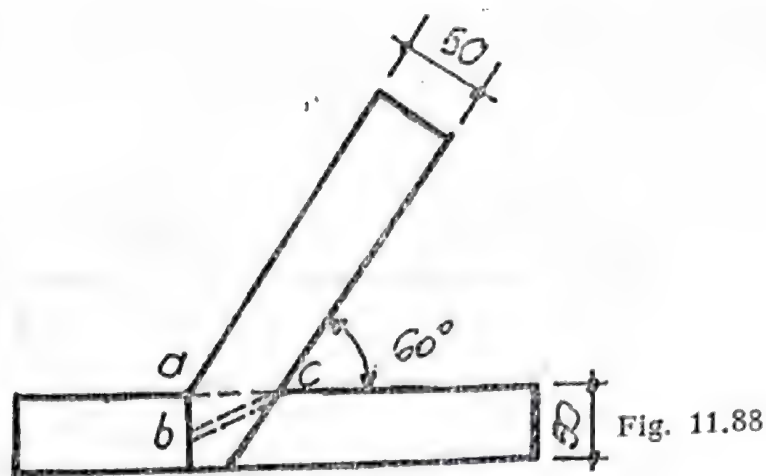


Fig. 11.88

161. Calculați greutatea piuliței de formă exagonală reprezentată în desen știind că densitatea metalului din care este confecționată este de $7,8 \text{ kg/dm}^3$ (fig. 11.89).

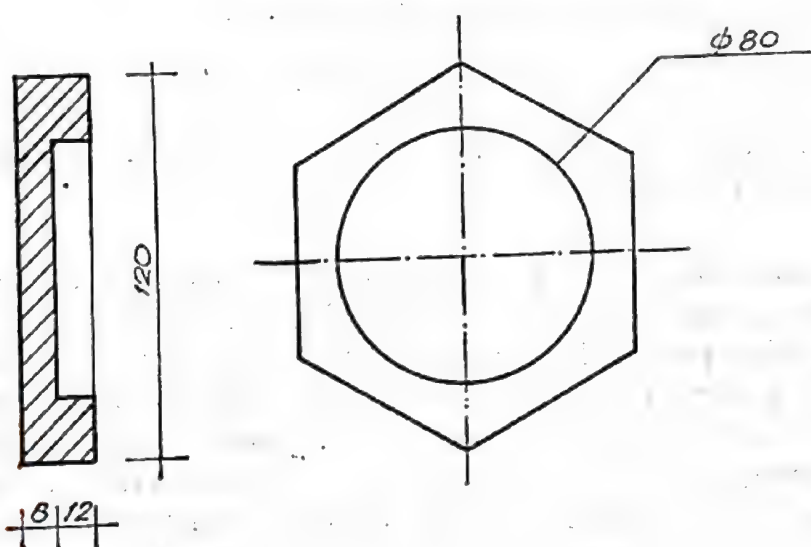


Fig. 11.89 a

Fig. 11.89 b

162. Arborele cotit al unui automobil efectuează 3200 ture/min. Știind că o cursă a pistoanelor este egală cu 120 mm, calculați viteza medie a lor.

163. Într-un atelier se toarnă 40 de piese din fontă, unele cântărind 35 kg și altele 42 kg. Masa totală a pieselor este egală cu 1575 kg. Câte piese se pot turna din fiecare fel?

164. Armătura unei grinzi din beton armat indicată în figura 11.90 cuprinde următoarele elemente :

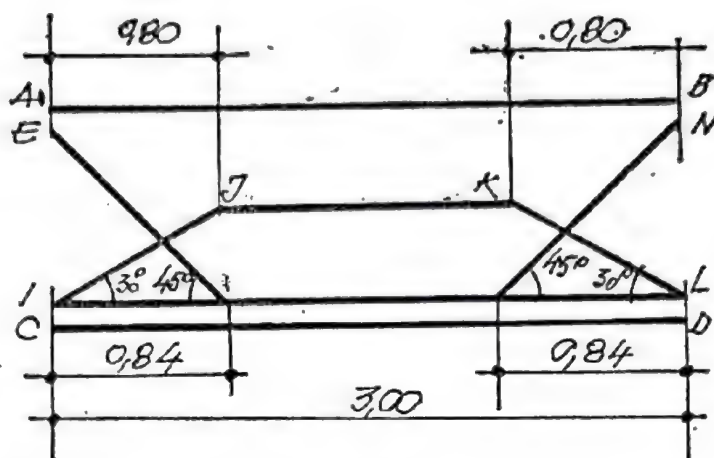


Fig. 11.90

- două bare de compresiune de 3 m lungime fiecare ;
- o bară înclinată cu un unghi de 45° ;
- o bară înclinată cu un unghi de 30° ;

Calculați lungimea totală a fierului beton necesar pentru armarea acestei grinzi.

165. Viteza de regim a unui automobil este de 3600 ture/min. Arborele primar al cutiei de viteze leagă vilbrochenul pe un ambreiaj în formă de disc purtând un pinion cu 20 de dinți. Acest pinion este în legătură cu o roată cu 32 de dinți, purtând pe arborele intermediar pe care sînt așezate o roată cu 25 de dinți, asigurînd viteza a doua și o roată cu 18 dinți asigurînd prima viteză. Arborele secundar poartă un cărucior cu 27 de dinți asigurînd viteza a treia și un cărucior cu 34 de dinți asigurînd prima viteză. Raportul de demultiplicare a diferențialului este de 16. Diametrul pneurilor este de 0,65 m.

Calculați :

- a) Viteza de rotație a motorului în prima viteză și a doua viteză ;
- b) Viteza în km/h a automobilului în viteza I și a II-a.

166. Să se stabilească excentricitatea unei țevi, dacă grosimea cea mai mică a peretelui este s_1 , și grosimea cea mai mare a peretelui este s_2 (fig. 11.91).

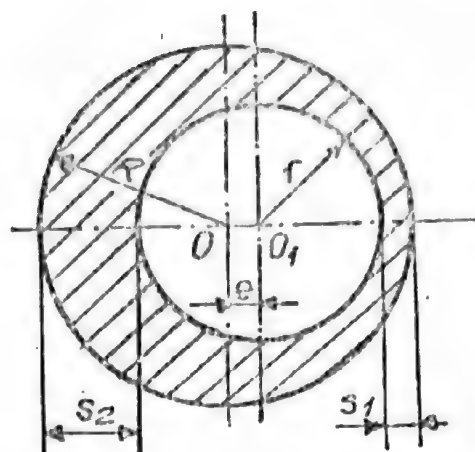


Fig. 11.91

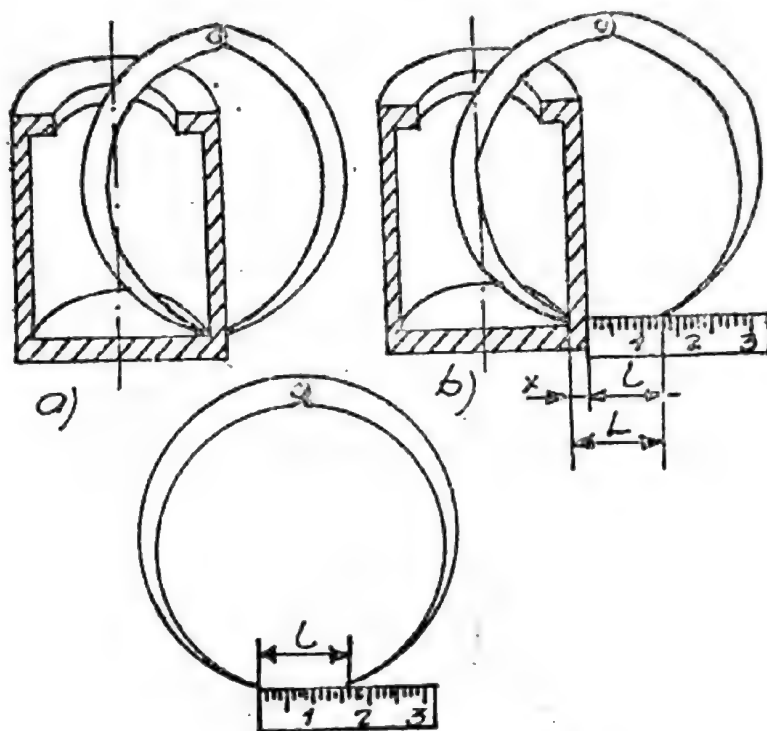


Fig. 11.92

167. La măsurarea grosimii peretelui la un utilaj cu compasul de grosime, este câteodată imposibilă scoaterea compasului fără a mișca brațele compasului (fig. 11.92). În acest caz se adaugă la mărimea care trebuie măsurată o altă dimensiune l astfel încât să se obțină lungimea L care să rămână neschimbată.

168. Viteza unui pendul depinde de perioada T care se poate exprima cu formula : $T = 2 \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$, unde l este lungimea pendului și g accelerația căderii libere ($g = 981 \text{ cm s}^{-2}$). Să se stabilească cu cât trebuie scurtată lungimea pendulului (discul împins pe tija

pendiulului în sus), dacă ea înainte avea lungimea $l_0 = 20$ cm și ceasul rămânea cu 12 min pe zi în urmă. Admitem că discul este mai greu decât tija.

169. Să se determine grosimea peretelui unei țevi cu un diametru exterior de $d = 140$ mm, care se întrebuințează la construcția unei turle. Se știe că din motive de rezistență suprafața secțiunii țevii trebuie să fie $A = 25$ cm².

170. Productivitatea muncii unei mașini unelte automatizată A , este p unități de produs pe oră. Să se construiască încă două mașini unelte, B și C pentru aceeași producție.

Se pun condițiile : productivitatea mașinii B să nu fie mai mică de m % din suma productivității A și C , iar productivitatea mașinii C să nu fie mai mică decât suma productivității mașinii B și A . Câte unități de produse trebuie să producă mașinile B și C pe oră?

171. Raza de protejare a unui paratrăsnet este mai mică decât dublul înălțimii lui. Să se determine punctul de pe un acoperiș cu două pante unde trebuie fixat un paratrăsnet. Totodată să se stabilească și cea mai mică înălțime admisă. Suprafața de bază este un dreptunghi cu laturile a și b , date în metri.

172. Să se stabilească înălțimea unui turn de emisie (fig. 11.93) necesar pentru recepția perfectă a programului de televiziune

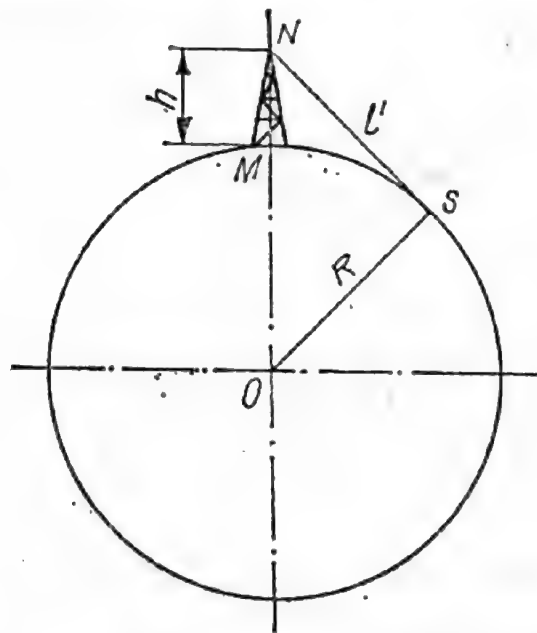


Fig. 11.93

de la București la Brașov. Să se arate că un asemenea proiect este imposibil. La soluție să se țină seama că undele ultracurte, pe

care se face transmisia programului de televiziune, nu se acomodează curburii pământului. De aceea recepția perfectă se obține numai în zona vizibilității optice (ceea ce înseamnă că recepționarul programului din Brașov trebuie să vadă teoretic vârful turnului de emisie din București). Presupunem că distanța l' de la vârful turnului până la Brașov este egală cu distanța $l = 180$ km distanță între Brașov și București. Raza pământului se consideră $R = 6368$ km.

173. Într-o secțiune curbă a unei porțiuni de cale ferată, raza de curbura nu trebuie să fie mai mică de 600 m.

Stabiliți valorile pentru lungimile șinelor știind că unghiul la centru al arcului este mai mic de 180° iar coarda lui este de 156 m.

174. Pe suprafața de bază a unui cilindru se înscrie un cerc. Se trasează paralel cu axul o gaură cu diametrul egal cu diametrul cercului înscris. Arătați că șpanul rezultat din găurire nu reprezintă mai mult de 25% din greutatea corpului propriu-zis.

175. Un abajur are forma unui trunchi de con. Diametrul bazei mici este egal cu d și diametrul bazei mari este egal cu D . Lungimea generatoarei este l . Abajurul se confecționează dintr-o bucată dreptunghiulară de material. Să se determine dimensiunile minime ale bucății de material necesară pentru confecționarea abajurului (fig. 11.94).

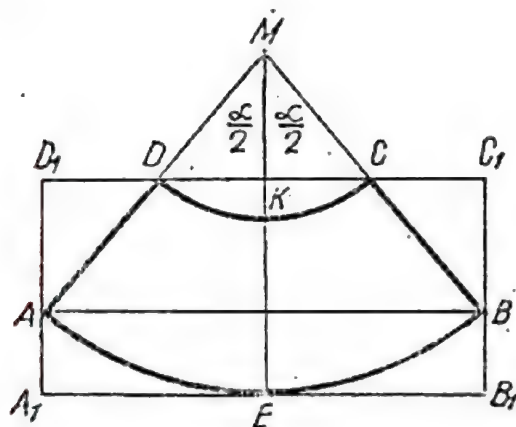


Fig. 11.94

176. La uzinele 23 August din București se obțin două noi tipuri de oțel turnat. Prima calitate conține 20% iar a 2-a calitate conține 40% nichel.

Cîte tone de oțel din fiecare calitate sînt necesare pentru un aliaj al cărui conținut de nichel să fie între 25% și 30%?

177. Pe o parcelă în formă de triunghi echilateral cu latura de 75 m se face un parc astfel : cu o rază cît $\frac{2}{5}$ din latura triunghiului și cu centrul în fiecare vîrf se duc 3 arce de cerc. Suprafețele din colțuri se seamănă cu flori. Pe lângă ele se face cîte o alee lată de 3 m. Aflați aria rămasă pentru a fi acoperită cu iarbă (Fig. 11.95).

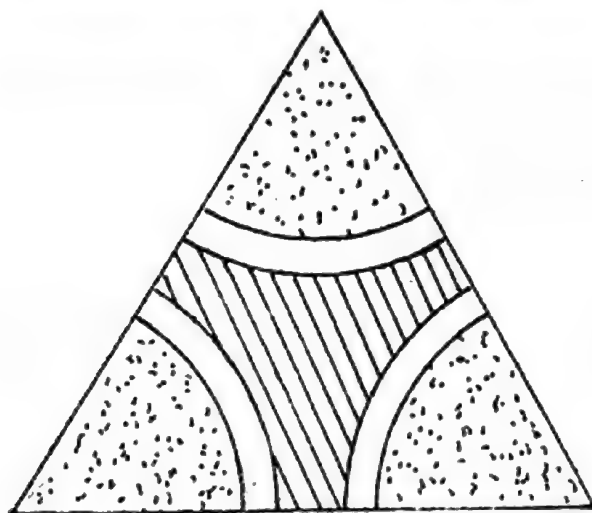


Fig. 11.95

Capitolul 12

EXERCIIII ȘI PROBLEME DATE LA ADMITERE ÎN TREAPTĂ I



1. Să se aducă la forma cea mai simplă expresia :

$$E = \frac{x}{ax - 3a^2} - \frac{3}{x^2 + x - 3ax - 3a} \left(1 - \frac{4x - x^2}{x + 4} \right).$$

2. Să se determine a, b, c , astfel ca polinomul $P(x) = 12x^3 - 40x^2 + 27x + 5$ să poată fi pus sub forma :

$$P(x) = (3x - 1)(ax^2 + bx + c).$$

Să se determine apoi mulțimea valorilor lui x pentru care $P(x) = 0$.

3. Să se rezolve sistemul :

$$\begin{cases} \frac{x}{a-b} + \frac{y}{a} = a \\ \frac{x}{b} - \frac{y}{a-b} = -b \end{cases}$$

4. Să se determine un polinom $P(x)$ de gradul al treilea, cu coeficientul lui x^3 egal cu 1, știind că $P(x)$ împărțit prin $(x-1)$, $(x-2)$ și $(x-3)$ dă de fiecare dată un rest egal cu 6.

5. Un automobilist parcurge o distanță de 240 km cu o viteză mai mică cu 20 km/h decât și-a propus inițial și ajunge la destinație cu o oră mai târziu. Care a fost viteza automobilului ?

6. Baza unei piramide este trapezul $ABCD$, cu unghiurile

$A \perp D = 90^\circ$, iar piciorul înălțimii piramidei este mijlocul laturii BC . Dacă V este vârful piramidei :

a) să se arate că muchiile VA și VD sînt egale ;

b) să se afle volumul piramidei știind că înălțimea trapezului este de 6 cm, linia mijlocie a trapezului este de 4 cm, iar muchia $VA = 13$ cm.

7. Un triunghi isoscel are baza egală cu 30 cm, iar fiecare din laturile egale de 25 cm. Să se afle volumul corpului obținut prin rotirea acestui triunghi în jurul uneia din laturile egale.



1. Să se rezolve ecuația :

$$(2x + 3) - 3(x + 4) = 4(x + 5) - 6$$

2. Se dă ecuația :

$$\frac{20 + x}{2x - 2} - \frac{9x^2 + x + 2}{6x^2 - 6} = \frac{5 - 3x}{x + 1} - \frac{10 - 4x}{3x + 3}.$$

a) Să se determine valorile lui x , pentru care ecuația nu are sens.

b) Să se rezolve ecuația.

3. Să se construiască un polinom $P(x)$ de gradul II, astfel ca : $P(2) = P(3) = 0$ și $P(0) = 6$.

4. Într-un trunchi de piramidă triunghiulară regulată, laturile bazelor și apotema sînt (în cm) : $AB = 5$, $A'B' = 3$, $ap = 6$.

Se cere :

a) aria laterală a trunchiului de piramidă ;

b) volumul trunchiului de piramidă ;

c) volumul trunchiului de con înscris în trunchiul de piramidă.

5. Un con circular drept are raza bazei de 6 cm și înălțimea de 8 cm. Să se afle :

a) volumul conului ;

b) aria laterală a conului ;

c) volumul sferei înscrise în con.



1. Se dă expresia :

$$E(a; b) = \left(\frac{2a + b}{a + b} - \frac{a - 2b}{a - b} + \frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2} \right) : \frac{a^2 + b^2}{a + b}.$$

Să se arate că $E(a; b) = \frac{2}{a - b}$;

Să se calculeze valoarea ei numerică știind că a și b sînt rădăcinile ecuației :

$$\frac{3x + 1}{x} - 1 = \frac{3}{2x - 1}, \text{ iar } a > b.$$

Dacă $b = -1$, pentru ce valori ale lui a expresia $\frac{2}{a - b}$ este număr întreg?

2. Un cerc O este înscris într-un trapez isoscel. Cunoșcînd că baza mare a trapezului este de 25 cm și baza mică de 9 cm, să se afle aria și volumul corpului obținut prin rotirea completă a trapezului în jurul bazei mari.

3. Fie $VABC$ un tetraedru regulat cu M mijlocul muchiei VC . Să se demonstreze că dreapta VC este perpendiculară pe planul MAB ;

Să se afle raportul dintre volumele piramidelor $VABM$ și $MABC$.

4. Să se arate, fără a face împărțirea, că polinomul :

$$P(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 - 5x - 2,$$

este divizibil cu $x - 2$ și $x + 1$.

5. Să se rezolve sistemul :

$$\begin{cases} \frac{x + 2y - 3}{2} = \frac{2x + y + 5}{3} \\ \frac{y - x}{7} = \frac{x + y + 3}{4} \end{cases}$$

6. Se dau expresiile :

$$E_1 = x^4 - 4x^3 + 12x - 9$$

$$E_2 = \frac{(x-1)(x-3)}{x+2}.$$

- Să se arate că E_1 este divizibilă cu $x-1$ și $x-3$;
- Să se descompună în factori E_1 ;
- Să se determine valorile lui $x \in N$ pentru care expresia E_2 ia valori numere întregi pozitive.

7. O foaie de tablă dreptunghiulară cu dimensiunile 4 dm și 6 dm reprezintă desfășurarea suprafeței laterale a unui cilindru. Să se afle volumul cilindrului. Câte soluții admite problema?

8. Se dă expresia :

$$E(x) = \left(\frac{4}{x^2 - 1} + \frac{2x + 4}{x + 1} - \frac{x^2 + 1}{1 - x} \right) \frac{1 - \frac{1}{x}}{x + \frac{1}{x + 2}}$$

- Pentru ce valori ale lui x are sens expresia?
- Să se aducă expresia la forma cea mai simplă.
- Pentru ce valoare a lui x , expresia ia valoarea $\frac{2}{1}$?

9. Se dau polinoamele :

$$\underline{x^3 - 2x^2} + 2x - 1 \text{ și } x^3 + 3x^2 - 4.$$

a) Să se arate (fără a face împărțirea) că sînt divizibile cu $(x-1)$.

b) Să se afle c.m.m.d.c. și c.m.m.m.c. al polinoamelor date.

10. Într-un paralelipiped dreptunghic muchiile bazei sînt :

$AB = 8$ cm, $BC = 6$ cm, iar diagonala paralelipipedului face cu planul bazei un unghi de 45° .

a) Să se calculeze înălțimea și diagonala paralelipipedului.

b) Să se calculeze aria totală și volumul paralelipipedului.

11. O piesă metalică are forma unui con circular drept cu lungimea cercului de bază de 94,20 cm și înălțimea de 0,2 m. Câte bile cu raza de 5 cm se pot turna prin topirea acestei piese?



1. Se dă expresia :

$$E(x) = 13x(x+1)^2 + (2x^2 - 5x + 1)(x^2 + 2x + 3) - 5(x+2)(x-2) - 23.$$

a) Să se aducă expresia la forma cea mai simplă ;

b) Să se descompună expresia în factori ireductibili.

2. Fie ecuația : $\frac{x^2}{x^2-1} + \frac{6}{x+1} + \frac{4}{x-1} = 2$

a) Să se determine mulțimea valorilor lui x pentru care egalitatea are sens.

b) Să se rezolve ecuația și apoi să se verifice rezultatul.

3. Să se reprezinte grafic funcția $y = x^2$, pentru $x \in [-2, 4]$.

Aflați coordonatele punctelor de pe grafic care au abscisa egală cu ordonata.

4. Într-un trapez $ABCD$, înălțimea este de 5 cm, latura oblică este egală cu baza mică, iar unghiurile trapezului alăturate bazei mari sînt de 45° , respectiv de 30° .

Să se afle :

a) proiecțiile laturilor neperalele pe baza mare ;

b) laturile trapezului ;

c) volumul corpului obținut prin rotirea trapezului în jurul bazei mari.

★

1. Să se rezolve ecuația :

$$\frac{5x^2 + 3x + 1}{x + 3} = \frac{x + 1}{3}.$$

2. Să se simplifice fracția :

$$\frac{a^3 + 2a^2 + 2a + 1}{a - 1}.$$

3. Perimetrul unui dreptunghi este egal cu 84 m. Lungimea este cu 18 mai mare decât lățimea. Să se afle dimensiunile dreptunghiului.

4. Într-un con cu raza 6 m și generatoarea 7,5 m se face o secțiune cu baza la $\frac{2}{3}$ de vîrf. Să se afle raza, înălțimea și generatoarea conului mic format.

★

1. Fiind dată expresia :

$$E(x) = \left(\frac{x + 1}{2x - 2} + \frac{8}{x^2 - 1} - \frac{x + 3}{2x + 2} \right) : \frac{3}{4x^2 - 4} \cdot \frac{1}{4}.$$

Se cere :

a) Să se aducă expresia la cea mai simplă formă, arătînd că

$$E(x) = 3 + \frac{1}{3}.$$

b) Să se rezolve ecuația :

$$x^2 + 3x = \frac{22}{3} - E(x), \text{ unde } E(x) \text{ este forma cea mai simplă a expresiei date.}$$

★

1. Se dă expresia :

$$E(x, y) = \frac{2y^2}{x^2 - y^2} + \frac{x + y}{2(x - y)} - \frac{x - y}{2(x + y)} : \frac{x^2 + y^2}{2xy} - 1 - \frac{3x^3 - x^2y + 9xy^2 - 3y^3}{3x + 9y}$$

Se cere :

- a) Să se aducă la forma cea mai simplă ;
- b) Să se afle valoarea numerică a expresiei pentru

$$x = \frac{1}{4}, y = \frac{4}{5}.$$

2. Secțiunea axială a unui trunchi de con este un trapez care are bazele de 8 cm și 18 cm, iar unghiul format de o latură neparalelă cu baza mare este de 45° .

Se cere :

- a) aria totală a trunchiului de con ;
- b) volumul trunchiului de con.



1. Să se aducă la forma cea mai simplă expresia :

$$E(x) = \left(\frac{1}{x^2 - 1} - \frac{2}{x^2 + 2x + 1} + \frac{1}{x^2 - 2x + 1} \right) : \left(\frac{1}{x - 1} + \frac{2}{x + 1} \right)$$

2. Să se facă tabelul de variație și să se reprezinte grafic funcția :

$$y = \frac{1}{2x}.$$

3. Generatoarea unui con circular drept este cu 2 cm mai mică decât triplul razei bazei, iar înălțimea lui cu 2 cm mai mare decât dublul razei. Să se calculeze :

- a) Dimensiunile conului ;
- b) Aria totală a conului.

4. Pe perpendiculara în A pe planul dreptunghiului $ABCD$ se ia punctul M astfel încît $MB = 20$ cm, $MC = 5\sqrt{17}$ cm și $MD = 13$ cm.

- a) Să se demonstreze că triunghiurile MBC și MDC sînt dreptunghice ;
- b) mărimea segmentului MA ;
- c) aria laterală a piramidei $MABCD$ (vîrf în M).



1. Să se efectueze :

$$\left(\frac{3a - b}{3a + b} - \frac{3a + b}{3a - b} \right) \cdot \left(\frac{9a}{b} - \frac{b}{a} \right)$$

2. Într-o localitate se amenajează două terenuri pentru sport cu aceeași arie; unul dreptunghiular, avînd lungimea cu 120 m mai mare decît lățimea; altul de formă pătrată, avînd latura cu 4 m mai mare decît lățimea primului. Care sînt dimensiunile celor două terenuri?

3. Să se rezolve ecuația :

$$\frac{x - 1}{6} - \frac{x + 2}{4} = \frac{1}{3} - \frac{x + 5}{8} - 2.$$

4. Un trunchi de piramidă patrulateră regulată are dimensiunile bazei de 10 cm și 2 cm, iar apotema de 13 cm.

Se cere :

- a) Aria laterală a trunchiului;
- b) Volumul trunchiului.

5. Se dă expresia :

$$E(x, y) = (x - y)^2 + (2x + y)^2 - (2x + y) \cdot (2x - y)$$

Se cere :

- a) Să se aducă expresia la forma cea mai simplă;
- b) Să se calculeze valoarea numerică a expresiei pentru :

$$x = 1 \text{ și } y = 2.$$

6. O mașină consumă 8 l benzină la sută de kilometri, iar o alta consumă 12 l. Într-o zi ambele mașini cu făcut, în total, 2400 km și au consumat 208 l benzină. Cîți km a străbătut fiecare mașină.

7. Să se rezolve ecuația :

$$x^2 - 4x + 3 = 0.$$

8. Un bazin de înot are lungimea de 25 m și lățimea de 10 m. Din cauza evaporării apei nivelul a scăzut cu 5 cm. Cîți hectolitri de apă s-au evaporat?



1. Se dă sistemul :

$$\begin{cases} x + my = 3m \\ 2x + (m + 1)y = (2m + 1) \end{cases}$$

- a) Să se rezolve în cazul $m = 3$;
- b) Să se rezolve în cazul general ;
- c) Când $m = 1$ sistemul are o infinitate de soluții. De ce ?

2. O piramidă patrulateră regulată are aria laterală egală cu 960 cm^2 și aria totală egală cu 1536 cm^2 . Să se afle :

- a) Latura bazei ;
- b) Înălțimea piramidei ;
- c) Volumul piramidei.

3. Să se simplifice fracția :

$$\sqrt{\frac{x^2 - 4xy + 4y^2}{x^2 - 2xy + xz - 2yz}}$$



1. Se dă expresia :

$$E(a, b) = \left(a - \frac{4ab}{a+b} + b \right) : \left(\frac{a}{a+b} - \frac{b}{b-a} - \frac{2ab}{a^2 - b^2} \right).$$

- a) Să se arate că forma cea mai simplă a expresiei este $a - b$;
- b) Să se calculeze valoarea numerică a expresiei $E(a, b)$ pentru

$$a = 2\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left(2\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \right), b = 5\frac{1}{5} : 0,26 : 20.$$

2. Să se afle aria și volumul corpului din figura 12.1 (un cilindru terminat cu o emisferă și un con). Dimensiunile sînt cele de pe figură.

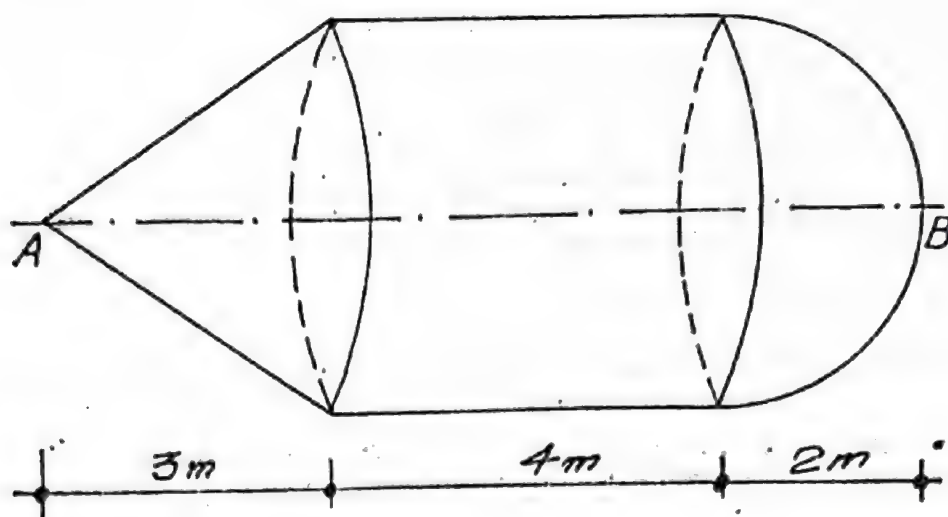


Fig. 12.1

★

1. Să se rezolve ecuația :

$$\frac{5x - 2}{2} = 2x - 1.$$

2. Să se rezolve sistemul :

$$\begin{cases} 3x - 2y = 4 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$$

3. Care este latura pătratului cu aria 842 m^2 ?
4. Într-o curte sînt găini și iepuri care împreună au 36 capete și 114 picioare. Cîte găini și cîți iepuri sînt?
5. Un triunghi dreptunghic ABC , ($\hat{A} = 90^\circ$), se rotește în jurul ipotenuzei. Dacă $AB = 6 \text{ cm}$ și $AC = 8 \text{ cm}$, să se afle aria totală și volumul corpului născut.

★

1. Un triunghi isoscel ABC ($AC = BC$) este așezat cu latura $AB = 6 \text{ cm}$ în planul P ($C \notin P$), iar unghiul diedru format de planul triunghiului cu planul P este de 30° . Fie $CD = 4 \text{ cm}$ înălțimea triunghiului ABC ($D \in AB$) iar O' proiecția lui C pe planul P .

Să se calculeze :

- Aria triunghiului ABO' ;
- Volumul corpului $CO'AB$;
- Aria totală a corpului $CO'AB$;
- Distanța de la C' la planul triunghiului ABC ;
- Desenați prisma avînd ca bază triunghiul ABO' și înălțimea $C'C$ și apoi calculați-i volumul.

$$\left(\text{Considerați } \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \right)$$

2. Fie expresiile :

$$F_1(x, y) = 2x - 3y \frac{2x}{2x - 3y} + 2y \left(\frac{3x}{2x - 3y} - 2 \right)$$

$$F_2(x, y) = \left(\frac{y^2}{x - 2y} + \frac{x}{2} + \frac{y^2}{4y - 2x} \right) \cdot \frac{1}{(x - y)^2}.$$

a) În condițiile de existență, să se arate că :

$$F_1(x, y) = 2x - 4y$$

$$F_2(x, y) = \frac{1}{2x - 4y}.$$

b) Să se rezolve sistemul :

$$\begin{cases} F_1(x, y) + 2 F_1(x, y) \cdot F_2(x, y) = 0 \\ x F_2(x, y) + F_1(x, y) \cdot F_2(x, y) = 2 \frac{1}{2} \end{cases}$$

Să se găsească mulțimea :

$$M = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{Z} \text{ și } F_1(x, y) = 3\}.$$

3. Să se arate că pentru orice $m \in \mathbb{R} - \{0\}$ ecuația :

$$\frac{x+1}{x} = m^2(x+1)$$

admite o rădăcină independentă de m și o rădăcină pozitivă.



1. Se dau polinoamele $P_1(x) = x^3 - 2x^2 - 3x + 2$;

$P_2(x) = 2x^2 - 3x + 1$; $P_3(x) = x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 2$.

Să se calculeze :

a) valorile numerice ale polinomului $P_3(x)$ pentru

$x = -2$ și pentru $x = 0$;

b) $P_1(x) - P_2(x) + P_3(x)$;

c) $P_1(x) \cdot P_2(x)$.

2. Să se rezolve ecuația :

$$\frac{x}{x-2} - \frac{x+2}{x^2-4} + \frac{3}{4} = 0$$

3. Un con circular drept are aria bazei egală cu 36 cm^2 și generatoarea egală cu 10 cm . Să se afle aria laterală și volumul conului.

4. Un dreptunghi $ABCD$, avînd laturile $AB = CD = a$ și $AD = BC = b$, se rotește în jurul laturilor AB și BC obținîndu-se două corpuri. Să se afle :

a) raportul ariilor celor două corpuri;

b) raportul volumelor celor două corpuri.



1. Se dă sistemul :

$$\begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ 3x - y = 1 \end{cases}$$

Se cere :

a) Să se rezolve sistemul;

b) Să se verifice soluția găsită;

c) Să se reprezinte grafic prima ecuație a sistemului;

d) Să se stabilească dacă punctul $P(3;1)$ se află pe dreapta reprezentată la punctul c.

2. O piramidă patrulateră regulată are latura bazei de 8 cm iar înălțimea de 3 cm.

Să se calculeze :

- a) Volumul piramidei ;
- b) Apotema piramidei ;
- c) Aria laterală a piramidei.

3. Să se rezolve ecuația :

$$\frac{x-2}{3} + \frac{x-1}{2} = 3$$

4. Se dă sistemul :

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ ax - y = a \end{cases}$$

- a) Să se rezolve sistemul ;
- b) Să se determine a astfel ca $x = 3$.

În acest caz să se găsească y .

- c) Să se reprezinte grafic : $x - y = 1$

5. a) Să se simplifice fracția :

$$\frac{5a^2 + 5ax}{a^2 - x^2}, x \in R - \{-a, a\}.$$

b) Să se afle valoarea fracției de la punctul a pentru :

$$a = \frac{1}{5}; x = \frac{1}{6}.$$

6. Înălțimea unui con este de 8 m, iar generatoarea sa de 10 m.

Să se afle :

- a) Volumul conului ;

b) Raportul dintre volumul conului și volumul sferei înscrise în con.



1. Fie expresia :

$$E(a) = \left(\frac{a^2 - 1}{a + 1} + \frac{a + 1}{a^2 - 1} \right) \cdot \left(\frac{2a^3 + 2a}{4a^2} + 1 \right) \cdot \frac{2a}{2a^2 + 2}$$

a) Să se aducă la forma cea mai simplă și să se găsească valorile lui a pentru care expresia inițială are sens ;

b) pentru ce valori ale lui a , expresia :

$$E(a) = \frac{a + 1}{a - 1}, \text{ este pozitivă ?}$$

c) Să se rezolve ecuația :

$$\frac{a + 1}{a - 1} + \frac{1}{\frac{a + 1}{a - 1}} = \frac{4}{a^2 - 1}.$$

2. Se consideră un triunghi dreptunghic ABC ($A = 90^\circ$), ale cărui catete sînt $AB = 20$ cm, $AC = 15$ cm, iar pe perpendiculara în A la planul triunghiului se ia punctul M , astfel ca segmentul AM să fie egal cu mediana AA_1 a triunghiului ABC .

a) Să se afle aria totală și volumul corpului obținut prin rotirea triunghiului ABC în jurul catetei AB ;

b) Să se calculeze volumul piramidei $MABC$;

c) Să se afle aria laterală a acestei piramide ;

d) Să se calculeze distanța de la punctul A la planul (MBC) .

3. Fie ecuația : $\frac{x}{x - 2} = \frac{6}{x - 1}$. Rădăcinile ecuației sînt, în

cm, catetele unui triunghi dreptunghic. Să se afle aria și volumul corpului generat prin rotirea triunghiului în jurul unei drepte

care trece prin vârful unghiului drept și este paralelă cu ipotenuza triunghiului.

4. Să se aducă la forma cea mai simplă expresia :

$$E = \left(1 - \frac{2y}{x} + \frac{y^2}{x^2} \right) : \left(1 - \frac{y}{x} \right) : \left(\frac{x-y}{x} \right) \cdot \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x} \right).$$

3. Să se rezolve sistemul :

$$\begin{cases} \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 2 \\ \frac{x}{x+b} + \frac{y}{a-b} = \frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2}. \end{cases}$$

★

1. Se dă expresia :

$$E(x) = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x^2-1}.$$

a) Să se stabilească valorile lui x pentru care expresia are sens ;

b) Să se aducă la forma cea mai simplă ;

c) Să se calculeze $E\left(-\frac{1}{2}\right)$.

2. Într-un con circular drept se cunosc raza bazei de 3 cm și înălțimea de 4 cm.

Se cere :

a) Volumul conului ;

b) Aria totală a conului ;

c) Să se afle aria figurii obținute prin secționarea conului cu un plan paralel cu baza, situat la 2 cm de vîrf.

3. Să se rezolve sistemul :

$$\begin{cases} \frac{x+y}{2} - \frac{2y}{3} = \frac{5}{2} \\ \frac{3x}{2} + 2y = 0. \end{cases}$$

a) Să se arate că polinomul :

$P(x) = x^4 - 6x^2 + 4x + 8$ este divizibil cu

$Q(x) = x - 2$ și $R(x) = x + 2$

b) Folosind, eventual, rezultatul de la punctul a să se simplifice fracția :

$$F(x) = \frac{x^4 - x^3 - 6x^2 + 4x + 8}{x^4 - 16}; x \in \mathbb{R} - \{-2, 2\}$$

4. Într-o piramidă triunghiulară $ABCD$ muchia CD este perpendiculară pe planul ABC . Se dă :

$AB = CD = 4$ cm, $AC = 3$ cm și $BC = 5$ cm.

a) Să se arate că $AD = BC$;

b) Să se afle aria totală și volumul piramidei.

★

1. Să se rezolve ecuația :

$$\frac{x-1}{6} - \frac{x+2}{4} + \frac{1}{3} = \frac{x+5}{8} - 2. \text{ (Verificare)}$$

2. Se dă fracția algebrică rațională :

$$F(x) = \frac{28x + a + 1}{2x - 3a + 7}.$$

a) Să se determine a știind că pentru $x = 1$ fracția nu este definită.

b) Înlocuind în expresia lui $F(x)$ pe a cu valoarea găsită, să se determine valoarea lui x pentru care $F(x) = 0$

3. Să se rezolve prin metoda substituției sistemul de ecuații :

$$\begin{cases} p^2x + py + 1 = 0 \\ q^2x + qy + 1 = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{(necunoscutele sînt } x \text{ și } y) \\ \text{Verificare.} \end{array}$$

4. Punctele A_1 și A_2 avînd ordonatele egale cu $\frac{3}{16}$, sînt situate pe graficul funcției $y = 3x^2$.

a) Să se determine abscisele punctelor A_1 și A_2 .

b) Să se determine mulțimea valorilor lui a știind că punctul $M \left[3, \frac{1}{3} a(a - 3) \right]$ este situat pe graficul funcției $y = \frac{2}{3}$.

5. Un trapez isoscel cu bazele de 7 cm și 17 cm și aria de 144 cm^2 se rotește în jurul bazei mari. Să se afle volumul corpului de rotație obținut.



1. Să se rezolve ecuația :

$$6x^2 - 5x + 1 = 0.$$

2. Să se rezolve sistemul :

$$\begin{cases} x - y = 3 \\ \frac{2x}{3} + \frac{y}{2} = 5. \end{cases}$$

3. Să se aducă la forma cea mai simplă expresia :

$$E(x) = \frac{x}{x+1} + \frac{1}{x-1} - \frac{2x}{x^2-1} : \frac{x-1}{x+1} - \frac{2x-2}{x+1} + 1.$$

4. Fără a efectua împărțirea, să se afle restul împărțirii polinomului :

$$P(x) = 2x^3 - 3x^2 + 2x - 3 \quad \text{la} \quad (x+1).$$

5. Într-o piramidă patrulateră regulată latura bazei este de 10 dm, iar înălțimea piramidei este de 12 dm.

a) Să se afle aria totală și volumul piramidei ;

b) Tăiem piramida cu un plan paralel cu baza, a cărui distanță de la vârful piramidei este de 6 dm. Să se afle volumul și aria laterală a trunchiului de piramidă care se formează.



1. Să se aducă la forma cea mai simplă expresia :

$$E(x, y) = \left(\frac{x^2 + y^2}{x} + y \right) \left(y - \frac{y^2}{x - y} \right) : \frac{x^3 - y^3}{x^2 - y^2}.$$

Ce valoare are expresia pentru $x = 5$ și $y = 2$?
Dar pentru $x = 7$ și $y = 2$?

2. Să se rezolve ecuația :

$$\frac{3}{4}(5x - 2) - \frac{1}{2}(3x + 4) = 1.$$

3. Într-un dreptunghi, o latură este de cinci ori mai mare decât cealaltă, iar aria dreptunghiului este de 80 cm^2 .

Se cer laturile dreptunghiului.

4. Ce diametru trebuie să aibă un copac, ca prin cioplire să se poată scoate din el un stîlp prismatic cu baza un pătrat, a cărei latură să fie de 3 dm ?

5. Un cort are forma unei prisme patrulateră regulate, iar deasupra o piramidă regulată. Latura bazei este de 4 m , înălțimea prisme de $3,2 \text{ m}$ și înălțimea piramidei de $1,5 \text{ m}$. Pînza folosită pentru acest cort are lățimea de $0,80 \text{ m}$.

Cîți metri de pînză se vor folosi?



1. Să se simplifice fracția algebrică :

$$F(x, y) = \frac{4x^2 - 1}{y(2x + 1) - 4x - 2}.$$

2. Să se rezolve ecuația :

$$F(x, 4) = \frac{1}{2} \left(x - \frac{1}{2} \right).$$

3. Să se determine mulțimea valorilor lui x pentru care :

$$F(x, 4) > \frac{1}{2}$$

4. Se consideră o piramidă patrulateră regulată cu latura bazei de 6 cm și înălțimea de 4 cm . Se cere :

a) Apotema piramidei ;

b) Aria laterală a piramidei ;

- c) Aria totală a piramidei ;
d) Volumul piramidei.

5. Să se simplifice fracția algebrică :

$$F(x, y) = \frac{x^3 + x^2y - x - y}{(x^2 + 2xy + y^2)(x - 1)}.$$

6. Să se rezolve ecuația :

$$F(x, 2) = 0.$$

7. Să se determine mulțimea valorilor lui x pentru care :

$$\frac{x + 1}{x + 2} \leq 3.$$

8. Într-o sferă cu raza 45 cm se face o secțiune cu un plan situat la 3 cm de centrul sferei. Să se afle :

- a) Baza cercului de secțiune ;
b) Volumul conului care are vârful în centrul sferei, iar ca bază cercul de secțiune.

9. Să se rezolve sistemul :

$$\begin{cases} \frac{5}{x-1} : \frac{4}{y-1} = 25 : 24 \\ \frac{2}{x+1} : \frac{3}{y+1} = 7 : 12 \end{cases}$$

10. Să se simplifice fracția :

$$F(a, x) = \frac{ax - 6 + 3x - 2a}{ax + 6 - 3x - 2a}.$$

11. Să se determine valorile întregi ale lui a pentru care $F(a, x)$ este un număr întreg.

12. Să se determine valorile lui a pentru care :

$$F(a, x) < 3.$$

13. Se consideră un cilindru circular drept cu raza de 3 cm și înălțimea de 4 cm.

a) Să se afle raza sferei ce are același volum cu al cilindrului dat.

b) Să se afle volumul prisme patrulatere regulate înscrise în cilindrul dat.



1. Să se determine m , astfel ca polinomul :

$P(x) = 2x^3 - 5x^2 + 6x + m$, să fie divizibil cu binomul $(x - 3)$.

2. Se dă expresia $E(x) = \frac{x^3 - 8 - 6x^2 + 12x}{x^2 + 4 - 4x}$. Se cere :

a) să se aducă la forma cea mai simplă ;

b) pentru ce valoare a lui x , $E(x) = 0,27$.

3. Stabiliți pe cale grafică natura sistemului :

$$\begin{cases} y = 14x \\ \frac{1}{2}y - 3x = 2 \end{cases}$$

În caz de compatibilitate aflați soluția.

4. Un tetraedru regulat are muchia de 3 cm. Se cere :

a) Înălțimea tetraedrului ;

b) Volumul tetraedrului ;

c) Volumul conului circumscris.

1. Se consideră expresia :

$$E(x) = \left(x - \frac{4x}{x+1} + 1 \right) : \left(\frac{x}{x+1} + \frac{1}{x-1} - \frac{2x}{x^2-1} \right)$$

a) Să se stabilească mulțimea valorilor lui x pentru care expresia dată are sens.

b) Să se arate că forma cea mai simplă la care poate fi adusă expresia este $E(x) = x - 1$.

c) Să se găsească mulțimea numerelor reale negative pentru care avem :

$$E(x) \geq -5$$

2. Un con circular drept și o piramidă patrulateră regulată au același vîrf iar baza piramidei este înscrisă în cercul de bază al conului. Știind că raza conului este $R = 3$ cm iar generatoarea este $G = 5$ cm, se cere :

- Figura corespunzătoare enunțului ;
- Aria laterală a conului ;
- Aria totală a conului ;
- Volumul conului ;
- Latura pătratului bază ;
- Volumul piramidei.



1. Se dă expresia :

$$E(x) = \left[\left(\frac{125x^3 + 1}{5x + 1} - \frac{15x^4 - 75x^2}{5x - 1} - 20x \right) + 2(5x - 1) \right] \cdot \frac{1}{5x - 1}$$

Să se arate că forma cea mai simplă a expresiei este :

$$E(x) = 5x + 1$$

2. Să se rezolve sistemul :

$$\begin{cases} 2(x + 1) = 3(y - 1) + 14 \\ 4x - 3 \cdot (2x + y - 1) = 2(-x + y) + 8. \end{cases}$$

3. Să se rezolve ecuația :

$$(x - a)^2 + (x - b)^2 = a^2 + b^2.$$

4. Raportul dintre aria laterală și cea totală a unui cilindru circular drept este $\frac{4}{7}$, iar diametrul bazei cilindrului este cu

4 centimetri mai mare ca generatoarea.

Să se afle aria totală și volumul cilindrului.



1. Se dau expresiile :

$$E(x, y) = \frac{6x^2 + 5xy + y^2}{2x + y}$$

$$F(x, y) = \frac{3x^2 + 2xy - y^2}{3x - y}.$$

a) Să se aducă expresiile date la forma cea mai simplă atit prin simplificarea fracțiilor cât și prin împărțirea directă a numărătorilor la numitori ;

b) Să se rezolve sistemul :

$$\begin{cases} E(x, y) = 4 \\ F(x, y) = 2 \end{cases}$$

2. Un trapez dreptunghic $ABCD$ ($A = 90^\circ$, $B = 90^\circ$) este așezat cu baza AD în planul P , care face un unghi diedru de 60° cu planul trapezului.

a) Ce fel de patrulater este proiecția $AB' C' D$ a patrulaterului dat în planul P ;

b) Să se afle aria și volumul corpului $ABB' CC' D$ cunoscînd : $AB = 10$ cm, $AD = 18$ cm, $BC = 12$ cm ; B' și C' sînt proiecțiile lui B și C pe planul P .

3. Se dă expresia :

$$E(x) = \frac{x - 2a}{a^2x + 2ax - 2a^3 - x^2}$$

a) Să se aducă $E(x)$ la forma cea mai simplă ;

b) Să se rezolve ecuația : $E(x) = \frac{a^2 - x}{a^4}$.

4. Se dă un triunghi dreptunghic ABC ($A = 90^\circ$) cu o catetă de 8 cm și proiecția ei pe ipotenuza de 6,4 cm. Să se afle aria și volumul corpului obținut prin rotația triunghiului dat în jurul unei drepte paralele cu ipotenuză și care trece prin vârful A .



1) Dacă $x^2 = a$; $y^2 = b$, $x + y = c$, fără a calcula pe x și y , să se calculeze $x - y$; xy ; $\frac{x}{y}$ ($a \neq 0$; $b \neq 9$; $c \neq 0$).

2) Se dă o prismă dreaptă cu baza un trapez dreptunghic $ABCD$ ($\angle A = \angle B = 90^\circ$) cu diagonala AC perpendiculară pe latura ne paralelă CD . Linia mijlocie a trapezului, MN , taie diagonalele AC și BD respectiv în P și Q ($M \in AB$). Știind că $PQ = 4$ cm, $BC = 8$ cm, ce cer :

a. Linia mijlocie a trapezului și baza mare a acestuia.

b. Celelalte două laturi ale trapezului și aria sa.

c. Aria și volumul prisme, dacă înălțimea ei este 10 cm.

3) Dacă $P = x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - xz$, să se arate că $2P$ este o sumă de 3 pătrate.

4). Se consideră un paralelipiped dreptunghic $ABCD A' B' C' D'$ cu laturile bazei $AB = a$ și $BC = b$. Să se demonstreze că, dacă înălțimea paralelipipedului este $AA' = \sqrt{2ab}$, diagonala paralelipipedului este egală cu suma a două laturi alăturate ale bazei.

5) Să se rezolve ecuația :

$$\frac{\left[\left(4,625 - \frac{13}{8} \cdot \frac{9}{26} \right) : x + (2,5 : 1,25) : 6,75 \right] : 1 \frac{53}{68}}{\left(\frac{1}{2} - 0,375 \right) : 0,125 + \left(\frac{5}{6} - \frac{7}{12} \right) : (0,358 - 1,4796 : 13,7)} = \frac{17}{27}$$



1). O brigadă de tractoriști a arat 180 ha mai mult decât o altă brigadă, iar $\frac{2}{5}$ din terenul arat de prima brigadă fac cât

$\frac{4}{9}$ din terenul arat de cealaltă brigadă. Cîte hectare a arat fiecare brigadă?

2). Un trunchi de con are generatoarea de 26 cm, raza bazei mari de 15 cm și înălțimea de 24 cm.

a). Să se determine volumul și aria totală a trunchiului de con.

b). Să se calculeze volumul conului din care provine trunchiul de con.

c). Să se determine raza sferei circumscrise conului din care provine trunchiul de con.

3). Se dă expresia

$$E = \left[\left(\frac{x-1}{x+1} \right)^2 + 1 + \frac{2x-2}{x+1} \right] \cdot \frac{x^3 + 1 + 3x + 3x^2}{16x^2}.$$

a). Să se arate că forma cea mai simplă la care poate fi adusă E este $\frac{x+1}{4}$.

b). Pentru ce valori ale lui x , numere întregi, expresia devine număr întreg.

c). Să se determine mulțimea valorilor lui x astfel încît expresia $\frac{x+1}{x-1}$ să ia valori pozitive.



1). Într-un cerc O se consideră două diametre perpendiculare AB și CD . Fie E un punct oarecare situat pe OB (între O și B). Dreapta CE intersectează cercul a doua oară în punctul F . Tangenta în F la cerc taie dreapta AB în G și dreapta CD în H .

a) Să se arate că unghiurile OCE și EFG sînt complementare.

b) Să se demonstreze că triunghiul EFG este isoscel.

c) Ce măsură trebuie să aibă unghiul OCE pentru ca triunghiul EFG să fie echilateral?

2) Să se rezolve ecuația:

$$\frac{(2,7 - 0,8) \cdot 2\frac{1}{3}}{(5,2 - 1,4) : \frac{3}{7}} + x + 8\frac{9}{11} - \frac{(1,6 + 154,66 : 70,3) : 1,9}{\left(2\frac{2}{5} - 1,3\right) : 4,3} = 2,625$$

PARTEA A DOUA

Capitolul 13

LOGICA MATEMATICĂ

13.1. LOGICA PROPOZIȚIILOR

Notăm cu litera A și uneori cu 1 valoarea unei propoziții simple adevărate și cu F sau cu 0 valoarea unei propoziții false (1 și 0, ca și A sau F , sînt aici doar semne convenționale).

Din mai multe propoziții simple p, q, r, s, t, \dots putem forma cu ajutorul operațiilor $\wedge, \vee, \neg, \Rightarrow, \Leftrightarrow$ propozițiile compuse :

$$p \wedge q, p \vee q, \bar{p}, p \Rightarrow q, p \Leftrightarrow q.$$

Din aceste propoziții aplicînd din nou operațiile : „ $\wedge, \vee, \neg, \Rightarrow, \Leftrightarrow$ ” se pot obține noi propoziții compuse ca de exemplu :

$$\overline{(p \wedge q)} \Rightarrow (p \vee q); p \Rightarrow q \vee (p \wedge q).$$

13.2. ORDINEA OPERAȚIILOR LOGICE

O propoziție compusă poate fi redusă la o formă mai simplă dacă se aplică anumite reguli convenționale referitoare la ordinea în care se efectuează anumite operații logice precum și anumite convenții de suprimare a parantezelor efective. Convenția este : Negatia leagă mai tare decît conjuncția și disjuncția, iar conjuncția leagă mai tare decît disjuncția.

Ca urmare a acestei convenții, într-o formulă logică unele paranteze pot fi suprimate, ținînd însă seamă ca ordinea termenilor să respecte convenția precedentă.

De exemplu în loc de a scrie : $((\bar{p} \Rightarrow q) \wedge r) \vee s$, vom scrie : $(\bar{p} \Rightarrow q) \wedge r \vee s$, înțelegînd că avem o disjuncție ai cărei termeni

sînt propoziția compusă $(\bar{p} \Rightarrow q) \wedge r$ și propoziția elementară s . Vom reaminti pe scurt tabelele de adevăr ale conjuncției, disjuncției, negației, implicației și echivalenței, care au fost date cu valorile A și F în prima parte a lucrării.

Disjuncția

p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Conjuncția

p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Implicația

p	q	$p \Rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Negația

p	\bar{p}
0	1
1	0

Echivalența

p	q	$p \Leftrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

13.3. IMPLICAȚIA LOGICĂ

Într-o implicație de forma $p \Rightarrow q$ (vezi partea întâi), propoziția p se numește *ipoteză* iar propoziția q se numește *concluzie* sau consecventul implicației.

Dacă implicația $p \Rightarrow q$ este adevărată atunci p se mai numește condiție suficientă pentru q , iar q se numește condiție necesară pentru p .

În matematică teoremele sînt enunțate sub forma unei implicații.

Data fiind o implicație $p \Rightarrow q$ care poate fi adevărată sau falsă putem forma și altă implicație folosind negația și schimbînd locul propozițiilor din implicație.

Să considerăm propoziția compusă :

$$(p \wedge q) \Rightarrow r$$

Să presupunem că valoarea logică a propoziției p este A , a propoziției q este F și a lui r este A .

Valoarea logică a propoziției de mai sus poate fi scrisă sub forma :

$$(A \wedge F) \Rightarrow A \text{ sau } (1 \wedge 0) \Rightarrow 1.$$

Ținând seamă de valorile logice ale conjuncției, disjuncției și implicației de mai sus, valoarea logică a propoziției compuse este 1, deoarece valoarea logică a propoziției $1 \wedge 0$ este 0, iar a propoziției $0 \Rightarrow 1$ este 1.

Se numește formulă, orice propoziție compusă formată din propozițiile inițiale simple p, q, r, s, \dots prin aplicarea de un număr finit de ori a operatorilor : $\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$ și $-$.

13.4. FORMULE IDENTIC ADEVĂRATE ȘI IDENTIC FALSE

1. Se numește identic adevărată o formulă care este adevărată oricare ar fi valorile logice ale propozițiilor componente.

O formulă identic adevărată se mai numește tautologie.

Exemplu : $x \vee \bar{x}, (x \vee y) \Rightarrow x$.

Propoziția $x \vee \bar{x}$ este adevărată oricare ar fi valoarea logică a propoziției x . Dacă valoarea logică a lui x este A atunci valoarea logică a lui \bar{x} este F și prin urmare valoarea logică a propoziției $x \vee \bar{x}$ poate fi scrisă :

$A \vee F$ și are valoarea logică A .

Dacă valoarea lui x este F , atunci valoarea lui \bar{x} este A și, prin urmare, valoarea propoziției $x \vee \bar{x}$ poate fi scrisă $F \vee A$ și are valoarea logică A .

Prin urmare valoarea logică a propoziției $x \vee \bar{x}$ este A .

2. O formulă este realizabilă dacă este adevărată pentru unele valori logice ale propozițiilor componente.

Exemple : $(\bar{x} \wedge \bar{y}) \Rightarrow z, xy \vee zy$.

3. Se numește identic falsă o formulă care este falsă oricare ar fi valorile logice ale propozițiilor componente.

Exemple : $(x \wedge \bar{x}) \vee (y \wedge \bar{y}), (\bar{x} \vee x) \Rightarrow (x \wedge \bar{x})$.

Dacă valoarea logică a propoziției x este adevărul atunci valoarea logică a propoziției \bar{x} este falsul. Prin urmare valoarea logică a propoziției $x \wedge \bar{x}$ poate fi scrisă

$$A \wedge F$$

și are valoarea logică F .

Valoarea logică a propoziției $y \wedge \bar{y}$ este falsul, F , oricare ar fi valorile logice ale propoziției y .

Fie formulele :

$$\overline{x \wedge y} \text{ și } \bar{x} \vee \bar{y}.$$

Să alcătuim tabelele lor de adevăr.

x	y	\bar{x}	\bar{y}	$x \wedge y$	$\overline{x \wedge y}$	$\bar{x} \vee \bar{y}$
1	1	0	0	1	0	0
0	0	1	1	0	1	1
0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	0	1	1

Prin urmare formulele $\overline{x \wedge y}$ și $\bar{x} \vee \bar{y}$ primesc aceleași valori de adevăr.

Observație. Într-o formulă propozițiile simple pot fi constante, adică avînd o valoare logică determinantă, sau variabile. Dacă vom atribui valori logice tuturor propozițiilor variabile, atunci formula va lua o valoare logică determinantă.

Definiție. Două formule notate S și Q , formate din propozițiile simple variabile $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$, se numesc echivalente, dacă pentru orice valori de adevăr ale lui $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$ aceste formule iau aceleași valori de adevăr. Se notează $S \Leftrightarrow Q$, se citește „formula S este echivalentă cu formula Q ”.

Formulele $x \Leftrightarrow y$ și $(x \Rightarrow y) \wedge (y \Rightarrow x)$ au aceleași valori de adevăr pentru orice valori de adevăr ale propozițiilor simple componente. Prin urmare putem scrie :

$$(x \Rightarrow y) \wedge (y \Rightarrow x) \Leftrightarrow (x \Leftrightarrow y).$$

În mod asemănător avem relațiile :

$$\overline{x \wedge y} \Leftrightarrow \bar{x} \vee \bar{y},$$

$$\overline{x \vee y} \Leftrightarrow \bar{x} \wedge \bar{y},$$

cunoscute sub denumirea de legile lui De Morgan.

Alte exemple :

- 1) $p \Leftrightarrow p$;
- 2) $(p \wedge \bar{p}) \vee y \Leftrightarrow y$;
- 3) $(p \vee \bar{p}) \wedge p \Leftrightarrow p$;
- 4) $\overline{(x \vee \bar{x})} \Leftrightarrow \bar{x} \wedge x$.

Dacă într-o formulă înlocuim o parte a ei cu o formulă echivalentă, obținem o formulă echivalentă cu cea inițială.

Exemplu :

1. Să considerăm formula :

$$S \Leftrightarrow (\overline{x \wedge \bar{y}}) \vee (\overline{\bar{x} \wedge y}) \Leftrightarrow x \vee \bar{x}.$$

$$\text{Să observăm că : } (\overline{x \wedge \bar{y}}) \Leftrightarrow \bar{x} \vee y,$$

$$(\overline{\bar{x} \wedge y}) \Leftrightarrow x \vee \bar{y}.$$

Înlocuim în formula S și obținem formula :

$$S' \Leftrightarrow (\bar{x} \vee y) \vee (x \vee \bar{y}) \Leftrightarrow \bar{x} \vee x.$$

Formulele S și S' sînt adevărate pentru orice valori de adevăr atribuite variabilelor x și y .

2. Să se arate că propozițiile $(x \wedge \bar{x}) \vee (y \wedge \bar{y})$, $(x \vee \bar{x}) \Rightarrow (x \wedge \bar{x})$ au valoarea F .

Valoarea logică a propoziției $(x \wedge \bar{x}) \vee (y \wedge \bar{y})$ poate fi scrisă

$$F \vee F.$$

Prin urmare propoziția $(x \vee \bar{x}) \wedge (y \wedge \bar{y})$ are valoarea logică F oricare ar fi valorile logice ale propozițiilor componente.

Propoziția $x \wedge \bar{x}$, așa cum s-a arătat mai sus, are valoarea logică F , oricare ar fi valoarea logică a propoziției x .

Propoziția $\bar{y} \vee y$ are valoarea logică A , oricare ar fi valoarea logică a propoziției y . Valoarea logică a propoziției $(\bar{x} \vee x) \Rightarrow (y \wedge \bar{y})$ poate fi scrisă

$$A \Rightarrow F.$$

Prin urmare valoarea logică a propoziției $(\bar{x} \vee x) \Rightarrow (y \wedge \bar{y})$ este F oricare ar fi valorile logice ale propozițiilor x și y .

13.5. TABELE DE ADEVĂR

În cele ce urmează folosim formule ce conțin numai operațiile : \wedge , \vee , pentru a alcătui tabele de adevăr ale unor propoziții mai complicate.

Tabelul de adevăr al unei propoziții arată pentru ce valori ale termenilor propoziția este adevărată sau falsă.

Exemplul 1

Să se construiască tabelele de adevăr ale propozițiilor :

$$x \Leftrightarrow y \text{ și } (x \Rightarrow y) \wedge (y \Rightarrow x).$$

Folosind tabelele de adevăr se constată că cele două propoziții au aceleași valori de adevăr :

$$(x \Rightarrow y) \wedge (y \Rightarrow x) \Leftrightarrow (\bar{x} \vee y) \wedge (\bar{y} \vee x).$$

x	y	$x \Leftrightarrow y$	x	y	\bar{x}	\bar{y}	$\bar{x} \vee y$	$\bar{y} \vee x$	$(\bar{x} \vee y) \wedge (\bar{y} \vee x)$
1	1	1	1	1	0	0	1	1	1
0	0	1	0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	0	1	1	0	1	0	0
1	0	0	1	0	0	1	0	1	0

Exemplul 2.

Să se construiască tabelele de adevăr ale propozițiilor :

1. $\overline{(x \wedge y)}$ și $\bar{x} \vee \bar{y}$

2. $\overline{(x \vee y)}$ și $\bar{x} \wedge \bar{y}$

13.6. FORME NORMALE

Operațiile logice \vee , \wedge , \Rightarrow , \Leftrightarrow , $-$, nu sînt independente. Ele pot fi exprimate una în funcție de alta, astfel încît se obțin formule care sînt exprimate numai prin semnele operațiilor \wedge , $-$ sau \vee .

Dacă o formulă conține numai operațiile \wedge , \vee , $-$ atunci, folosind regulile lui De Morgan, vom putea aduce această formulă la o formă echivalentă, astfel încît operația de negație să fie aplicată numai propozițiilor simple.

Să considerăm formula :

$$\overline{(x \wedge y)} \wedge \overline{(x \wedge y \wedge z)}.$$

Aplicînd formula lui De Morgan obținem :

$$(\bar{x} \vee \bar{y}) \wedge (\bar{x} \wedge \bar{y} \vee \bar{z}) = (\bar{x} \vee y) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z}).$$

Se numește produs elementar (respectiv sumă elementară) o formulă care conține operația „ \wedge ” (respectiv „ \vee ”) între variabilele simple și negațiile lor.

Exemple :

$$1. \bar{p} \wedge q \wedge r \wedge \bar{s};$$

$$2. \bar{q} \vee q \vee \bar{r} \vee s.$$

Un produs elementar care conține cel puțin o pereche de factori dintre care unul este negația celuilalt reprezintă o contradicție.

Definiție. Se numește formă normală conjunctivă a unei formule date, o formulă echivalentă cu ea, care este un produs de sume elementare.

Se numește formă normală disjunctivă a unei formule date, o formulă echivalentă cu ea și care este o sumă de produse elementare.

Aducerea unei expresii la formă normală se numește normalizare.

Exemplu :

Să se găsească forma normală disjunctivă a formulei :

$$(x \wedge y) \vee (y \Rightarrow x).$$

Se elimină mai întâi semnul \Rightarrow folosind echivalența :

$$(y \Rightarrow x) \Leftrightarrow (\bar{y} \vee x).$$

Obținem :

$$(x \wedge y) \vee (y \Rightarrow x) \Leftrightarrow (x \wedge y) \vee (\bar{y} \vee x) \Leftrightarrow (x \wedge y) \vee \bar{y} \vee x.$$

Pe baza relației : $(x \wedge y) \vee x \Leftrightarrow x$, putem scrie :

$(x \wedge y) \vee (y \Rightarrow x) \Leftrightarrow x \vee \bar{y}$, care este o formă normală disjunctivă.

13.7. PRINCIPII LOGICE

Algebra propozițiilor este legată de regulile care guvernează actele gândirii umane.

Data fiind o implicație $P \Rightarrow Q$ care poate fi adevărată sau falsă, putem forma următoarele implicații derivate, de asemeni adevărate sau false, schimbând între ele propozițiile componente și folosind negația : $Q \Rightarrow P$, $\bar{P} \Rightarrow \bar{Q}$ și $\bar{Q} \Rightarrow \bar{P}$.

Implicația $Q \Rightarrow P$ se numește reciproca implicației $P \Rightarrow Q$, implicația $\bar{Q} \Rightarrow \bar{P}$, se numește contrapозиția implicației $P \Rightarrow Q$.

Observăm că este posibil ca implicația inițială să fie adevărată, dar reciproca ei să fie falsă. Avem însă următorul rezultat important, folosit adesea în matematică.

13.7.1. LEGEA CONTRAPOZIȚIEI

Orice implicație are aceeași valoare logică ca și contrapозиția ei.

Datorită acestui fapt este permis ca, pentru demonstrarea unei teoreme date sub forma unei implicații, să demonstrăm contrapозиția implicației.

13.7.2. TAUTOLOGII

Unele propoziții compuse sînt adevărate oricare ar fi valorile logice ale componentelor lor. De exemplu: $p \vee \bar{p}$, $\overline{p \wedge \bar{p}}$, $\bar{p} \vee (p \vee q)$ etc. Astfel de propoziții compuse se numesc tautologii.

13.7.3. CONSECINȚE LOGICE

Principala problemă a logicii este stabilirea metodelor corecte de demonstrare, adică de obținere a unor propoziții adevărate din alte propoziții, despre care știm că sînt adevărate sau admitem că sînt adevărate.

Fiind date propozițiile compuse A_1, A_2, \dots, A_n , care depind de propozițiile simple P_1, P_2, \dots, P_m , spunem că propoziția compusă B , care depinde și ea de propozițiile simple P_1, P_2, \dots, P_m , este consecința logică a propozițiilor A_1, A_2, \dots, A_n , dacă, pentru orice sistem de valori logice atribuite propozițiilor P_1, \dots, P_m , pentru care propozițiile A_1, A_2, \dots, A_n să fie toate adevărate, propoziția B este adevărată. În această situație, propozițiile A_1, A_2, \dots, A_n se numesc premise și la un loc ele formează ipoteza, propoziția B se numește concluzie. Se numește raționament operația prin care o anumită concluzie B se constată a fi consecința logică a unor premise date, A_1, A_2, \dots, A_n sau utilizarea unei astfel de constatări.

Faptul că B este consecință logică a propozițiilor compuse A_1, A_2, \dots, A_n , se notează :

$$A_1, A_2, \dots, A_n \models B.$$

13.7.4. MODUS PONENS

Este un mod de raționament corect, bazat pe următoarea consecință logică :

$$P \Rightarrow Q, \quad P \models Q,$$

și se poate enunța astfel : dacă P implică Q și dacă P este adevărată, atunci Q este adevărată.

13.7.5. MODUS TOLLENS

Este un mod de raționament corect bazat pe următoarea consecință logică :

$$P \Rightarrow Q, \quad \bar{Q} \models \bar{P}$$

și se poate enunța astfel : dacă P implică Q și dacă Q nu este adevărată, atunci P nu este adevărată.

13.7.6. ECHIVALENȚA LOGICĂ

Două propoziții compuse A și B , care depind de propoziții simple P_1, P_2, \dots, P_n , sînt logic echivalente dacă, pentru orice atribuire de valori logice propozițiilor simple P_1, P_2, \dots, P_n , propozițiile A și B au aceeași valoare logică (adică sînt ambele adevărate sau ambele false). Scriem : $A \Leftrightarrow B$.

Propozițiile compuse $(\bar{P} \vee \bar{Q})$ și $\bar{P} \wedge \bar{Q}$ sînt echivalente, adică :

$$(\bar{P} \vee \bar{Q}) \Leftrightarrow \bar{P} \wedge \bar{Q}.$$

Propozițiile compuse $(\bar{P} \wedge \bar{Q})$ și $\bar{P} \vee \bar{Q}$ sînt și ele echivalente, $\bar{P} \wedge \bar{Q} \Leftrightarrow \bar{P} \vee \bar{Q}$. Aceste două echivalențe poartă numele lui De Morgan (matematician englez, 1806—1873). Se poate arăta cu ajutorul tabelelor de valori logice, că echivalențele de mai sus au loc întradevăr.

13.7.7. DEMONSTRAȚIA PRIN ABSURD

Implică și principiul „tertium non datur” după care o propoziție este sau adevărată sau falsă. O altă situație nu este luată în considerare.

De multe ori, în matematică mai ales, se demonstrează adevărul unei propoziții P arătând că dacă ea nu este adevărată, adică dacă \bar{P} este adevărată, se obține o contradicție, adică o propoziție R , despre care se arată că atât ea, cât și negația ei \bar{R} , sînt ambele adevărate. De aici se trage concluzia că P este adevărată. Acest mod corect de raționament se obține combinind observația că formula :

$$(\bar{P} \Rightarrow (R \wedge \bar{R})) \Rightarrow P,$$

este o tautologie cu modus ponens; îndată ce am reușit să demonstrăm că propoziția $\bar{P} \Rightarrow (R \wedge \bar{R})$ este adevărată, modus ponens ne arată că P este adevărată.

Conjuncția și disjuncția a două propoziții corespund legăturilor logice ale operațiilor exprimate prin „sau” și „și”, iar operația de negare a unei propoziții, negației logice.

13.8. LOGICA PREDICATELOR

13.8.1. GENERALITĂȚI

Să considerăm următorul raționament :

„Toți oamenii sînt muritori”,

„Marin este om”

„Marin este muritor”

Să notăm prima propoziție cu p , a doua cu q și a treia cu s .

Dacă am încerca să găsim o formulă corespunzătoare pentru acest raționament, atunci vom scrie :

$$(p \wedge q) \Rightarrow s \quad (1)$$

Corectitudinea raționamentului de mai sus nu depinde însă numai de înlănțuirea logică a propozițiilor date, ci și de structura lor logică internă. De aceea formula (1) nu este satisfăcătoare pentru a descrie raționamentul de mai sus. Să analizăm structura logică a propozițiilor date.

Propoziția p „Toți oamenii sînt muritori”, se compune din următoarele părți :

- 1) Subiectul „oameni”;
- 2) Cuvîntul „muritori”;
- 3) Cantitatea „toți”;
- 4) Verbul „sînt”.

Structura acestei judecăți poate fi redată schematic astfel :

$$T \cdot S \rightarrow P.$$

T — este prescurtarea cuvîntului *toți*;

S — este prescurtarea cuvîntului *subiect*;

\rightarrow (săgeata) — este prescurtarea verbului *sînt*;

P — este prescurtarea cuvîntului *muritori*.

În propoziția „oamenii sînt muritori”, noțiunea *om* este subiect, iar noțiunea *muritori* este predicat logic. În acest caz avem o proprietate *muritori* care este afirmația despre ceva. Vom spune că proprietatea este desemnată de un predicat logic, iar cea despre care este afirmată proprietatea respectivă se numește subiect logic.

Dacă notăm subiectele cu literele x, y, z, \dots și însușirile cu P, Q, R, \dots , atunci atribuirea unei însușiri P obiectului sau individului x , va fi notată $P(x)$. În exemplul nostru predicatul P este *muritor* iar x , subiectul logic, este *om*. Vom spune că $P(x)$ este o funcție de o variabilă individuală, x .

Prin urmare cu $P(x)$ se notează o funcție logică despre subiectul x . Valoarea de adevăr a acestei funcții depinde în mod evident de valoarea concretă a subiectului.

Funcția logică $P(x)$ ia numai două valori de adevăr: adevărul, notat cu A , și falsul, notat cu F .

Dar, spre deosebire de algebra propozițională, vom considera aici că valorile A și F sînt puse în corespondență cu anumite obiecte.

Să considerăm funcția :

„ x este un număr prim” pe care-o putem desemna simbolic $P(x)$.

$P(x)$ reprezintă F dacă este pus în corespondență cu numărul 6.

$P(x)$ reprezintă A dacă este pus în corespondență cu numărul 3.

Să considerăm funcția :

$f(x, y)$: „ x este multiplu al numărului y ”.

Valoarea de adevăr a acestei propoziții o putem stabili numai după ce cunoaștem ce numere sînt x și y .

Dacă x este numărul 6, iar y numărul 3, atunci $f(6, 3)$: „6 este multiplu al numărului 3”, este o propoziție determinată care are valoarea A .

Fie M o mulțime arbitrară nevidă, iar x un anumit obiect din această mulțime.

Expresia $P(x)$ este o funcție logică care devine o propoziție determinată atunci cînd x se înlocuiește cu un element din M .

Un predicat logic $P(x)$ este o funcție logică definită pe o mulțime dată M , care ia valori în domeniul valorilor de adevăr (adevărul A sau falsul F).

Exemple de predicate :

$$(3x + 5y = 3) \wedge (9x + 15y = 9),$$

$$(2x + 3y = 5) \wedge (6x - y = 5),$$

$$(2x + 4y = 1) \wedge (4x + 2y = 6).$$

13.8.2. CUANTIFICATORII „ORICARE” ȘI „EXISTĂ”

Din explicațiile precedente rezultă că este uneori o necesitate logică să arătăm că *există* valori dintr-o mulțime M dată pentru care o anume propoziție este adevărată sau, eventual, că pentru *orice* valori din M propoziția este adevărată. Pentru prima situație folosim semnul \exists , pentru a doua semnul \forall .

1. Să considerăm predicatul :

$F(x)$: „ x este un număr real pozitiv”, definit pe mulțimea $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Avem : $F(1)$ este adevărată, $F(2)$ este adevărată, $F(3)$ este adevărată. Cu alte cuvinte conjuncția : $F(1) \wedge F(2) \wedge F(3) \wedge F(4) \wedge F(5) \dots$ este adevărată.

Formula aceasta devine foarte dificil de transcris dacă x primește o mulțime mare de valori. Pentru a evita aceasta vom scrie : $\forall x, F(x)$ și se citește „oricare ar fi (pentru toți) $x, F(x)$ ”, care arată faptul că $F(x)$ este întotdeauna adevărată oricare ar fi x , aparținând unei mulțimi.

2. Să considerăm predicatul :

$F(x)$: „ x este un număr prim”, definit pe mulțimea :

$$M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 13\}.$$

Dacă înlocuim pe x pe rând cu elementele lui M , putem obține o propoziție determinată care poate fi adevărată sau falsă.

Aceasta înseamnă că cel puțin una din propozițiile :

$F(1), F(2), F(3), F(4), \dots, F(13)$ este adevărată și prin urmare propoziția :

$$F(1) \vee F(2) \vee F(3) \vee \dots \vee F(13) \text{ este adevărată.}$$

Pentru a simplifica această scriere se folosește relația :
 $\exists x, F(x)$ și se citește „există un $x \in M$ pentru care $F(x)$ este adevărată”.

3. Prin aplicarea consecutivă a operațiilor \exists și \forall se pot obține propoziții adevărate sau false.

Exemple:

a. Să considerăm predicatul $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$; $x, y \in R$.
 $\forall x, \forall y, (x + y)^2 = (x^2 + 2xy + y^2)$.

Pentru orice x și pentru orice y , $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$.
 Această propoziție este adevărată.

b. $\forall a, \exists x, x + a = 5$, este o propoziție adevărată dacă domeniul, de definiție al predicatului $x + a = 5$ este mulțimea numerelor reale.

a) *Definiție.* Fie $f(x)$ un predicat care ia valoarea A sau F pentru fiecare element x al unei mulțimi M .

Expresia $\forall x, f(x)$ este o propoziție adevărată atunci când $f(x)$ este adevărat pentru orice element $x \in M$ și falsă în caz contrar. Simbolul $\forall x$ se numește *cuantificator universal*.

b) *Definiție.* Fie $f(x)$ un predicat care ia valoarea A sau F pentru fiecare element x al unei mulțimi M .

Dacă expresia $\exists x, f(x)$ este o propoziție adevărată, simbolul $\exists x$ se numește *cuantificator existențial*.

Cuantificatorii \forall, \exists se numesc duali.

Cuantificatorii definiți în acest paragraf se referă la elementele unei mulțimi determinate M .

Vom spune că în formulele $\forall x, f(x)$ și $\exists x, f(x)$ variabila x este legată prin cuantificatorul respectiv.

Se numește variabilă liberă, o variabilă individuală care nu este legată prin nici un cuantificator.

Logica predicatelor include atât propozițiile elementare, considerate ca luând două valori de adevăr, operațiile din calculul propozițional, dar și raportarea propozițiilor la obiecte.

13.8.3. NOȚIUNEA DE FORMULĂ ÎN LOGICA PREDICATELOR

Să introducem următoarele specificații :

1) x, y, z, \dots desemnează elementele nedeterminate ale unei mulțimi variabile individuale.

2) a, b, c, \dots desemnează elementele determinate ale mulțimii și se numesc constante individuale.

3) A, B, C, \dots sînt propoziții variabile care iau două valori logice (A sau F).

4) $F(x), G(x), \dots$ desemnează predicate, adică funcții.

Se numesc propoziții elementare, propozițiile variabile, constante, precum și expresiile $F(a), G(b), \dots$ unde F și G sînt predicate, iar a și b obiecte individuale.

Se numesc formule elementare variabilele care iau două valori A și F și predicatele de obiecte izolate cît și variabilele individuale.

Două sau mai multe predicate pot fi legate între ele prin semnele operațiilor logice $\vee, \wedge, \Rightarrow$.

Exemple

Dacă considerăm predicatele $A(x), F(x), B(x, y), G(x, y)$, atunci, aplicînd operațiile $\wedge, \vee, \Rightarrow, -$, se pot obține noi predicate:

$$A(x) \vee F(x), B(x, y) \Rightarrow G(x, y).$$

Se demonstrează că toate echivalențele care au loc în logica propozițiilor se transferă și în logica predicatelor.

Exemple:

Dacă $S(x)$ și $G(x)$ sînt predicate, atunci:

$$(S(x) \Rightarrow G(x)) \Leftrightarrow (\overline{S(x)} \vee G(x)).$$

Dacă $A(x)$ și $B(y)$ sînt două predicate, atunci avem echivalența:

$$\exists x(A(x) \Rightarrow B(x)) \Leftrightarrow \exists x(\overline{A(x)} \vee B(x)).$$

Se citește: Propoziția „există x pentru care $A(x)$ implică pe $B(x)$ ” este echivalentă cu propoziția „există x pentru care avem non $A(x)$ sau $B(x)$ ”.

13.8.4. NEGAȚIA CUANTIFICATORILOR EXISTENȚIALI ȘI UNIVERSALI

Să considerăm propoziția:

„ $\forall x, S(x)$ este falsă”, care este echivalentă [cu propoziția „ $\exists y, S(y)$ este falsă”]

Propoziția „ $\forall x, S(x)$ este falsă” este echivalentă cu propoziția

„există un element y pentru care $S(y)$ este falsă“ ceea ce este echivalent cu propoziția „există un element y pentru care $\overline{S(y)}$ este adevărată“. Prin urmare, putem scrie echivalențele :

$$\overline{\forall x, S(x)} \Leftrightarrow \exists y, \overline{S(y)}$$

$$\overline{\exists x, S(x)} \Leftrightarrow \forall y, \overline{S(y)}$$

Semnul negației poate fi introdus sub semnul cuantificatorului înlocuindu-l pe acesta cu dualul său.

Exemple :

Să se aducă la forma normală formula :

$$\overline{\forall x, S(x) \Rightarrow \forall y, Q(y)}.$$

Vom elimina la început semnul implicației și vom obține :

$$\overline{\forall x, S(x) \vee \forall y, Q(y)} \Leftrightarrow \overline{\forall x, S(x)} \wedge \overline{\forall y, Q(y)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \exists x, \overline{S(x)} \wedge \exists y, \overline{Q(y)} \Leftrightarrow \exists x, S(x) \wedge \exists y, Q(y).$$

13.8.5. SCHEME CU CONTACTE ȘI SEMNIFICAȚIA LOR LOGICĂ

Un contact electric poate avea două stări : închis sau deschis (fig. 13.1).

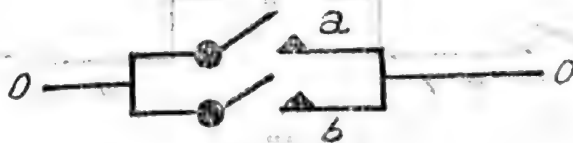


Fig. 13.1

Vom face să corespundă acestor două stări două valori : 1 (adevărul), dacă contactul este închis, și 0 (falsul), dacă contactul este deschis.

Se numește sumă a două contacte, $a + b$, circuitul care se obține prin legarea în paralel a celor două contacte a și b (fig. 13.2).

Fig. 13.2



Se numește produsul a două contacte $a \cdot b$ circuitul ce se obține prin legarea în serie a celor două contacte (fig. 13.3).

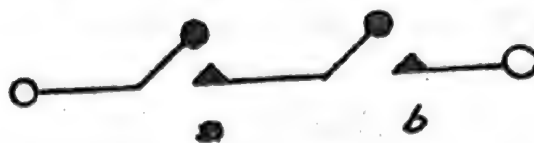


Fig. 13.3

Se verifică ușor următoarele relațiile din figura 13.4 :

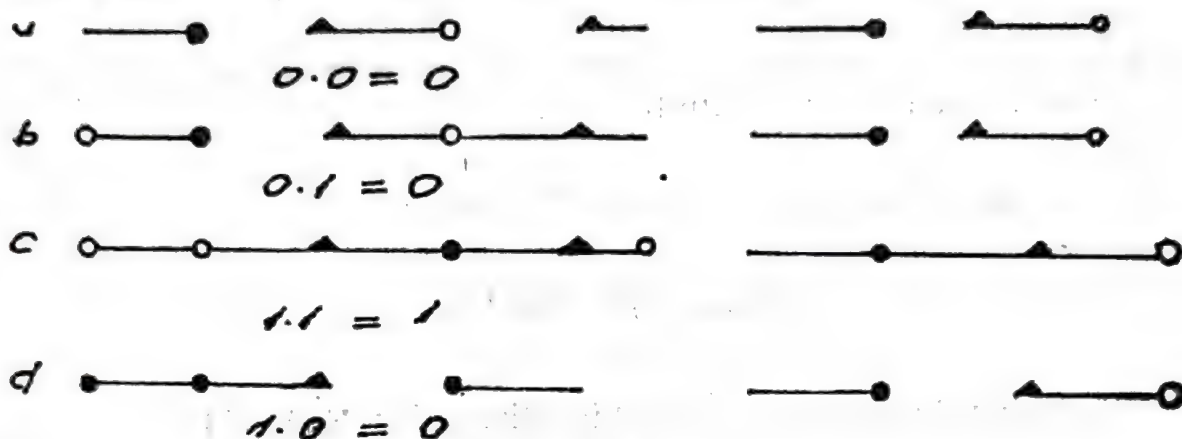


Fig. 13.4

a — un contact deschis, legat în serie cu un contact deschis este echivalent cu un contact deschis ;

b — un contact deschis, legat în serie cu un contact închis, este echivalent cu un contact deschis ;

c — un contact închis, legat în serie cu contact închis, este echivalent cu un contact închis ;

d — un contact închis, legat în serie cu un contact deschis, este echivalent cu un contact deschis.

Folosind același procedeu se verifică și relațiile (fig. 13.5) :

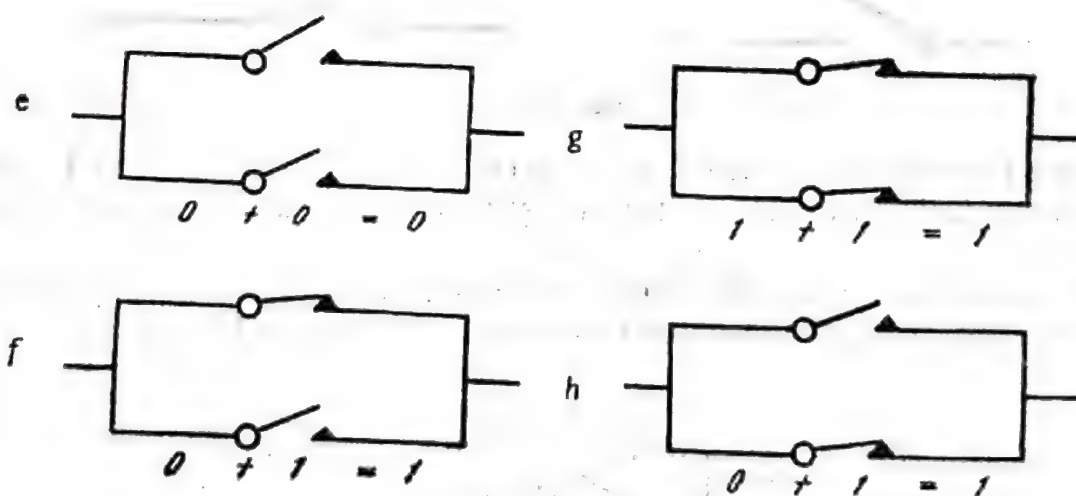


Fig. 13.5

e — un contact deschis legat în paralel cu un contact deschis este echivalent cu un contact deschis;

$f - h$ — un contact închis, legat în paralel cu un contact deschis, este echivalent cu un contact închis;

i — un contact închis legat în paralel cu un contact închis este echivalent cu un contact închis.

Există o corespondență strinsă între algebra contactelor și algebra propozițiilor logice.

Schema cu contacte în serie poate fi reprezentată prin conjuncția logică, iar schema cu contacte în paralel prin disjuncție.

Corespondența dintre algebra propozițiilor și algebra contactelor ne permite să modelăm propoziții compuse cu ajutorul circuitelor, făcând să corespundă unei propoziții un contact, disjuncției a două propoziții $p \vee q$ suma contactelor p și q , conjuncției a două propoziții produsul contactelor p și q , iar negației unei propoziții p contactul, notat \bar{p} , care este închis când p este deschis și deschis când p este închis.

Exemplu

Să se alcătuiască o schemă cu contacte care să modeleze propoziția compusă $p \wedge (q \vee s)$.

Soluție :

Să notăm cu p' , q' , s' , contactele corespunzătoare acestor propoziții și vom avea : $p' (q' + s')$. Contactul p' este legat în serie cu suma contactelor q' și s' . Contactele q' și s' sînt legate în paralel (fig. 13.6).



Fig. 13.6

În cele ce urmează vom nota propozițiile și contactele corespunzătoare prin aceleași litere.

13.8.6. EXERCITII REZOLVATE

1. Să se simplifice circuitul din figura 13.7.

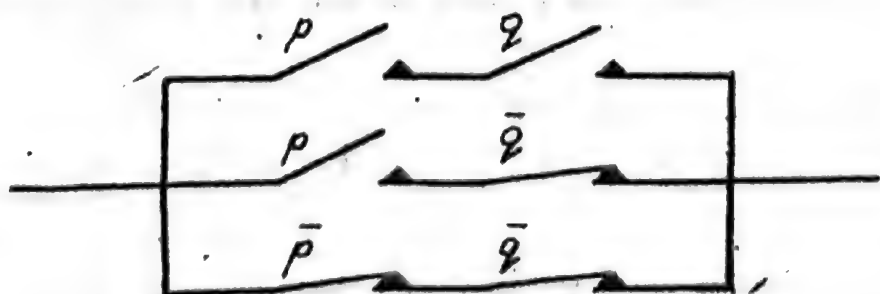


Fig 13.7

Soluție :

Formula realizată la ieșire este :

$$x = (p \wedge q) \vee (p \wedge \bar{q}) \vee (\bar{p} \wedge \bar{q}).$$

Aplicăm proprietatea de distributivitate a conjuncției față de disjuncție și obținem :

$$x = p \wedge (q \vee \bar{p}) \vee (\bar{p} \wedge \bar{q}),$$

$$x = (p \wedge q) \vee (\bar{p} \wedge \bar{q}) = p \vee (\bar{p} \wedge \bar{q}),$$

$$x = (p \vee \bar{p}) \wedge (p \vee \bar{q}) = p \wedge \bar{q}.$$

2. Se consideră operația logică, notată \oplus , dată prin formula :

$$p \oplus q = (\bar{p} \wedge q) \vee (p \wedge \bar{q}).$$

Să se demonstreze relația :

$$\overline{p \oplus q} = \bar{p} \oplus q = p \oplus \bar{q}.$$

Soluție :

$$\begin{aligned} p' &= \overline{p \oplus q} = \overline{(\bar{p} \wedge q) \vee (p \wedge \bar{q})} = (\overline{\bar{p} \wedge q}) \wedge (\overline{p \wedge \bar{q}}) = \\ &= (p \vee \bar{q}) \wedge (\bar{p} \vee q) = [(p \vee \bar{q}) \wedge \bar{p}] \vee [(p \vee \bar{q}) \wedge q] = \\ &= (\bar{p} \wedge \bar{q}) \vee (p \wedge q). \end{aligned} \quad (1)$$

$$p'' = \bar{p} \oplus q = (\bar{p} \wedge q) \vee (\bar{\bar{p}} \wedge \bar{q}). \quad (2)$$

$$p''' = p \oplus \bar{q} = (\bar{p} \wedge \bar{q}) \vee (p \wedge q). \quad (3)$$

Din compararea relațiilor (1), (2) și (3), obținem :

$$p \oplus q = \bar{p} \oplus q = p \oplus \bar{q}.$$

13.8.7. EXERCITII ȘI PROBLEME

1. Să se verifice, folosind tabele de adevăr, următoarele echivalențe :

$$p \vee q \Leftrightarrow q \vee p, \quad p \wedge q = q \Leftrightarrow p \quad (\text{comutativitate}),$$

$$p \vee (q \vee r) \Leftrightarrow (p \vee q) \vee r, \quad p \wedge (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \wedge r$$

(asociativitate),

$$p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \quad (\text{distributivitate}),$$

$$p \vee p \Leftrightarrow p, \quad p \wedge p \Leftrightarrow p,$$

$$p \wedge A \Leftrightarrow p, \quad p \wedge F \Leftrightarrow F,$$

$$p \vee A \Leftrightarrow A, \quad p \vee F \Leftrightarrow p.$$

2. Să se arate că următoarele formule sînt tautologii :

$$a) (p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (q \Leftrightarrow p)$$

$$b) (p \Leftrightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow q)$$

$$c) \overline{(p \wedge \bar{p})}$$

$$d) p \Rightarrow (p \Rightarrow q)$$

$$e) (p \Rightarrow q) \vee (q \Rightarrow p)$$

3. Să se arate folosind operațiile logice că următoarele formule sînt tautologii :

$$\overline{\bar{p} \vee \bar{q}} \Leftrightarrow p \wedge q,$$

$$\overline{p \wedge q \vee r} \Leftrightarrow (\bar{p} \vee \bar{q}) \wedge \bar{r}.$$

4. Să se găsească forma normală a formulelor :

$$\overline{(x \wedge (y \wedge \bar{z}))} \Rightarrow \overline{(\bar{y} \wedge z)},$$

$$((\bar{x} \Rightarrow y) \Rightarrow \bar{z}) \Rightarrow \overline{(\bar{x} \wedge y)},$$

$$(x \Leftrightarrow y) \wedge (y \Leftrightarrow z).$$

5. Se consideră propozițiile următoare:

p : Elevul A este bun la matematică;

\bar{q} : Elevul A cîntă în corul școlii.

Să se formuleze propozițiile următoare :

$$p \vee q, p \wedge q, \overline{p \vee q}, \overline{p \wedge q}.$$

6. Să se stabilească valoarea de adevăr a propozițiilor :

$$p \vee 1, q \vee 1, 0 \Rightarrow p.$$

7. Să se determine valoarea de adevăr a fiecăreia din propozițiile :

$$1 \wedge 1 \wedge 1 \Rightarrow 1,$$

$$1 \vee 1 \vee 0 \Rightarrow 1,$$

$$((1 \wedge 0) \vee (0 \Rightarrow 1)) \Leftrightarrow ((1 \vee 0) \Rightarrow (1 \wedge 0)),$$

$$((1 \Rightarrow 0) \Rightarrow 1 \Rightarrow 1) \Rightarrow 0,$$

$$(((1 \vee 0) \wedge 0) \Rightarrow 1) \vee 0.$$

$$((1 \Rightarrow 0) \Rightarrow 1) \Rightarrow (1 \Rightarrow 0),$$

$$(0 \wedge 0) \Rightarrow 1,$$

$$(1 \Rightarrow (0 \wedge 1)) \Leftrightarrow (1 \vee 0).$$

$$((1 \wedge 1) \vee 0) \vee 1 \vee 0.$$

8. Se consideră predicatele :

$S(x)$: x este un pătrat perfect ;

$P(x)$: x este un număr par ;

definite pe mulțimea $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Să se afle mulțimea valorilor variabilelor pentru care următoarele formule sînt adevărate :

$$S(x) \vee P(x) \quad S(x) \Rightarrow P(x),$$

$$S(x) \wedge P(x) \quad S(x) \Leftrightarrow P(x).$$

9. Se consideră următoarele predicate :

$S(x)$: x este un pioner ;

$P(x)$: x cîntă în corul școlii ;

$Q(x)$: x locuiește în București ;

în care toate variabilele se referă la mulțimea elevilor unei clase.

Să se scrie expresiile simbolice pentru următoarele propoziții :

Elevul x locuiește în București și este pionier.

Elevul x locuiește în București și cîntă în corul școlii.

Elevul x nu este pionier și nu cîntă în corul școlii.

Elevul x este pionier și nu locuiește în București.

10. Se consideră predicatul :

$S(x)$: $2x + 3 < 18$, definit pe mulțimea $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Să se stabilească valoarea de adevăr a propoziției : $\forall x, S(x)$.

11. Se dă mulțimea $M = \{1, 2, 3, 4\}$ și predicatele :

$$S(x, y) : (x + y = 3)$$

$$(x, y) \in M \times M$$

$$P(x, y) : (3x + y = 5)$$

Să se stabilească valoarea de adevăr a propoziției :

$$a) \forall x, \forall y, S(x, y); \quad b) \exists x, \exists y \quad x + y = 3;$$

$$c) (\forall x, y, S(x, y)) \wedge (\forall x, y, P(x, y)).$$

12. Dacă în exercițiul care urmează variabilele au valori în mulțimea numerelor reale, să se stabilească valorile de adevăr ale propozițiilor :

$$a) \forall x, \forall y \quad (x + y = y + x);$$

$$b) \exists x, \forall y \quad (x - y = 5);$$

$$c) \exists x, \forall y \quad (x^2 - 3xy = 4);$$

$$d) \forall x, \forall y \quad (x + y = 4 \Rightarrow (5 < 6)).$$

13. Să se aducă la forma normală formulele :

$$(\exists x, S(x) \Rightarrow \forall x, P(x) \Rightarrow (\forall x, S(x) \vee \forall x, P(x))),$$

$$(\forall x, S(x) \wedge \forall x, P(x)) \Rightarrow (\forall x, P(x)).$$

14. Să se stabilească valorile de adevăr ale propozițiilor :

$$a) \exists a, \exists b, \exists c, \forall x, (ax^2 + bx + c = 0),$$

$$b) \forall a, \exists b, \exists x, (x^2 + ax + b = 0).$$

15. Se consideră formula :

$$((\exists x, S(x) \Rightarrow \forall x, P(x)) \vee ((\exists x, P(x)) \Rightarrow (\forall x, S(x)))).$$

Să se găsească o formulă echivalentă care să nu conțină semnul implicației logice.

16. În exercițiul care urmează variabilele au valori în mulțimea numerelor reale și se consideră predicatele :

$$S(x, y) : 2x + y = 8,$$

$$P(x, y) : 3x - y = 7.$$

Să se scrie sub formă simbolică sistemul :

$$\begin{cases} 2x + y = 8 \\ 3x - y = 7. \end{cases}$$

17. Se consideră predicatele :

$$S(x, y) : 4x^2 - y^2 = 0,$$

$$Q(x, y) : 2x + y = 0,$$

$$R(x, y) : 2x - y = 0.$$

Să se stabilească valoarea de adevăr a formulelor :

$$a) S(x, y) \Leftrightarrow Q(x, y) \vee R(x, y),$$

$$b) S(x, y) \Rightarrow Q(x, y) \vee R(x, y),$$

$$c) S(x, y) \Leftrightarrow Q(x, y) \wedge R(x, y).$$

18. Se consideră predicatele :

$$P(x, y) : (x^2 - y^2 = 0),$$

$$S(x, y) : (x + y = 0),$$

$$Q(x, y) : (x - y = 0).$$

Să se exprime sub formă simbolică, cu ajutorul disjuncției, legătura dintre predicatele $P(x, y)$, $S(x, y)$, $Q(x, y)$.

19. Se consideră predicatele :

$$S(x, y) : (x^2 - y^2 = 0).$$

$$Q(x, y) : (5x + y = 0),$$

$$R(x, y) : (x - y = 0)$$

$$P(x, y) : (x + y = 0).$$

Să se exprime simbolic cu ajutorul operațiilor logice \wedge , \vee sistemul de ecuații :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ 5x + y = 0. \end{cases}$$

20. În exercițiul precedent, folosind distributivitatea conjuncției logice față de disjuncție, să se demonstreze echivalența sistemelor :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ 5x + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ 5x + y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x - y = 0 \\ 5x + y = 0. \end{cases}$$

21. Să se alcătuiască schemele logice cu contacte pentru verificarea următoarelor propoziții compuse :

$$(p \wedge q) \vee r, \quad (p \wedge q) \wedge r, \quad (p \vee q) \vee r.$$

22. Să se alcătuiască schemele cu contacte pentru verificarea echivalențelor :

$$\begin{aligned} p \wedge \bar{p} &\Leftrightarrow 0, & \bar{p} \vee p &\Leftrightarrow 1, \\ p \wedge p &\Leftrightarrow p; & p \vee p &\Leftrightarrow p; \\ (p \wedge q) \wedge s &\Leftrightarrow p \wedge (q \wedge s); \\ (p \vee q) \vee s &\Leftrightarrow p \vee (q \vee s); \\ p \wedge (q \vee s) &= (p \wedge q) \vee (p \wedge s). \end{aligned}$$

23. Să se alcătuiască schemele pentru verificarea următoarelor echivalențe logice :

$$\begin{aligned} \overline{(p \wedge q)} &\Leftrightarrow \bar{p} \vee \bar{q}, \\ \overline{(p \vee q)} &\Leftrightarrow \bar{p} \wedge \bar{q}. \end{aligned}$$

24. Să se alcătuiască schema a formulei :

$$(p \vee q) \wedge (c \vee d)$$

25. Să se arate ce formulă logică corespunde schemei desenate în figura 13.8.

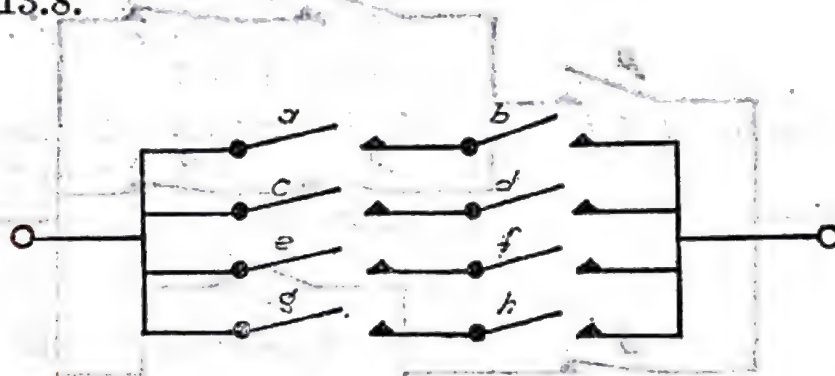


Fig. 13.8

26. Să se arate ce formulă logică corespunde schemei desenate în figura 13.9.

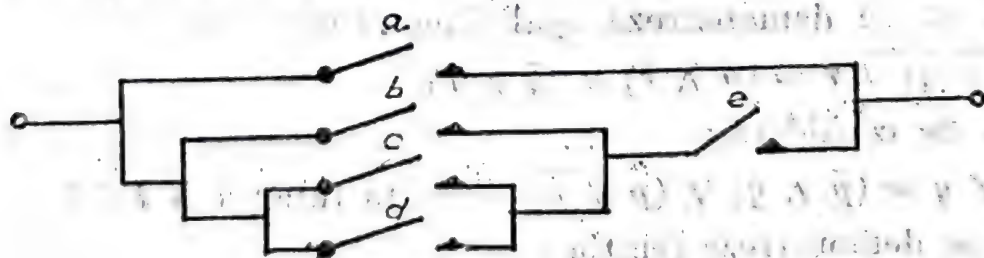


Fig. 13.9

27. Să se scrie formula logică care corespunde schemei din figura 13.10.

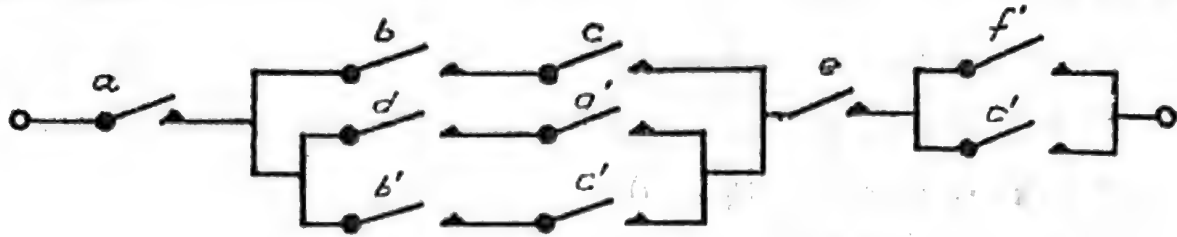


Fig. 13.10

28. Să se demonstreze echivalența :

$$(x \vee y) \wedge (\bar{x} \vee z) \Leftrightarrow (x \wedge z) \vee (x \wedge y) \vee (\bar{x} \wedge y).$$

Să se alcătuiască apoi o schemă cu contacte care corespunde acestei formule.

29. Să se alcătuiască o schemă cu contacte care corespunde propozițiilor compuse :

$$(p \vee q) \wedge (r \vee s), (p \wedge q \wedge r) \vee (\bar{p} \wedge q) \vee (\bar{q} \wedge r),$$

$$(\bar{p} \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \bar{q} \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \bar{r}),$$

30. Să se simplifice circuitul din figura 13.11.

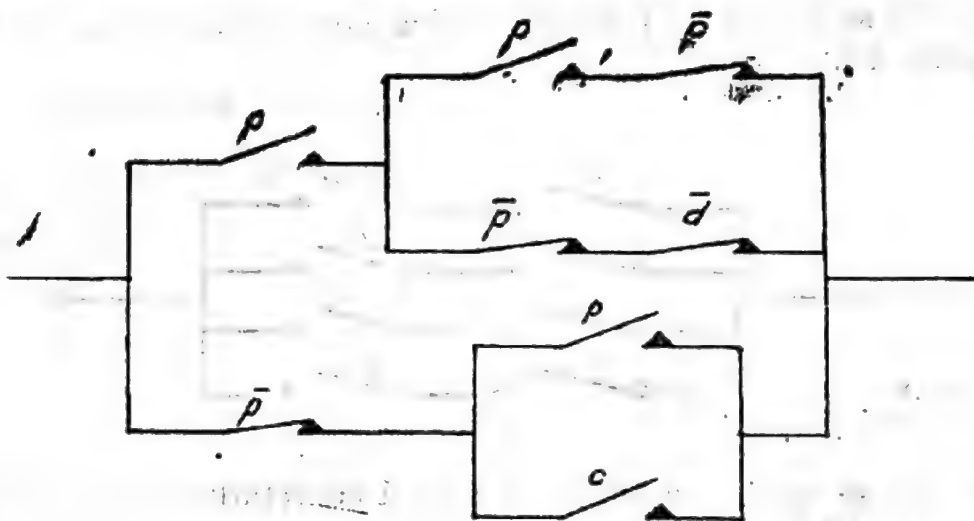


Fig. 13.11

31. Să se simplifice formula : $x = (p \wedge q) \vee (\bar{p} \wedge q) \vee (p \wedge \bar{q})$.

32. Să se demonstreze egalitatea :

$$\overline{(p \wedge q) \vee r} = (\bar{p} \wedge \bar{r}) \vee (\bar{q} \wedge \bar{r}).$$

33. Se consideră :

$$p \swarrow q = (\bar{p} \wedge \bar{q}) \vee \overline{(p \vee q)}, \text{ numită funcția } N I C I.$$

Să se demonstreze relația :

$$p \vee q = (p \swarrow q) \swarrow (p \swarrow q).$$

34. Se consideră funcția :

$$p \swarrow q = (\bar{p} \wedge \bar{q}) \vee (\overline{p \vee q}).$$

Să se alcătuiască tabela de adevăr.

35. Se consideră funcția :

$$p \swarrow q = (\bar{p} \wedge \bar{q}) \vee (\overline{p \vee q}).$$

Să se demonstreze relațiile :

$$0 \swarrow 0 = 1,$$

$$0 \swarrow 1 = 0,$$

$$1 \swarrow 0 = 0,$$

$$1 \swarrow 1 = 1.$$

36. Se consideră funcția :

$$p \swarrow q = (\bar{p} \wedge \bar{q}) \vee (\overline{p \vee q}).$$

Să se demonstreze relațiile :

$$p \swarrow 0 = \bar{p},$$

$$p \swarrow 1 = 0,$$

$$p \swarrow p = \bar{p},$$

$$p \swarrow p = 0.$$

37. Se consideră propoziția logică N A N D, notată p/q , dată de relația $p/q = \bar{p} \vee \bar{q}$.

Să se alcătuiască tabela de adevăr.

38. Se dă funcția : $p/q = \bar{p} \vee \bar{q}$.

Să se demonstreze relația :

$$p/q = (\bar{p} \wedge \bar{q}) \vee (\bar{p} \wedge q) \vee (p \vee \bar{q}).$$

39. Să se realizeze un circuit pentru funcția

$$p/q = \bar{p} \vee \bar{q}.$$

40. Să se realizeze un circuit pentru funcția :

$$p \swarrow q = (\bar{p} \wedge \bar{q}) \vee (\overline{p \wedge q}).$$

41. Să se realizeze formula :

$$x = (p \vee q) \wedge (r \vee s), \text{ în circuite N A N D.}$$

$$\begin{aligned} \text{Indicație : } x &= \overline{\overline{(p \vee q) \wedge (r \vee s)}} = \overline{\overline{(p \vee q)} \swarrow \overline{\overline{(r \vee s)}}} = \\ &= (\overline{\overline{(p \vee q)}} \swarrow \overline{\overline{(r \vee s)}}) = \\ &= (p \swarrow q) \swarrow (r \swarrow s). \end{aligned}$$

Capitolul 14

MULȚIMI

14.1. NOȚIUNI GENERALE. DEFINIȚII. NOTAȚII

Mulțimea este o noțiune primară care nu se definește.

Dacă un element a aparține mulțimii A , se scrie $a \in A$.

Negația propoziției $a \in A$ este propoziția $a \notin A$.

Definiția 14.1. Vom spune că mulțimile A și B sînt egale, și vom scrie $A = B$, dacă ele sînt formate din aceleași elemente:

$$A = B \Leftrightarrow (\forall z) (z \in A \Leftrightarrow z \in B).$$

Egalitatea mulțimilor are următoarele proprietăți:

1. Reflexivitatea : $A = A$;
2. Simetria : $A = B \Rightarrow B = A$;
3. Tranzitivitatea : $A = B$ și $B = C \Rightarrow A = C$, oricare ar fi A, B, C .

Definiția 14.2. Se numește mulțimea vidă și se notează cu \emptyset , mulțimea care nu conține nici un element.

Definiția 14.3. Spunem că mulțimea A este inclusă în mulțimea B și scriem $A \subset B$, cînd orice element al mulțimii A este și element al mulțimii B .

$$A \subset B \Leftrightarrow (\forall x) (x \in A \Rightarrow x \in B).$$

Spunem că A este o submulțime a lui B sau A este inclusă în B . Incluziunea are următoarele proprietăți:

1. Reflexivitatea : $A \subset A$, pentru orice A ;
2. Antisimetria : $A \subset B$ și $B \subset A \Rightarrow A = B$;
3. Tranzitivitatea : $A \subset B$ și $B \subset C \Rightarrow A \subset C$.

Definiția 14.4. Fie o mulțime A . Mulțimea tuturor submulțimilor lui A se numește mulțimea părților lui A și se notează $\mathfrak{Z}(A)$.

$$\mathfrak{Z}(A) = \{X \mid X \subset A\}.$$

14.2. OPERAȚII CU MULȚIMI

14.2.1. REUNIUNEA

Definiția 14.5. Reuniunea a două mulțimi A și B se numește mulțimea :

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ sau } x \in B\}.$$

$$x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B.$$

14.2.2. PROPRIETĂȚILE REUNIUNII:

1. Reuniunea este comutativă :

$$A \cup B = B \cup A;$$

2. Reuniunea este asociativă :

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C);$$

3. Reuniunea este idempotentă :

$$A \cup A = A;$$

4. Mulțimea vidă are rol de element neutru pentru reuniune :

$$A \cup \emptyset = \emptyset \cup A = A;$$

5. $A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = B$;

6. Reuniunea este izotonă :

$$A \subset B \wedge C \subset D \Rightarrow A \cup C \subset B \cup D.$$

14.2.3. INTERSECȚIA

Definiția 14.6. Fiind date două mulțimi A și B se numește intersecția mulțimilor A și B mulțimea :

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ și } x \in B\},$$

$$x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B.$$

14.2.4. PROPRIETĂȚILE INTERSECȚIEI :

1. Intersecția este comutativă :

$$A \cap B = B \cap A;$$

2. Intersecția este asociativă :

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C;$$

3. Intersecția este idempotentă :

$$A \cap A = A;$$

4. Mulțimea vidă este un element absorbant pentru intersecție :

$$A \cap \emptyset = \emptyset \cap A = \emptyset.$$

5. Dacă $A \subset B$, atunci $A \cap B = A$;

6. $A \subset B$ și $C \subset D$, atunci $A \cap C \subset B \cap D$;

7. Proprietățile de absorbție :

$$A \cap (A \cup B) = A,$$

$$A \cup (A \cap B) = A.$$

14.3. LEGI DISTRIBUTIVE

1. Reuniunea este distributivă față de intersecție :

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C);$$

2. Intersecția este distributivă față de reuniune

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

Definiția 2.7. Mulțimile A și B se numesc disjuncte dacă $A \cap B = \emptyset$.

14.4. DIFERENȚA

Definiția 2.8. Se numește diferența mulțimilor A și B mulțimea formată din elementele lui A care nu aparțin lui B .

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ și } x \notin B\}.$$

$$x \in A \setminus B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B.$$

Proprietăți:

- 1) $A \setminus B \subset A$;
- 2) $A \cup (B \setminus A) = A \cup B$;
- 3) $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus B$;
- 4) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$;
- 5) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$;
- 6) $A \setminus \emptyset = A$; $\emptyset \setminus A = \emptyset$; $A \setminus A = \emptyset$.

14.5. DIFERENȚA SIMETRICĂ

Definiția 2.9. Se numește diferență simetrică a mulțimilor A și B , mulțimea :

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

$$x \in A \triangle B \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \notin A \wedge x \in B).$$

Proprietățile diferenței simetrice :

1. Diferența simetrică este comutativă :

$$A \triangle B = B \triangle A;$$

2. Diferența simetrică este asociativă :

$$(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C);$$

3. Mulțimea vidă este un element neutru față de diferența simetrică :

$$A \triangle \emptyset = \emptyset \triangle A = A;$$

4. Intersecția este distributivă față de diferența simetrică :

$$A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C),$$

$$(A \triangle B) \cap C = (A \cap C) \triangle (B \cap C).$$

14.6. COMPLEMENTARA

Se numește complementara mulțimii A în raport cu mulțimea E ($A \subset E$), mulțimea :

$$C_E A = \{x \mid x \notin A \text{ și } x \in E\},$$

$$x \in C_E A \Leftrightarrow x \notin A \wedge x \in E.$$

Proprietăți

1) Formulele lui De Morgan :

$$C(A \cap B) = CA \cup CB,$$

$$C(A \cup B) = CA \cap CB;$$

2) Complementara este descrescătoare :

$$A \subset B \Rightarrow CA \supset CB;$$

3) Complementara este involutivă :

$$CCA = A;$$

4) $A \cap CA = \emptyset$ și $A \cup CA = E$.

14.7. PRODUS CARTEZIAN

Definiția 14.11. Se numește produs cartezian al mulțimilor A și B și se notează $A \times B$, mulțimea tuturor perechilor ordonate (a, b) , unde $a \in A$ și $b \in B$.

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}.$$

Proprietăți

1) Produsul cartezian este izoton :

$$A \subset B \text{ și } C \subset D \Rightarrow A \times C \subset B \times D;$$

2) Produsul cartezian este distributiv față de reuniune :

$$(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C);$$

3) Produsul cartezian este distributiv față de intersecție :

$$(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C);$$

4) Produsul cartezian este distributiv față de diferență :

$$(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C).$$

Exercițiu

1) Fie $M = \{x \mid x \in Q \text{ și } x = \frac{n+6}{n+2}, n = 1, 2, 3\}$.

Să se determine submulțimea :

$$A = \{x \mid x \in M \text{ și } x \text{ este întreg}\}.$$

Soluție

$x = \frac{n+6}{n+2} = \frac{n+2+4}{n+2} = 1 + \frac{4}{n+2}$, numărul x este întreg dacă $n+2$ este un divizor al numărului 4. Deoarece n este un număr natural, îi corespunde lui $n+2$ valoarea 4 și obținem $n=2$.
Prin urmare avem : $A = \{2\}$.

14.8. EXERCIIȚII ȘI PROBLEME

1. Să se determine mulțimile :

$$A = \{x \mid x \in N \text{ și } n \in N, x = -n^2 + 5n - 6\},$$

$$B = \{x \mid x \in N \text{ și } n \in N, x = -2n^2 + 12n - 16\}.$$

2. Să considerăm mulțimile :

$$A = \{x \mid x \in Z \text{ și } x = 3m + 5n, m, n \in N\}$$

$$B = \{x \mid x \in Z \text{ și } x = 4m + 7n, m, n \in N\}.$$

Să se determine mulțimile :

a) $C = \{x \mid x \in N \text{ și } x \notin A\},$

b) $D = \{x \mid x \in N \text{ și } x \notin B\}.$

3. Să se determine mulțimea X care satisface simultan condițiile :

$$X \subset \{1, 2, 3, 4\}$$

$$X \subset \{1, 3, 5\} \text{ și } \{1, 3\} \subset X.$$

4. Să se determine mulțimea X , cunoscând că :

$$\{1, 2, 3\} \text{ și } \{2, 3, 7\} \text{ sînt submulțimi ale lui } X \text{ și că } X \subset \{1, 2, 3, 7\}.$$

5. Se dă mulțimea $M = \{2, 3, 4, 5, 6\}.$

Să se scrie mulțimile A, B, C definite mai jos, precizînd de fiecare dată care sînt elementele lor :

$$A = \{x \mid x \in M \text{ și } 2x \in M\},$$

$$B = \{x \mid x \in M \text{ și } y \in M, x + y = 6\},$$

$$C = \{x \mid x \in M \text{ și oricare ar fi } y \in M \text{ și } y \neq x, \text{ împărțind } x \text{ la } y \text{ obținem restul } 1\}.$$

6. Să se compare mulțimile :

$$A = \{x | x \in Q \text{ și } x = \frac{3n^2 + 1}{n^2 + n}, n \in N\}$$

$$B = \{x | x \in A \text{ și } 2 \leq x \leq 3\}.$$

7. Să se determine mulțimile A și B care satisfac condițiile :

a) $A \cup B = \{1, 2, 3\},$

b) $A \cap B = \emptyset,$

c) $\forall x \in A, \exists y \in B, \text{ astfel încît } x - y = 1 \text{ și}$
 $\forall x \in B, \exists y \in A, \text{ astfel încît } y - x = 1.$

8. Să se determine mulțimile A și B care satisfac condițiile următoare :

1) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\},$

2) $A \cap B = \{1, 2\},$

3) $A - B = \{5\}.$

9. Să se rezolve ecuațiile :

a) $\{1, 2\} \Delta X = \{1, 2, 3\},$

b) $A \Delta X = B.$

10. Să se demonstreze următoarele egalități :

a) $(\bar{A} \cup B) \cap A = A \cap B,$

b) $A \cap (B \setminus A) = \emptyset,$

c) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C),$

d) $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C),$

e) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C.$

11. Să se demonstreze :

a) $A \cup B \subseteq C \Leftrightarrow A \subseteq C \text{ și } B \subseteq C,$

b) $A \cap B \subseteq C \Leftrightarrow A \subseteq \bar{B} \cup C,$

c) $(A \setminus B) \cup B = A \Leftrightarrow B \subseteq A,$

d) $(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C) \Leftrightarrow C \subseteq A.$

12. Să se demonstreze egalitățile :

a) $A \Delta B = B \Delta A,$

b) $A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \Delta C,$

c) $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C),$

d) $A \Delta (A \Delta B) = B,$

e) $A \cup B = A \Delta B \Delta (A \cap B),$

f) $A \setminus B = A \Delta (A \cap B),$

g) $A \Delta \emptyset = A,$

h) $A \Delta A = \emptyset,$

i) $A \cup B = (A \Delta B) \cup (A \cap B).$

13. Să se demonstreze egalitatea :

$$A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C).$$

14. Să se arate că dacă :

a) $A \Delta B = \emptyset \Leftrightarrow A = B,$

b) $A \cap B = \emptyset \Rightarrow A \cup B = A \Delta B,$

c) $A \Delta B = C \Leftrightarrow B \Delta C = A \Leftrightarrow C \Delta A = B.$

15. Să se rezolve sistemul de ecuații :

$$\begin{cases} A \cap X = B \\ A \cup X = C \end{cases} \quad B \subseteq A \subseteq C.$$

16. Să se rezolve sistemul de ecuații :

$$\begin{cases} A \setminus X = B \\ X \setminus A = C \end{cases} \quad B \subseteq A; \quad A \cap C = \emptyset.$$

17. Funcția caracteristică a unei mulțimi E ($E \subseteq A$) se numește următoarea aplicație a mulțimii A pe mulțimea numerelor 0 și 1.

$$f(x) = 0, \text{ dacă } x \notin E$$

$$f(x) = 1, \text{ dacă } x \in E$$

Dacă e și f sînt funcțiile caracteristice ale mulțimilor $E \subset A$ și $F \subset A$ să se afle ce submulțimi ale mulțimii A au funcțiile caracteristice

$$1 - e; \quad ef; \quad e + f - ef;$$

18. Să se arate folosind rezultatele din exemplul precedent că avem relațiile :

$$(E \cap F) \cap G = E \cap (F \cap G),$$

$$(E \cap F) \cup G = (E \cup G) \cap (F \cup G).$$

19. Fie mulțimile : $A = \{1, 2, 3, x, y\}$ și $B = \{5, 6, x, z\}$.

Să se determine x, y și z , cunoscând că :

$$\{4, 5\} \times \{2, 4\} \subset A \times B.$$

20. Să se determine mulțimile X și Y , știind că ele satisfac în mod simultan condițiile :

$$X \times Y \subset \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (3, 2), (3, 3), (3, 4)\}.$$

Să se demonstreze egalitățile :

$$A \cap (A \cup B) = A, \quad (A - B) \cap B = \emptyset,$$

$$(A - B) \cup B = A \cup B, \quad A - (B - C) = (A - B) \cup (A \cap C),$$

$$A - (B \cup C) = (A - B) - C.$$

22. Să se demonstreze egalitățile :

$$\overline{(A - B) - C} = \overline{(A - B) \cap C} = (A \cup B) \cup C,$$

$$(A \cap B) - A = \emptyset.$$

23. Să se demonstreze egalitățile :

$$A - B = A \Delta (A \cap B),$$

$$\overline{A \Delta B} = (\bar{A} \cup B) \cap (\bar{B} \cup A),$$

$$(A \Delta B) \cup B = (A \cup B) \cup (B - A) = A \cup B.$$

24. Să se demonstreze egalitatea :

$$(A \cup \bar{B}) \Delta A = \overline{A \cup B}.$$

25. Să se calculeze expresiile :

$$A - (B \cap C), \quad A \cup (\overline{B \cup C}), \quad \bar{A} \cap (\overline{B \cup C}),$$

$$\text{dacă } A \subset B \subset C.$$

26. Să se arate că dacă

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C),$$

atunci

$$(\bar{A} \cup \bar{B}) \cap \bar{C} = (\bar{A} \cap \bar{C}) \cup (\bar{B} \cap \bar{C}).$$

27. Să se demonstreze că mulțimile :

$$A \setminus B, \quad B \setminus C, \quad C \setminus A,$$

sunt disjuncte două câte două.

28. Să se demonstreze egalitățile :

$$A \cap B = A \cup (B - (A \cap B)),$$

$$A \cup (\overline{B \cup C}) = (\overline{A \cap B}) \cap (\overline{A \cap C}).$$

29. Să se demonstreze relația :

$$(A \cap (\overline{A \cap B})) \cap (B \cap (\overline{A \cap B})) = \emptyset.$$

30. Să se verifice egalitatea :

$$A \cup B \cup C = (A - B) \cup (B - C) \cup (C - A) \cup (A \cap B) \cap C.$$

31. Să se determine elementele mulțimii :

$$A = \{(x, y, z) \in R^3 \mid 6x = 3y = 2z \wedge x^2 + y^2 + z^2 = 11\}.$$

32. Fie $A = \{(x, y) \mid 2x + y = 9, x \in N, y \in N\}$ și o mulțime M astfel ca diagonală produsului cartezian $M \times N$ să fie $\Delta M = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (7, 7)\}$.

a) Să se determine mulțimile A și M .

b) Să se determine $A \cap \Delta M$.

33. Să se determine elementele mulțimii :

$$A = \{(x, y) \in Q \times Q \mid 13x^2 + 45y^2 + 24xy - 28x - 84y + 40 = 0\}.$$

34. Să se determine elementele mulțimii :

$$A = \{x \in Q \mid 2(m - 2)x^2 = (m + 3)(2x - 1); m \in Z\}.$$

35. Se consideră mulțimea :

$$A = \{(x, y) \in R^2; x^5 y^3 = 81 \wedge 10x + 6y = 27\}.$$

Să se arate că $A = \emptyset$

36. Să se determine mulțimile A și B care îndeplinesc condițiile :

$$A \cap B = \{3, 4\}$$

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Mulțimile $A \setminus B$, și $B \setminus A$ au același număr de elemente.

$$A = \{x \mid x \in N \text{ și } x \text{ sînt numere consecutive}\}.$$

37. Să se determine numerele x care îndeplinesc simultan condițiile :

$$x \in A \text{ și } x \in N,$$

$$A \cap B = \{3, 4\}, A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, x\}.$$

Mulțimea A și B au același număr de elemente.

Sumele numerelor care reprezintă elemente necomune din cele două mulțimi (A și B) sînt egale.

38. Să se determine E și mulțimea părților sale A și B știind că :

$$C_E A = \{1, 3, 5, 7\},$$

$$C_E B = \{24, 7, 8\},$$

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8\}.$$

39. Se dau mulțimile :

$$A = \left\{ x \in N \mid \frac{x^2 - 9}{x^2 - 6x + 9} \in Z \right\}.$$

$$B = \left\{ x \in N \mid \frac{x^2 - 9}{x^2 - 6x + 9} \in N \right\}.$$

Să se calculeze $A \cap B$, $A \setminus B$.

40. Se dau mulțimile :

$$A = \{x \mid x = 3n - 4; n \in N\}$$

$$B = \{x \mid x = 401 - 4m; m \in N\}$$

$$C = \{x \mid x = 401 - 12p; p \in N, p \leq 33\}.$$

Să se arate că $A \cap B = C$.

41. Se dă mulțimea :

$$A = \{x \in Z \mid 8x^3 - 6x + 1 = 0\}.$$

Să se arate că $A = \emptyset$.

42. Se consideră mulțimea :

$$A = \left\{ x \in R \mid \sin^3 x \cos^5 x = \frac{1}{5} \right\}$$

Să se arate că $A = \emptyset$.

43. Să se determine elementele mulțimii :

$$A = \left\{ (x, y) \in [0, \pi]; \frac{16}{\sin^4 2x} = 15 + \sin y \right\}.$$

44. Să se determine mulțimea :

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 3 + 2|1 + x| = |1 - 2y| \text{ și} \\ 3|y| + 2|1 + x| = |2 - y|\}.$$

45. Se dau mulțimile :

$$A = \{x | x = 20k - 4; k \in \mathbb{N}\},$$

$$B = \{x | x = 796 - 20k; k \in \mathbb{N}; k \leq 39\}.$$

Să se arate că $A = B$.

46. Se dau mulțimile :

$$A = \{(x, y), x \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{N} | x^2 - xy - 3x + 3y = 1\}.$$

$$B = \{(x, y), x \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{N} | xy - 2x - 3y = -5\}.$$

Să se arate că $A = B$.

47. Se dau mulțimile :

$$A = \{(x, y); x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{Z} | 2xy - 3x + 5y = 7\}.$$

$$B = \{(x, y); x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{Z} | 3xy - 5x + 7y = 1\}.$$

Să se arate că $A = B$.

48. Se consideră mulțimile :

$$M = \left\{ y \mid y = \frac{2x^2 + 5x + 9}{2x + 3}, x \in \mathbb{Q}^+ \right\}.$$

Să se determine mulțimea $M \cap \mathbb{Z}$, unde \mathbb{Q}^+ este mulțimea numerelor raționale pozitive, iar \mathbb{Z} mulțimea numerelor întregi.

49. Se dau mulțimile :

$$A = \{x \in \mathbb{R} | x^2 - 2|1 - x| - 6 = 0\},$$

$$B = \{x \in \mathbb{R} | x^2 - 2|3 - x| - 10 = 0\}.$$

Să se calculeze mulțimile $A \cup B$, $A - B$.

50. Se dau mulțimile :

$$A = \{(x, y), x, y \in \mathbb{Z} | 9x + 10y \equiv 3\};$$

$$B = \{(x, y), x, y \in \mathbb{Z} | 6x + 7y \equiv 3\}.$$

Să se arate că $A = B$.

51. Să se determine mulțimea :

$$A = \{(x, y), x \in N, y \in N | 4x^3 - 4x^2y + y^2x - 4x^2 + 4xy - y^2 = 0\}.$$

52. Să se determine mulțimea :

$$A = \{(x, y) \in N^2 | x^5 - xy^2 + y^2 - 1 = 0\}.$$

53. Să se determine mulțimea :

$$A = \{(x, y, z) \in Z^3; x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy - 2yz - 6z + 9 = 0\}.$$

54. Se dă mulțimea :

$$A = \{x \in R, m \in R; x^4 - 2x^2m^2 + m^4 + x^2 + 2mx + m^2 + 2 = 0\}.$$

Să se arate că $A = \emptyset$.

55. Se consideră mulțimile :

$$A = \left\{x \in N \mid \frac{x^5 + 5}{4x} \in Z\right\}.$$

$$B = \left\{x \in N \mid \frac{x^5 + 4}{5x} \in Z\right\}.$$

Să se arate că $A = B$.

56. Să se determine mulțimea :

$$A = \{(x, y) \in Z^2 | 6x^2 - 13xy + 6y^2 = 19\}.$$

57. Să se determine mulțimea :

$$A = \left\{x \in R; \lg \frac{x-2}{x-3} > \lg \frac{x-1}{x-4}\right\}.$$

58. Să se determine mulțimea :

$$A = \{(x, y) \in Z^2 | (x - 2y)(x + 3) = 0\}.$$

59. Să se afle mulțimea :

$$A = \{x \in N | x = \overline{aabb} \wedge x = p^2, p \in N\}.$$

Capitolul 15

RELAȚII

Se dau două mulțimi A și B , distincte sau egale, și o proprietate $\mathfrak{R}_0(x, y)$ referitoare la perechile ordonate (x, y) ale mulțimii $A \times B$. O relație binară între mulțimile A și B este determinată de mulțimea $X \times Y$, $X \subseteq A$, $Y \subseteq B$, a perechilor $(x, y) \in A \times B$ pentru care $\mathfrak{R}_0(x, y)$ este adevărată. Vom nota $G = \{(x, y), x \in X, y \in Y\}$.

Dacă $(a, b) \in G$ se spune că a este în relație \mathfrak{R} cu elementul b și se scrie $a\mathfrak{R}b$.

Vom spune că A este mulțimea de plecare și B este mulțimea de sosire.

15.1. RELAȚII FUNCȚIONALE

O relație \mathfrak{R} de la mulțimea A către mulțimea B se numește funcțională sau funcție dacă un element x al mulțimii A se poate afla în relația dată cu cel mult un element y din mulțimea B . Submulțimea A' de elemente din A cărora le corespund elemente din B , se numește domeniul funcției, iar mulțimea elementelor din B care sînt în relație cu elementele din A se numește codomeniul funcției. Dacă o relație funcțională se notează cu f atunci putem scrie $y = f(x)$.

Într-o relație funcțională, unui element $x \in A$ îi corespunde un singur element $y \in B$ sau niciun element. La elemente diferite din A le pot corespunde aceleași elemente în B .

Reținem că o funcție este dată prin trei elemente :

1. Domeniul de definiție;
2. Mulțimea în care funcția ia valori;
3. Legea de corespondență.

Legea de corespondență poate fi definită în mai multe moduri :

- prin indicarea unui tablou de corespondență dintre elementele domeniului și valorile lor ;
- prin indicarea unei formule.

Exemplu

Să considerăm mulțimile :

$$A = \{7, 8, 10, 15, 17, 18\}$$

$$B = \{0, 2, 3, 6, 7, 8\}.$$

și relația $x \mathcal{R} y \Leftrightarrow „x \text{ are rest } y \text{ cînd se împarte la } 8”$, unde $x \in A$, și $y \in B$. Să cercetăm dacă această relație este funcțională și în caz afirmativ să găsim domeniul A' .

Soluție

Avem :

$$7 = 8 \cdot 0 + 7 \Rightarrow 7 \mathcal{R} 7$$

$$8 = 8 \cdot 1 + 0 \Rightarrow 8 \mathcal{R} 0$$

$$10 = 8 \cdot 1 + 2 \Rightarrow 10 \mathcal{R} 2$$

$$15 = 8 \cdot 1 + 7 \Rightarrow 15 \mathcal{R} 7$$

$$17 = 8 \cdot 2 + 1 \Rightarrow 1 \notin B$$

$$18 = 8 \cdot 2 + 2 \Rightarrow 18 \mathcal{R} 2$$

Să reprezentăm grafic această relație (fig. 15.1).

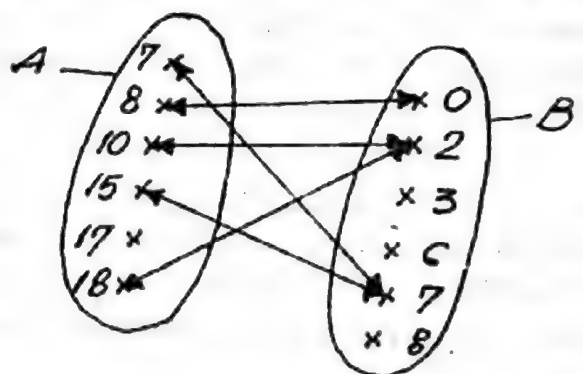


Fig. 15.1

Această relație este funcțională și avem $A' = \{7, 8, 10, 15, 18\}$.

Contraexemplu

Să considerăm mulțimile :

$$A = \{1, 4, 5, 7, 9\},$$

$$B = \{0, 1, 3, 5, 7\} \text{ și relația } xRy \Leftrightarrow x \leq y \ (x \in A, y \in B).$$

Este această relație funcțională ?

Soluție

$$1 \leq 1; \ 1 \leq 3; \ 1 \leq 5; \ 1 \leq 7;$$

$$1 R 1; \ 1 R 3; \ 1 R 5; \ 1 R 7;$$

$$5 \leq 5; \ 5 \leq 7;$$

$$5 R 5; \ 5 R 7.$$

Relația dată nu este funcțională.

15.2. APLICAȚII

O relație funcțională definită pe mulțimea A cu valori în B se numește aplicație dacă fiecărui element din A îi corespunde cel mult un element în B .

Prin urmare funcțiile pentru care domeniul coincide cu întreaga mulțime A se numesc aplicații ale mulțimii A în mulțimea B .

15.2.1. APLICAȚIA SURJECTIVĂ

Definiție. O aplicație f a mulțimii A în mulțimea B se numește surjectivă dacă și numai dacă orice element y a lui B este imagine prin f a cel puțin unui element din A .

$$f \text{ surjectivă} \Leftrightarrow \forall y \in B, \exists x \in A, y = f(x).$$

Dacă o aplicație $f: A \rightarrow B$ este surjectivă avem $f(A) = B$ adică mulțimea de sosire este egală cu mulțimea valorilor. Se spune : aplicație surjectivă, surjecție sau aplicație *pe* (în loc de aplicație *în*).

Exemplu :

Se consideră mulțimile :

$$A = \{-1, -2, 1, 2, 3, 4\}$$

$$B = \{1, 4, 9, 16\}$$

și aplicația $y = x^2, (x \in A, y \in B)$.

Este această aplicație surjectivă?

Soluție (fig. 15.2). Avem :

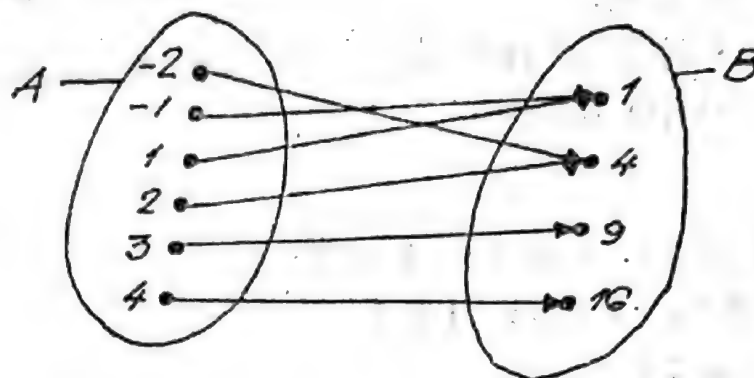


Fig. 15.2

$$(-1)^2 = 1 \Rightarrow -1 \mathcal{R} 1$$

$$(-2)^2 = 4 \Rightarrow -2 \mathcal{R} 4$$

$$1^2 = 1 \Rightarrow 1 \mathcal{R} 1$$

$$2^2 = 4 \Rightarrow 2 \mathcal{R} 4$$

$$3^2 = 9 \Rightarrow 3 \mathcal{R} 9$$

$$4^2 = 16 \Rightarrow 4 \mathcal{R} 16$$

Se constată că $\forall y \in B, \exists x \in A$ care verifică relația $y = x^2$.

Contraexemplu

Se consideră mulțimile :

$$A = \{1, 2, 3, 4\}, \quad B = \{2, 5, 10, 17, 20\}$$

și aplicația $y = x^2 + 1, (x \in A, y \in B)$.

Să se cerceteze natura acestei aplicații.

Soluție (fig. 15.3). Avem :

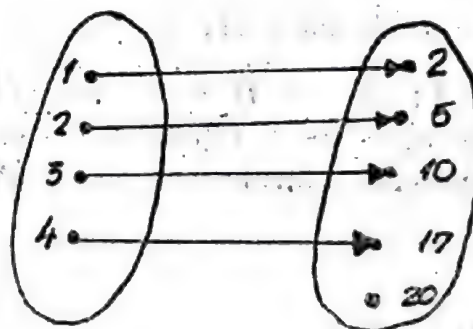


Fig. 15.3

$$1^2 + 1 = 2 \Rightarrow 1 \mathcal{R} 2$$

$$3^2 + 1 = 10 \Rightarrow 3 \mathcal{R} 10$$

$$2^2 + 1 = 5 \Rightarrow 2 \mathcal{R} 5$$

$$4^2 + 1 = 17 \Rightarrow 4 \mathcal{R} 17$$

Aplicația nu este surjectivă deoarece numărul 20 nu este imaginea nici unui element al mulțimii A prin aplicația dată.

15.2.2. APLICAȚIE INJECTIVĂ

O aplicație f se numește injectivă dacă pentru orice pereche de elemente $x, x' \in A$, $x \neq x'$, corespund elemente diferite în B . Exprimăm această proprietate scriind astfel:

$$f(x) = f(x') \Rightarrow x = x' \text{ sau } x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x').$$

Exemplu :

În mulțimea numerelor naturale ($A = B = N$) să considerăm aplicația: $xRy \Leftrightarrow y = x^2 + 1$. Este această aplicație injectivă?

Soluție :

Să considerăm două elemente arbitrare $x', x'' \in N$ și avem: $y' = x'^2 + 1$, $y'' = x''^2 + 1$. Din egalitatea $y' = y''$, deducem: $x'^2 + 1 = x''^2 + 1$, $x'^2 = x''^2$. Deoarece $x', x'' \in N$, deducem $x' = x''$.

Prin urmare, dacă $y' = y''$, atunci $x' = x''$. Aplicația este injectivă.

15.2.3. APLICAȚIE BIJECTIVĂ

Aplicația f a mulțimii A în mulțimea B care este în același timp surjectivă și injectivă se numește bijectivă sau biecție.

Exemplu :

Se dau mulțimile: $A = [2, +\infty)$, $B = [-3, +\infty)$ și relația $xRy \Leftrightarrow y = x^2 - 4x + 1$. Să se arate că această relație este o aplicație bijectivă a mulțimii A în mulțimea B .

Soluție. Este evident că, pentru orice x , avem: $x^2 - 4x + 1 \geq -3 \Leftrightarrow (x - 2)^2 \geq 0$. Rezultă că, dacă $x \in [2, +\infty)$, atunci $y \in [-3, +\infty)$.

Să arătăm că R este injectivă. Să presupunem că $y' = y''$, unde y' și y'' sînt imaginile a două elemente $x', x'' \in [2, +\infty)$. Avem: $x'^2 - 4x' + 1 = x''^2 - 4x'' + 1 \Leftrightarrow (x'^2 - x''^2) - 4(x' - x'') = 0 \Leftrightarrow (x' - x'')(x' + x'' - 4) = 0$.

Deoarece $x', x'' \geq 2$, avem $x' + x'' - 4 \geq 0$ și, prin urmare, $x' - x'' = 0$ sau $x' = x''$ și deci aplicația este injectivă. Să arătăm că aplicația este surjectivă. Fie $y \in [-3, +\infty)$. Din rezolvarea ecuației $x^2 - 4x + 1 = y \Leftrightarrow x^2 - 4x - y + 1 = 0$, avem $x = 2 \pm \sqrt{3 + y}$ și, deoarece $y + 3 > 0$, avem: $2 + \sqrt{3 + y} \in [2, +\infty)$. De aici rezultă că aplicația este surjectivă și, fiind și injectivă, ea este bijectivă.

15.3. APLICAȚIA INVERSĂ A UNEI APLICAȚII BIJECTIVE

Să presupunem că aplicația $f: A \rightarrow B$ este bijectivă.

Prin urmare, ecuația $y = f(x)$ are o soluție unică în raport cu necunoscuta x . Vom desemna această necunoscută prin $x = g(y)$, care definește o aplicație de la B către A .

Funcția $x = g(y)$; $g: B \rightarrow A$ se numește funcția inversă funcției $y = f(x)$ și se notează cu f^{-1} .

Dacă funcția $f: A \rightarrow B$ este inversabilă, următoarele proprietăți sînt adevărate:

$$f(f^{-1}(y)) = y, \text{ oricare ar fi } y \in B;$$

$$f^{-1}(f(x)) = x, \text{ oricare ar fi } x \in A.$$

Exemple:

Să considerăm funcția:

$$f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+; f(x) = x^2$$

Să se scrie funcția inversă. Funcția inversă este $f^{-1}(y): x = \sqrt{y}$.

15.4. COMPUNEREA RELAȚIILOR

Fie \mathcal{R} o relație binară între elementele mulțimii A și elementele mulțimii B , \mathcal{S} o relație binară între elementele mulțimii B și elementele mulțimii C .

$$x \in A; y \in B; x\mathcal{R}y; \text{ sau } y = \mathcal{R}(x).$$

$$y \in B; z \in C; y\mathcal{S}z, \text{ sau } z = \mathcal{S}(y).$$

Se numește compusa relațiilor \mathcal{R} și \mathcal{S} , relația notată $\mathcal{S} \oplus \mathcal{R}$, dată prin egalitatea care stabilește o corespondență între elementele mulțimii A și elementele mulțimii C .

Correspondențele realizate de relația $S \circ R$, pot fi reprezentate prin următoarea diagramă (fig. 15.4).

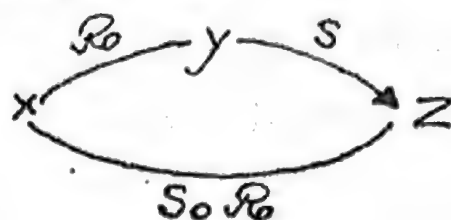


Fig. 15.4

Exemplu :

În mulțimea N se consideră relațiile :

$$xRy \Leftrightarrow y = x + 2$$

$$ySz \Leftrightarrow z = 3y$$

Fie $\tau = S \circ R$

$$x\tau z \Leftrightarrow z = 3(x + 2)$$

Teorema 15.1. Relația compusă a două funcții este o funcție.

Teorema 15.2. Compunerea a două aplicații este o aplicație.

15.5. EXERCIIU REZOLVATE

Funcții surjective, injective, bijective.

Exemplul 1

Să se precizeze dacă funcția : $f : (3, +\infty) \rightarrow R$, definită prin $f(x) = x^2 - 6x + 8$, este surjectivă ? Dar injectivă ? Dar bijectivă ?

Soluție

Surjecția. Funcția este surjectivă dacă pentru orice $y \in R$ există $x \in (3, +\infty)$, avînd proprietatea $y = f(x)$.

Fie $y \in R$ și, prin urmare, avem :

$$y = x^2 - 6x + 8, \quad x^2 - 6x + 8 - y = 0$$

$$x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{9 - 8 + y} = 3 \pm \sqrt{1 + y}.$$

De aici rezultă că $y + 1 \geq 0$ și, prin urmare, pentru $y \in (-\infty, -1)$ nu există valori reale ale lui x astfel încît $y = f(x)$.

Funcția dată nu este surjectivă, deoarece există elemente din R care nu sînt imagini.

Injectivitatea. Funcția este injectivă dacă, pentru $x_1 \neq x_2$, avem $f(x_1) \neq f(x_2)$. Din relația $f(x_1) \neq f(x_2)$ deducem :

$$f(x_1) - f(x_2) \neq 0.$$

$$\text{Avem } f(x_1) - f(x_2) = (x_1^2 - x_2^2) - 6(x_1 - x_2) = (x_1 - x_2)$$

$$(x_1 + x_2 - 6) = (x_1 - x_2) [(x_1 - 3) + (x_2 - 3)].$$

Pe mulțimea $(3, +\infty)$ avem $x_1 - 3 > 0$, $x_2 - 3 > 0$ și, prin urmare, avem : $f(x_1) - f(x_2) > 0$.

Funcția este injectivă.

Nefiind surjectivă, funcția dată nu este bijectivă.

Exemplul 2

Să se verifice dacă funcția $f: R \setminus \{-4\} \rightarrow R \setminus \{0\}$ definită prin $y = \frac{1}{x+4}$ este bijectivă.

Soluție

$$\text{Surjecția } y = \frac{1}{x+4} \Leftrightarrow xy + 4y = 1 \Leftrightarrow xy = 1 - 4y \Leftrightarrow x = \frac{1 - 4y}{y}. \text{ Funcția este surjectivă.}$$

$$\text{Injectia } f(x_1) \neq f(x_2) \Leftrightarrow \frac{1}{x_1+4} \neq \frac{1}{x_2+4} \Leftrightarrow x_1+4 \neq x_2+4 \Leftrightarrow x_1 \neq x_2. \text{ Funcția este injectivă.}$$

$$[f \text{ bijectivă}] \Leftrightarrow [f \text{ injectivă}] \wedge [f \text{ surjectivă}].$$

Funcția f este bijectivă.

Exemplul 3

Se definește o aplicație f pe o parte a lui R în modul următor :

$$\forall x \in [0, 1]; y = f(x) = 3x$$

$$\forall x \in [1, 2]; y = f(x) = 3$$

$$\forall x \in [2, 3]; y = 5 - x.$$

a) Să se afle domeniul în care funcția ia valori.

b) Să se stabilească dacă aplicația f este bijectivă.

Soluție

$$a) \forall x \in [0, 1] \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq 3x \leq 3 \Rightarrow f(x) \in [0, 3]$$

$$\forall x \in [1, 2], f(x) = 3$$

$$\forall x \in [2, 3] \Leftrightarrow 2 \leq x \leq 3 \Leftrightarrow -3 \leq -x \leq -2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2 \leq 5 - x \leq 3 \Rightarrow f(x) \in [2, 3].$$

Prin urmare funcția $f(x)$ ia valori în mulțimea :

$$B = [0, 3] \cup \{3\} \cup [2, 3] = [0, 3]$$

b) f este surjectivă deoarece :

$$\forall y \in B = [0, 3], \exists x, x \in [0, 3] \wedge y = f(x).$$

f nu este injectivă deoarece dacă $x \in [1, 2] \Rightarrow f(1) = f(2) = 3$.
Aplicația f nu este bijectivă.

15.6. EXERCIIȚII ȘI PROBLEME

1. Relația definită în N care la orice valoare $x \in N$, face să corespundă $4 + x$, este o funcție? Este o aplicație? Relația reciprocă este o aplicație?

2. Se consideră aplicația $x \xrightarrow{f} x^2 + 1$ care are Z mulțimea de definiție și N mulțimea valorilor. Să notăm $X = \{-1, 0, 2\}$. Să se afle $Y = f(X)$, apoi să se afle $f^{-1}(Y)$ și să se verifice relația $f^{-1}(f(x)) = x$.

3. Într-un plan se dau un punct O , un cerc și o dreaptă oarecare. Să notăm cu C mulțimea punctelor cercului și cu D mulțimea punctelor dreptei. Se definește o relație \mathcal{R} de la C către D astfel : $M \in C, N \in D, M \mathcal{R} N \Leftrightarrow M, O, N$ sînt colineare. Să se analizeze în funcție de poziția punctului O dacă :

a) Este o funcție această relație? Este o aplicație? Această aplicație este bijectivă?

b) Există elemente ale mulțimii C care în această corespondență se confundă cu imaginile lor?

4. Se dau trei puncte A, B, C , în plan, necolineare și să notăm cu E mulțimea punctelor așezate pe cel puțin unul din segmentele AB, BC, AC . Fie G centrul de greutate al triunghiului ABC . Se definește în E , relația \mathcal{R} prin : $M \in E, M' \in E : M \mathcal{R} M' \Leftrightarrow$ dreapta MM' trece prin G .

a) Este această relație o funcție? este o aplicație?

b) Este o aplicație bijectivă?



c) Să se afle imaginea lui A prin această aplicație.

d) Să se afle imaginea mijlocului segmentului AB prin această aplicație.

e) Pe dreapta BC să considerăm un punct Q astfel încît : $\frac{BQ}{BC} = \frac{1}{3}$. Să se arate în ce raport împarte latura triunghiului imaginea punctului Q în această aplicație.

5. Se consideră într-un cerc mulțimea E a tuturor coardelor care nu trec prin centru și o relație definită în felul următor : $e, e' \in E : e \mathcal{R} e' \Leftrightarrow e$ și e' sînt egal depărtate de centru și au direcții perpendiculare.

a) Este această relație o funcție?

b) Este o aplicație?

6. Să considerăm cercul C de centru O și de rază R și un punct P exterior cercului și să notăm cu E mulțimea tuturor punctelor de pe cerc. Pe mulțimea E se definește o relație \mathcal{R} în felul următor : $A, B \in E : A \mathcal{R} B \Leftrightarrow A, B, P$ coliniare,

a) Este această relație o funcție? Este o aplicație?

b) Este o aplicație bijectivă?

7. Într-un plan se dă un punct O și se notează cu P mulțimea punctelor din plan. Se definește în P relația \mathcal{R} :

$$M \mathcal{R} M' \Leftrightarrow \overline{MO} = \overline{OM'}.$$

a) Este \mathcal{R} o funcție? Este o aplicație?

b) Este o bijecție?

c) Să se definească \mathcal{R}^{-1} .

8. În mulțimea $N \times N$ se consideră relația $\mathcal{R} : (x, y) \Rightarrow (y, x)$.

a) Această relație este o funcție? O aplicație?

b) Este o bijecție?

c) Să se definească \mathcal{R}^{-1} .

9. Se consideră mulțimea $Z \times Z$ și relația $(x, y) \Rightarrow (-x, -y)$. Să se arate dacă această relație este o funcție? Este o bijecție?

10. Dacă E este o mulțime oarecare, se definește în $\mathcal{Q}(E)$ o relație $A \rightarrow C_E A$.

a) Să se arate că relația dată este o funcție.

b) Să se arate că f este o aplicație bijectivă.

11. Să se arate că compunerea aplicațiilor este asociativă.

12. Se consideră mulțimea $E = \{a, b, c\}$. Să notăm cu $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6$, cele șase permutări ale elementelor mulțimii date. Să arătăm că pentru fiecare permutare se poate asocia o altă permutare astfel încât permutarea compusă să fie permutarea identică.

13. Se consideră mulțimile :

$$A = \{-3, -1, 0, 4, 5\}, B = \{-1, 1, 2, 3, 7\},$$

$$C = \{-3, 3, 9, 11, 21\} \text{ și relațiile :}$$

$$\mathcal{R} : A \rightarrow B, \quad x\mathcal{R}y \Leftrightarrow y = x + 2,$$

$$\mathcal{S} : B \rightarrow C \quad y\mathcal{S}z \Leftrightarrow z = 3y$$

Se cere graficul relației $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$.

14. Se dau mulțimile :

$$A = \{-5, 0, 2, 5\}, B = \{6, 1, 0, 4\}, C = \{5, 1, -2, -6\} \text{ și}$$

relațiile :

$$\mathcal{R} : A \rightarrow B : x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x = -y + 1$$

$$\mathcal{S} : B \rightarrow C : y\mathcal{S}z \Leftrightarrow y < z$$

Să se alcătuiască graficul relației $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$.

15. Se consideră relația $N \xrightarrow{f} N ; f(x) = x^2 + 1$.
Este f o aplicație injectivă?

16. Se consideră relația $Z \xrightarrow{g} Z ; g(x) = x^2 - 1$. Este această relație o aplicație? În caz afirmativ, este injectivă?

17. Se consideră două segmente de dreaptă, AB și $A'B'$, astfel încât AA' și BB' să se întâlnească în punctul O . Fie E mulțimea punctelor segmentului AB și E' mulțimea punctelor segmentului $A'B'$. Relația de la E către E' , definită prin $MM' \Leftrightarrow MM'$ trece prin punctul O este o funcție? Este o aplicație? O bijecție?

18. În mulțimea Z se consideră relația $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x^2 = y^2$. Este aceasta o relație de echivalență?

19. În mulțimea Z se consideră relația : $a \mathcal{R} b \Leftrightarrow a - b$ este număr par. Este \mathcal{R} o relație de echivalență? Care sînt clasele de echivalență? Cite elemente are mulțimea cit?

20. Se consideră mulțimea $E = \{a, b, c, d\}$ și submulțimea $F = \{a, b\}$ a lui E . Se consideră pe $\mathcal{P}(E)$ relația \mathcal{R} , definită astfel : $X \mathcal{R} Y \Leftrightarrow F \cap X = F \cap Y$. Dacă $X, Y \in \mathcal{P}(E)$, atunci :

- Este \mathcal{R} o relație de echivalență?
- Să se indice clasele de echivalență ale lui $\{b, c\} \in \mathcal{P}(E)$.
- Să se indice clasele lui \emptyset .

21. Se dă în Z relația $\mathcal{R} : a \mathcal{R} b \Leftrightarrow a^3 - a = b^3 - b$.

- Este o relație echivalență?
- Să se determine clasele de echivalență.

22. În $N \times N$, se consideră relația „ \sim ” definită astfel :

$(a, b) \sim (a', b')$ dacă $a + b' = a' + b$.

- Este o relație de echivalență.
- Să se arate care sînt elementele din $N \times N$ echivalente cu $(5, 2)$; $(1, 2)$; $(3, 3)$.

23. Se consideră mulțimea $Z^* = Z - \{0\}$.

În $Z \times Z^*$ se consideră relația „ \sim ”, definită astfel :

Dacă $(a, b) \in Z \times Z^*$ și $(a', b') \in Z \times Z^*$, atunci

$$(a, b) \sim (a', b') \Leftrightarrow ab' = ba'$$

- Este \mathcal{R} o relație de echivalență?
- Care sînt elementele echivalente cu $(3, 7)$ și $(-12, 6)$.

24. Relația de perpendicularitate între mulțimea dreptelor din plan e o relație de echivalență? Dar relația de paralelism?

25. Relația de inegalitate a numerelor reale este o relație de echivalență? Dar cea de egalitate?

26. Relația de divizibilitate a numerelor întregi o relație de echivalență?

27. Este relația de asemănare a triunghiurilor plane o relație de echivalență?

28. Fie E mulțimea segmentelor orientate din plan. Spunem că două segmente a și b sînt în relația \mathcal{R} ($a \mathcal{R} b$), dacă a și b

sînt coliniare, au aceeași lungime și același sens. Este aceasta o relație de echivalență?

Dar dacă E e mulțimea segmentelor din spațiu?

29. Doi întregi naturali a și b sînt în relația \mathcal{R} dacă \sqrt{ab} e număr natural. E aceasta o relație de echivalență?

30. Se consideră aplicația $f: N \rightarrow N$, definită prin $f(x) = x + 4$. Este această funcție bijectivă?

31. Se consideră aplicația $f: R^+ \rightarrow R$ dată prin relația $f(x) = x^{2k}$. Este surjectivă?

32. Fie aplicația $f: R - \{2\} \rightarrow R$ definită prin $f(x) = \frac{x+2}{x-3}$.

Este surjectivă?

33. Se dă aplicația $f: R \rightarrow R$ definită prin $f(x) = x^2 - 2x + 1$. Este surjectivă? Dar injectivă?

34. Se dă aplicația $f: R \rightarrow R$ definită prin $f(x) = \frac{x}{x^2 + x + 1}$.

Este această aplicație surjectivă?

35. În mulțimea R se consideră relația $x \mathcal{R} y$:

$$x^4 - 2x^2 - 2x + 3 = y^4 - 2y^2 - 2y + 3.$$

Este această relație reflexivă? Este simetrică?

36. În mulțimea $E = \{1, 2\}$ se consideră relația $x \mathcal{R} y$:

$$x^2 - 3ax + a^2 = y^2 - 3ay + a^2.$$

Să se arate că, pentru orice $a \in R$, relația este simetrică și reflexivă.

37. În mulțimea N se consideră relația $x \mathcal{R} y: x^2 + y^2 - 25a^2 = 0$, unde $a \in N$. Să se determine $(x, y) \in N \times N$, cu proprietatea $x < 20$, $y \leq 20$, care verifică relația dată.

Să se arate că perechile de numere naturale $(x, y) \in N^2$, pentru care $x \mathcal{R} y$ este adevărată sînt multiplii numărului a . Este această relație simetrică? Este tranzitivă? Este simetrică?

38. Pe mulțimea Q a numerelor raționale vom defini o relație \mathcal{R} în modul următor:

Dacă x și y sînt două numere raționale, atunci: $x \mathcal{R} y$, dacă $x - y \in Z$. Să se arate că relația \mathcal{R} este o relație de echivalență.

39. Să se reprezinte grafic funcția:

$$y = x^2 + \sqrt{(x-1)^2} + \sqrt{(x-3)^2}.$$

40. Se consideră funcția :

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ definită prin : } f(x) = \begin{cases} x & \text{dacă } x \in [0, 1] \\ x^2 & \text{dacă } x \in (-\infty, 0) \cup (1 + \infty). \end{cases}$$

Să se traseze graficul.

41. Să se verifice dacă funcția :

$$f: \mathbb{R} - \{-1, +1\} \rightarrow \mathbb{R} - (-1, 0), \text{ dată de relația } f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$$

este bijectivă.

42. Se consideră funcția :

$$f: \mathbb{R} - \{-1\} \rightarrow \mathbb{R} - \{-1\}; f(x) = \frac{1 - x}{1 + x}.$$

a) Să se arate că funcția este bijectivă;

b) Să se determine inversa acestei funcții.

43. Să se stabilească dacă funcția $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ definită prin relația $f(x) = x^{4k}$; $k \in \mathbb{N}$ este injectivă.

44. Să se arate că funcția ;

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}, ad \neq bc \text{ este bijectivă.}$$

45. Se consideră funcția :

$$f: [0, 4] \rightarrow [3, 11]; f(x) = 2x + 3.$$

a) Să se arate că funcția este inversabilă;

b) Să se afle inversa.

46. Să se arate că funcția :

$$f: [2, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}; f(x) = x^2 - 2x + 3 \text{ este injectivă.}$$

47. Să se arate că funcția $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ definită prin $f(x) = x^2$ este bijectivă.

48. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; f(x) = |x - a| + |x - b|;$
 $0 < a < b.$

Să se demonstreze că graficul funcției admite dreapta $x = \frac{a + b}{2}$ ca axă de simetrie.

49. Să se stabilească intervalele de monotonie ale funcției:
 $f(x) = x^2 + 3x - 108$.

50. Fie funcția $f(x) = \log \frac{1-x}{1+x}$; $f: (-1,1) \rightarrow \mathbb{R}$.

Să se arate că pentru orice $a, b \in (-1,1)$ există $c \in (-1,1)$ astfel ca: $f(a) + f(b) = f(c)$.

51. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow (-1,1)$ definită prin $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$.
 Se cere să se arate că f este bijectivă și apoi să se calculeze inversa.

52. Se consideră funcția $f(x) = x^2 - (m-4)x + m - 6$, unde m este un parametru real. Se cere:

a) Să se găsească valoarea minimă a expresiei $E(m) = x_1^2 + x_2^2$ (x_1 și x_2 fiind rădăcinile ecuației $f(x) = 0$).

b) Să se determine o restricție crescătoare și o restricție strict descrescătoare a funcției $f(x, b, m_1 + 1)$, unde m_1 este valoarea lui m care realizează minimul expresiei $E(m)$.

53. Se consideră funcția $f: \left(-\infty, \frac{1}{4}\right] \rightarrow \left(-\infty, \frac{9}{8}\right]$,
 $f(x) = |x^2 - 1| + x|x - 1|$.

a) Să se arate că funcția este bijectivă;

b) Să se studieze monotonia funcției.

54. Se consideră funcția:

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & \text{dacă } x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \\ \cos x, & \text{dacă } x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right] \end{cases}$$

Să se determine mulțimile:

$$A = \{x \in [0, \pi] \mid f(x) + |f(x)| = 0\}$$

$$B = \{x \in [0, \pi] \mid f(x) \leq |\operatorname{tg} 2x|\}$$

55. Să se afle domeniul maxim de definiție al funcției:

$$f: E \rightarrow \mathbb{R}; f(x) = \sqrt{1-x} - \sqrt{x}.$$

56. Se consideră funcția:

$$f(x) = \frac{ax^2 + (a+b)x + b}{bx^2 + (a+b)x + a}, \quad a, b \in \mathbb{R} - \{0\}; a \neq \pm b.$$

Să se precizeze submulțimea lui R pe care poate fi definită f .
Să se arate că f este bijectivă.

57. Se dă funcția : $f: [2a + 4, 3a + 3] \rightarrow F$, unde $y = f(x) = 2x^2 + 3$ și F este mulțimea valorilor funcției :

a) Să se determine toate valorile lui a pentru care f este o bijecție.

b) Pentru valorile lui a găsite la (a) să se determine funcția reciprocă.

58. Fie mulțimea $E = \{0, 1\}$ și funcția $f: R \rightarrow R$.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 4, & \text{dacă } x \in E \\ x + 4, & \text{dacă } x \in R \setminus E. \end{cases}$$

Să se verifice că f este o funcție bijectivă.

59. Fie corespondența $A \rightarrow B$, în care $A = \{1, 2, 3, 4\}$,

$$B = \left\{ \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{4}, \frac{9}{5} \right\} \text{ și } y = \frac{mx + 1}{x + 1} \text{ cu } x \in A \text{ și } y \in B.$$

Să se determine $m \in Z$ astfel încât aplicația dată să fie bijectivă.

60. Se dă funcția : $f: (-\infty, 0] \rightarrow F$

$$f(x) = \arcsin \frac{1}{1 + x^2}.$$

a) Să se arate că funcția este injectivă ;

b) Să se determine F astfel încât funcția să fie bijectivă.

61. Se dă funcția $f: R \rightarrow R$ de forma :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 3, & \text{dacă } x \in (-\infty, -1] \\ 3x + 1, & \text{dacă } x \in (-1, +\infty). \end{cases}$$

a) Să se stabilească dacă funcția este bijectivă ;

b) Să se construiască graficul funcției.

62. Se consideră funcția : $f: R \rightarrow R$, $f(x) = ax + b$, $a, b \in R$.

Se cere :

a) să se determine a și b astfel încât $f(1) = 1$, $f(-2) = 7$;

b) să se reprezinte grafic funcția $f(x) = -2x + 3$;

c) să se studieze semnul funcției.

63. Să se arate că funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 5x^2 + 10x - 1$ este strict crescătoare pe intervalul: $(-\infty, 0] \cup [4, +\infty)$.

64. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin :

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{dacă } x \in (-\infty, 1] \\ ax + b, & \text{dacă } x \in (1, 2) \\ x^2 - 4x + 8, & \text{dacă } x \in [2, +\infty), \end{cases}$$

unde $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

a) Să se determine a și b astfel încât funcția să fie monotonă;

b) Să se precizeze pentru valorile lui a și b determinate la punctul (a) dacă funcția este bijectivă.

65. Fie funcția $f: E \rightarrow f(E)$ prin relația :

$$y = a^{2 \sin\left(\frac{3x}{2} + \frac{\pi}{6}\right)}$$

unde $a > 1$ și E domeniul maxim de definiție pe care f poate fi inversată.

a) Să se afle inversa;

b) Să se afle funcția $f \circ f^{-1}$.

Capitolul 16

LEGI DE COMPOZIȚIE INTERNĂ

Definiția 16.1. O lege de compoziție internă într-o mulțime E este o aplicație a unei părți F a mulțimii $E \times E$ în E care face să corespundă unei perechi $(x, y) \in E \times E$ un element unic z al lui E

$$F \subset E \times E, (x, y) \in F, z \in E, (x, y) \rightarrow z.$$

Imaginea z a perechii (x, y) este numită compusul elementelor x și y prin legea de compoziție dată, iar x, y sînt termenii acestei operații.

16.1. PROPRIETĂȚI ALE UNEI LEGI DE COMPOZIȚIE INTERNE

a) Comutativitatea

Definiția 16.2. O lege de compoziție \top , definită pe mulțimea E , este comutativă dacă, pentru orice pereche de elemente ale lui E , este satisfăcută relația :

$$\forall (x, y) \in E \times E : x \top y = y \top x.$$

b) Asociativitate

Definiția 16.3. O lege de compoziție internă \top , definită pe mulțimea E , este asociativă dacă și numai dacă :

$$\forall x \in E, \forall y \in E, \forall z \in E, (x \top y) \top z = x \top (y \top z).$$

Dacă această egalitate are loc, parantezele pot fi suprimate și prin urmare putem scrie : $x \top y \top z$.

c) Element neutru

Definiția 16.4. Dacă într-o mulțime E , în care s-a definit o lege de compoziție \top , există un element e astfel încât pentru orice element $x \in E$ să avem : $x \top e = e \top x = x$, atunci e se numește element neutru pentru legea \top . Se scrie :

$$\exists e \in E : \forall x \in E, x \top e = e \top x = x.$$

Teorema 16.1. Dacă într-o mulțime E înzestrată cu o lege de compoziție \top , există un element neutru e , atunci acesta este unic.

Demonstrație :

Să presupunem că există două elemente neutre distincte.

$$\forall x \in E : x \top e = e \top x = x \quad (1)$$

$$\forall y \in E : y \top e' = e' \top y = y \quad (2)$$

Dacă în particular $y = e$ atunci ținând seama de (2) obținem :

$$e' \top e = e \top e' = e. \quad (3)$$

Dacă facem $x = e'$ atunci din relația (1) obținem :

$$e' \top e = e \top e' = e'. \quad (4)$$

Din relația (3) și (4) avem $e = e'$.

d) Element regulat

Definiția 16.5. Fie o mulțime E înzestrată cu o lege de compoziție internă \top . Dacă, oricare ar fi elementele x, y și z ale mulțimii E , egalitatea elementelor $x \top y$ și $x \top z$ implică egalitatea elementelor y și z , atunci elementul x este regulat la stînga.

$$\forall y \in E, \forall z \in E, x \top y = x \top z \Rightarrow y = z.$$

În mod asemănător dacă are loc implicația :

$$\forall y \in E, \forall z \in E, y \top x = z \top x \Rightarrow y = z$$

atunci se spune că x este regulat la dreapta.

e) Element simetrizabil.

Definiția 16.6. Într-o mulțime E , înzestrată cu o lege de compoziție internă \top și posedînd un element neutru e , un element x

se numește simetrizabil pentru legea \top , dacă există în mulțimea E un element x^{-1} astfel încît :

$$x \top x^{-1} = x^{-1} \top x = o.$$

16.2. DISTRIBUTIVITATEA UNEI LEGI DE COMPOZIȚIE FAȚĂ DE O ALTĂ LEGE DE COMPOZIȚIE

Definiția 16.7. Se consideră o mulțime E înzestrată cu două legi interne \top și θ . Se spune că legea \top este distributivă la stînga în raport cu legea θ dacă :

$$\forall x \in E, \forall y \in E, \forall z \in E, x \top (y \theta z) = (x \top y) \theta (x \top z).$$

Exemple :

În mulțimile N, Z, Q, R , înmulțirea este distributivă față de adunare.

$$\forall a, \forall b, \forall c: a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c.$$

16.3. OMOMORFISM. IZOMORFISM

Fie E o mulțime înzestrată cu o lege de compoziție internă notată $*$ și E' o altă mulțime, în care s-a definit o lege de compoziție internă notată \top .

Definiția 16.8. O aplicație f a lui $(E, *)$ în (E', \top) , este un omomorfism al lui E în E' dacă :

$$f(a * b) = f(a) \top f(b), \text{ oricare ar fi } a, b \in E.$$

Observație

1) $f(a * b)$ este imaginea prin aplicația f a elementului ce se obține în mulțimea E , dacă compunem pe a cu b ;

2) $f(a) \top f(b)$ este elementul ce se obține în mulțimea E' , dacă compunem imaginile elementelor a, b din mulțimea E .

Deci, aplicația f este un omomorfism, dacă imaginea prin f a elementului compus $a * b$ este compusul, prin operația \top , a imaginilor $f(a)$ și $f(b)$ din E' .

Definiția 16.8. O aplicație f a mulțimii $(E, *)$ în (E, \top) este izomorfă, dacă este omomorfă și bijectivă.

16.4. EXERCII ȘI PROBLEME REZOLVATE

Exemplul 1

Pe mulțimea E se consideră o lege de compoziție internă notată cu $*$. Să presupunem că această lege este asociativă și e este elementul său neutru. Să se arate că orice element care admite un invers în E este de asemenea regulat.

Soluție

Este suficient să arătăm că :

$$[\forall x \in E / x^{-1} * x = e] \Rightarrow [(x * y = x * z) \Leftrightarrow (y = z)]$$

Fie $x * y = x * z$.

Din ipoteza că x^{-1} există avem :

$$\begin{aligned} x * y = x * z &\Leftrightarrow x^{-1} * (x * y) = x^{-1} * (x * z) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x^{-1} * x) * y = (x^{-1} * x) * z \text{ (asociativitate)} \\ &\Leftrightarrow e * y = e * z \Leftrightarrow y = z. \end{aligned}$$

Exemplul 2

Fie funcția $f: N \times N \rightarrow N$, definită astfel :

$$\forall (a, b) \in N \times N; f(a, b) = 3a + b.$$

Să notăm $f(a, b) = a * b$:

- 1°. Să se arate că $f(a, b)$, este o lege de compoziție.
- 2°. Să se studieze comutativitatea și asociativitatea legii de compoziție date;
- 3°. Admite element neutru?
- 4°. Este distributivă în raport cu adunarea?

Soluție

1°. $\forall (a, b) \in N \times N, f(a, b) = 3a + b \in N$ și $f(a, b)$ este unic.

f este deci o aplicație a lui $N \times N$ în N și legea $*$ este o lege de compoziție internă în N .

$$2^\circ. a * b = 3a + b,$$

$$b * a = f(b, a) = 3b + a.$$

$$a * b = b * a \Leftrightarrow 3a + b = 3b + a \Rightarrow a - b = 0.$$

Deoarece $a \neq b$, avem $a - b \neq 0$, prin urmare legea nu este comutativă.

$$a * b = 3a + b \Rightarrow (a * b) * c = 3(3a + b) + c = 9a + 3b + c.$$

$$b * c = 3b + c \Rightarrow a * (b * c) = 3a + (3b + c) \neq 9a + 3b + c.$$

Legea $*$ nu este asociativă.

3°. Dacă e este un element neutru la dreapta atunci avem :

$$\forall a \in N, a * e = a \Leftrightarrow 3a + e = a \Leftrightarrow 2a + e = 0.$$

Elementul e nu este independent de a și prin urmare legea nu admite un element neutru la dreapta.

Dacă e' este un element neutru la stînga atunci avem :

$$\forall b \in N, e' * b = b \Leftrightarrow 3e' + b = b \Leftrightarrow 3e' = 0, e' = 0.$$

Prin urmare 0 este un element neutru la stînga.

4° $\forall (a, b, c) \in N^3$ avem :

$$a * (b + c) = 3a + b + c;$$

$$a * b + a * c = 3a + b + 3a + c = 6a + b + c \neq 3a + b + c.$$

Legea $*$ nu este distributivă în raport cu adunarea.

Exemplul 3

Pe mulțimea Z se consideră legea de compoziție $*$ definită prin :

$$x * y = 2x + 3y - 1.$$

a) Este această lege asociativă?

b) Admite această lege un element neutru?

c) Este această lege comutativă?

Soluția

a) Asociativitatea :

$$\begin{aligned} x * (y * z) &= x * (2y + 3z - 1) = 2x + 3(2y + 3z - 1) - 1 = \\ &= 2x + 6y + 9z - 4. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (x * y) * z &= (2x + 3y - 1) * z = 2(2x + 3y - 1) + 3z - 1 = \\
 &= 4x + 6y + 3z - 3; \\
 x * (y * z) &\neq (x * y) * z.
 \end{aligned}$$

Deci legea nu este asociativă.

b) Element neutru :

$$\forall x \in \mathbb{Z} ; x * e = e * x = x,$$

$$x * e = 2x + 3e - 1 = x \Leftrightarrow 3e = 1 - x \Leftrightarrow e = \frac{1 - x}{3},$$

e este dependent de x și prin urmare legea $*$ nu admite element neutru.

c) Comutativitatea :

$$x * y = 2x + 3y - 1,$$

$$y * x = 2y + 3x - 1,$$

$$x * y \neq y * x.$$

Legea nu este prin urmare comutativă.

Exemplul 4.

Se consideră mulțimea $E = \{a, b, c, d\}$ și o lege de compoziție notată $*$, a cărei tabelă, dată mai jos, este parțial cunoscută.

	a	b	c	d
a			a	c
b			b	
c	a	b	c	d
d	c		d	

Este posibil să completăm această lege astfel ca :

1. legea să fie comutativă;
2. să posede un element neutru;
3. orice element să aibă un simetric.

Soluție

Pentru ca legea să fie comutativă trebuie ca în căsuțele simetrice față de diagonala principală să avem aceiași termeni :

Din tablou rezultă că avem :

$$a * c = c * a = a \quad (1)$$

$$d * a = a * d = c. \quad (2)$$

Deoarece legea este simetrică trebuie să avem :

$$b * c = b. \quad (3)$$

Din (1) și (3) rezultă că c este un element neutru. Prin urmare putem completa toate căsuțele care sînt la intersecția liniei sau coloanei ce conține pe c cu celelalte linii sau coloant.

Mai departe $a * a$ nu poate fi a , deoarece a nu este element neutru. De aici deducem $a * a = b$, deoarece $a * d = c$.

Avem : $b * a = d$ și $c * b = d$ deoarece legea este comutativă.

Ținînd seama că legea este comutativă și fiecare element are un simetric se obțin relațiile :

$$b * b = c$$

$$b * d = d * b = a.$$

$$d * d = b$$

În final tabela legii „ $*$ ” este următoarea :

$*$	a	c	b	d
a	b	d	a	c
b	d	c	b	a
c	a	b	c	d
d	c	a	d	b

Exemplul 5

Să se arate că produsul a două izomorfisme este de asemenea un izomorfism.

Demonstrație

Fie f un izomorfism al mulțimii E în mulțimea F în raport cu două legi de compoziție notate $*$ și \top , legea lui E fiind notată $*$, legea lui F fiind notată \top .

Fie g un izomorfism al mulțimii F în mulțimea H în care s-a definit o lege de compoziție notată θ .

1) Deoarece f și g sînt izomorfisme, ele sînt bijective (un izomorfism este o aplicație bijectivă) și deci $g \circ f$ este bijectivă.

2) Ne rămîne să arătăm că $g \circ f$ este un omomorfism.

f fiind un izomorfism : $f(x * y) = f(x) \top f(y)$,

g fiind de asemeni izomorfism : $g[f(x) \top f(y)] = g[f(x)] \theta g[f(y)]$.

Din aceste două egalități deducem :

$$g[f(x * y)] = g[f(x)] \theta g[f(y)],$$

sau :

$$[g \circ f](x * y) = \{[g \circ f](x)\} \theta \{[g \circ f](y)\}.$$

Prin urmare $g \circ f$ este un omomorfism și fiind și bijectiv este un izomorfism.

Exemplul 6

Fie I mulțimea întregilor naturali de forma 2^n unde n este un întreg natural.

Să se arate că există un izomorfism a lui $(N, +)$ pe (I, \times) .

Soluție

Fie f o aplicație a lui N în I definită astfel :

$$N \xrightarrow{f} I, \forall n \in N, f(n) = 2^n = y \in I.$$

1. f este injectivă, deoarece :

$$n_1 \neq n_2 \Rightarrow 2^{n_1} \neq 2^{n_2}.$$

2. f este surjectivă, căci :

$$\forall y \in I, \exists n \in N / y = 2^n.$$

Prin urmare, din (1) și (2) rezultă că f este o aplicație bijectivă.

$$3. f(n_1) = 2^{n_1}, f(n_2) = 2^{n_2},$$

$$f(n_1 + n_2) = 2^{n_1 + n_2} = 2^{n_1} \cdot 2^{n_2} = f(n_1) \cdot f(n_2).$$

f este prin urmare un omomorfism.

$$[f \text{ omomorfism} \wedge f \text{ bijectie}] \Leftrightarrow f \text{ izomorfism}.$$

16.5. EXERCII ȘI PROBLEME

1. Pe mulțimea $R \times R$ se consideră o lege de compoziție definită astfel :

$$a * b = \frac{a \cdot b}{2}$$

Să se calculeze $4 * 5$.

2. Se consideră legea : $a \top b = a^2 + b$. Este aceasta o lege de compoziție în N ? Este o lege de compoziție în Z ? Este o lege de compoziție în Q ?

Să se calculeze : $3 \top 5$.

3. Se consideră legea $a * b = a + b + ab$. Este aceasta o lege de compoziție în N sau în Z ?

4. Pe mulțimea N se consideră legea de compoziție $a \theta b = a^b$. Să se afle : $3 \theta 5$, $3 \theta 2$. Legea este comutativă? Este asociativă?

5. Pe mulțimea N se consideră legea de compoziție internă $x * y = xy + x^2 + y^2$. Este această lege comutativă?

6. Pe mulțimea Q se consideră legea de compoziție internă $a \theta b = \frac{a+b}{2}$. Este această lege asociativă?

7. Pe mulțimea $A = \{a, b, c, d\}$, se consideră o lege de compoziție internă dată de tabloul desenat mai jos.

Este această lege asociativă? Dar comutativă?

\top	a	b	c	d
a	c	b	d	a
b	c	d	c	b
c	b	a	a	c
d	d	c	b	d

8. Să se studieze existența elementului neutru în mulțimea N având legile de compoziție indicate mai jos :

$$x * y = x^3 + y^3,$$

$$x \square y = x(x + y).$$

9. În mulțimea N se consideră o lege de compoziție internă indicată de relația :

$$x * y = x^3 + y^3.$$

Să se cerceteze dacă există elemente regulate.

10. În mulțimea $E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ se definește legea de compoziție internă $*$, definită astfel :

$$x * y = \max(x, y).$$

Să se alcătuiască tabela acestei legi de compoziție.

11. Arătați care din următoarele legi de compoziție definite pe mulțimea numerelor întregi sînt comutative.

- a) $x * y = x + 2y$;
- b) $x * y = 2xy$;
- c) $x * y = 2x + 2y$;
- d) $x * y = x^y$;
- e) $x * y = x + y + 1$.

12. Arătați care din următoarele legi de compoziție definite pe R_+ sînt asociative:

- a) $x * y = x + y$;
- b) $x * y = xy^2$;
- c) $x * y = x^y$;
- d) $x * y = \sqrt{xy}$;
- e) $x * y = xy - 1$.

13. Se dau două legi de compoziție notate $*$ și $\#$, definite astfel:

- a) $x \# y = x + y, x * y = xy$;
- b) $x \# y = 2x + 2y, x * y = \frac{xy}{2}$;
- c) $x \# y = x + y + 1, x * y = xy$.

Arătați în care din aceste cazuri legile $\#$ sînt distributive față de legile $*$.

14. Pe mulțimea R se definește legea de compoziție internă $*$ astfel:

$$\forall (a, b) \in R \times R, a \neq b, a * b = \frac{a^2 - b^2}{a - b}$$

a) Să se arate că această lege este comutativă, asociativă și că posedă un element neutru e .

b) Se pot obține aceste rezultate mai simplu?

15. Se consideră legea de compoziție asociativă f definită pe mulțimea E astfel :

$$\forall (x, y) \in E^2; f(x, y) = x * y = z, z \in E.$$

Să se demonstreze că această lege nu admite mai mult de un element neutru.

16. Pe mulțimea N se definește o lege de compoziție internă θ astfel :

$$x \theta y = x + 3y.$$

Acastă lege este distributivă în raport cu adunarea ?
Adunarea este distributivă în raport cu legea θ ?

17. Pe mulțimea Z se consideră legea definită astfel :

$$x * y = 2x + 3y - 1.$$

a) Această lege este asociativă ?

b) Are un element neutru ?

c) Este comutativă ?

18. Pe mulțimea numerelor reale se consideră legea $a * b = a^2 + b^2 + ab$.

a) Să se arate că această lege nu este asociativă ;

b) Să se determine x din relația : $x * 3 = 10$.

19. Pe mulțimea Z se consideră o lege de compoziție internă \top dată de relația : $x \top y = 2x + y$.

Să se cerceteze dacă în raport cu legea de compoziție internă \top există elemente regulate.

20. Se dă : $R_+ = \{x \mid x > 0, x \in R\}$.

Pe R_+ se definește următoarea lege :

$$x * y = \sqrt{xy}.$$

Să se arate că legea este comutativă dar nu-i asociativă.

21. Fie a și b , două numere reale nenule.

Se definește între aceste numere reale legea de compoziție, astfel :

$$a * b = \frac{a}{b} + \frac{b}{a}.$$

- a) Să se arate că această lege este comutativă;
- b) Să se arate că în general legea nu este asociativă;
- c) Ce condiție trebuie să îndeplinească numerele a, b, c pentru ca această lege să fie asociativă?

22. Fie legea de compoziție notată cu semnul $*$ definită pe mulțimea $[1, \infty)$ prin :

$$x * y = (x - 1)(y - 1) + a.$$

- a) Să se afle valoarea minimă a lui a pentru care legea este peste tot definită pe mulțimea $[1, \infty)$;
- b) Să se determine a astfel încât legea să admită un element neutru.

Indicație :

$$\begin{aligned} (x - 1)(e - 1) + a = x &\Leftrightarrow xe - e - x + 1 + a = x \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow e(x - 1) = 2x - (1 + a) &\Rightarrow 1 + a = 2 \Rightarrow e = 2. \end{aligned}$$

Capitolul 17

STRUCTURI ALGEBRICE

Se consideră o mulțime E pe care s-a definit cel puțin o lege de compoziție internă $*$. Mulțimea E împreună cu legea de compoziție internă $*$ se numește *structură algebrică* și se notează $(E, *)$.

17.1. GRUP

Definiție 5.1.

O mulțime E pe care s-a definit o lege de compoziție internă notată $*$, se numește *grup* dacă legea de compoziție are următoarele proprietăți :

- 1) Legea este asociativă :

$$\forall x, y, z \in E : (x * y) * z = x * (y * z);$$

- 2) Legea posedă un element neutru ;

$$\exists e \in E \text{ astfel încît :}$$

$$\forall x \in E, x * e = e * x = x;$$

- 3) Fiecare element al lui E , are un simetric care este de asemenea element al lui E .

$$\forall x \in E, \exists x^{-1} \in E \text{ astfel încît } x * x^{-1} = x^{-1} * x = e.$$

Un grup se notează indicînd mulțimea E și legea sa de compoziție $*$ sau $(E, *)$.

Dacă legea de compoziție dată este comutativă, atunci grupul se mai numește comutativ sau abelian.

Exemple :

1. Mulțimea \mathbb{Z} a numerelor întregi împreună cu operația de adunare formează grupul $(\mathbb{Z}, +)$.

17.1.1. PROPRIETĂȚILE UNUI GRUP

a) Simetricul unui element este unic.

b) Orice element al unui grup este regulat pentru operația grupului.

c) Într-un grup ecuația $a * x = b$ are o soluție și numai una (* este operația grupului).

Demonstrație

Să notăm a^{-1} simetricul elementului a și avem :

$$a^{-1} * (a * x) = a^{-1} * b$$

sau :

$$(a^{-1} * a) * x = a^{-1} * b,$$

$$e * x = a^{-1} * b \Leftrightarrow x = a^{-1} * b.$$

d) Într-un grup ecuația $y * a = b$ are o soluție și numai una. Această soluție este $y = b * a^{-1}$.

17.1.2. SIMETRICUL COMPUSULUI A DOUĂ ELEMENTE

Se consideră grupul $(E, *)$ și se cere simetricul elementului $a * b$.

Să observăm că :

$$\begin{aligned} (a * b) * (b^{-1} * a^{-1}) &= a * (b * b^{-1}) * a^{-1} = (a * e) * a^{-1} = \\ &= a * a^{-1} = e. \end{aligned}$$

Prin urmare simetricul elementului $a * b$ este elementul $b^{-1} * a^{-1}$.

17.2. SUBGRUP

Definiția 17.1. Fiind dat un grup E se numește subgrup a lui E , o submulțime G a lui E care este înzestrată cu aceeași lege de compoziție internă și în raport cu care formează grup.

O submulțime G a unui grup $(E, *)$ formează subgrup dacă :

$$1) \forall x \in G, \forall y \in G, x * y \in G;$$

2) Elementul neutru e a lui E pentru legea de compoziție este de asemenea un element neutru și pentru G .

3) Dacă $a \in E$ atunci simetricul lui aparține mulțimii E .

Exemplul 1

Se consideră mulțimea R^+ , a numerelor reale pozitive și legea de compoziție $*$ definită astfel :

$\forall (a, b) \in R^+ \times R^+, a * b = \max(a, b)$, unde $\max(a, b)$ este cel mai mare din două numere date. Să se arate că legea $*$ nu determină pe R^+ o structură de grup.

Soluție

$$1) \max(a, b) = \max(b, a) \text{ (comutativitate);}$$

$$2) a \leq b \leq c \Rightarrow \begin{cases} \max(a, b) = b; \max[(a, b), c] = \max(b, c) = c. \\ \max(b, c) = c; \max[a, (b, c)] = \max(a, c) = c. \end{cases}$$

Prin urmare legea este asociativă.

$$3) \forall a \in R^+; a \geq 0 \Rightarrow \max(a, 0) = a.$$

0 este deci elementul neutru pentru legea $*$.

$$4) \forall (a, b) \in R^+ \times R^+, 0 \leq a \leq b \Rightarrow \exists x^{-1} \in R^+,$$

$$\forall x \in R^+, \sup(x, x^{-1}) \neq 0.$$

Legea $*$ nu ne permite să simetrizăm elementele lui R^+ . Deci $(R^+, *)$ nu are o structură de grup.

Exemplul 2

Se consideră mulțimea B a numerelor de forma ;

$$2^x \times 3^y \text{ unde } (x, y) \in \mathbb{Z}^{*2} (\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} - \{0\}).$$

Să se arate că (B, \times) formează grup.

Soluție**1) Comutativitate**

$$(2^{x_1} \times 3^{y_1}) \times (2^{x_2} \times 3^{y_2}) = 2^{x_1+x_2} \times 3^{y_1+y_2} = 2^{x_2+x_1} \times 3^{y_2+y_1} = (2^{x_2} \times 3^{y_2}) \times (2^{x_1} \times 3^{y_1}) - \text{comutativitate}$$

2. Asociativitate

$$[(2^x \times 3^y) \times (2^{x_1} \times 3^{y_1})] \times (2^{x_2} \times 3^{y_2}) = 2^{x+x_1+x_2} \times 3^{y+y_1+y_2}$$

$$(2^x \times 3^y) \times [(2^{x_1} \times 3^{y_1}) \times (2^{x_2} \times 3^{y_2})] = 2^{x+x_1+x_2} \times 3^{y+y_1+y_2}$$

3) Element neutru

$$(2^x \times 3^y) \times (2^{e_1} \times 3^{e_2}) = 2^{x+e_1} \times 3^{y+e_2} = 2^x \times 3^y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x + e_1 = x, y + e_2 = y \Rightarrow e_1 = e_2 = 0.$$

Elementul neutru este : $2^{e_1} \times 3^{e_2} = 2^0 \times 3^0 = 1.$

Elementul 1 este de asemenea neutru și la stînga :

$$1 \times (2^x \times 3^y) = 2^x \times 3^y.$$

e) Simetricul elementului $2^x \times 3^y$ este elementul $2^{x_1} \times 3^{y_1}$ care verifică relația :

$$(2^x \times 3^y) \times (2^{x_1} \times 3^{y_1}) = 1$$

$$2^{x+x_1} \times 3^{y+y_1} = 2^0 \times 3^0 \Rightarrow x_1 = -x; y_1 = -y.$$

Acest element este simetric la stînga deoarece avem :

$$(2^{-x} \times 3^{-y}) \times (2^x \times 3^y) = 1$$

(B, \times) este prin urmare un grup.

Exemplul 3

Să se arate că dacă există un omomorfism între două grupuri G_1 și G_2 , imaginea elementului neutru a lui G_1 prin acest omomorfism este elementul neutru a lui G_2 .

Demonstrație :

Să notăm cu f omomorfismul, prin e_1 și e_2 elementele neutre, respectiv, ale lui G_1 și G_2 .

Fie $*$ legea de compoziție internă a lui G_1 și θ legea lui G_2 .
Vom avea :

$$f(x * e_1) = f(x) \theta f(e_1), \quad \forall x \in G_1.$$

Dar $f(x * e_1) = f(x)$ și prin urmare avem :

$$f(x) = f(x) \theta f(e_1)$$

De unde rezultă că, dacă e_1 este element neutru pentru legea $*$, atunci $f(e_1)$ este element neutru pentru legea θ .

Exemplul 4

Într-un reper ortonormat se consideră cercul (c) de ecuație :

$$x^2 + y^2 = 1$$

Fiind date două puncte $M(x, y)$ și $M'(x', y')$ distincte sau nu, se definește punctul S , de coordonate X, Y date de relațiile :

$$\begin{cases} X = xx' - yy' \\ Y = xy' + x'y \end{cases}$$

Să notăm $S = M * M'$

- 1°. Să se arate că legea este o lege de compoziție internă pe (c) ;
- 2°. Să se arate că $((c), *)$ este un grup abelian.

Soluție

1. Legea $*$ este o lege de compoziție internă :

$$\begin{cases} M \in (c) \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1 \\ M' \in (c) \Leftrightarrow x'^2 + y'^2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Deci: } X^2 + Y^2 &= (xx' - yy')^2 + (xy' + x'y)^2 = \\ &= x^2x'^2 + y^2y'^2 + x^2y'^2 + x'^2y^2 = \\ &= x^2(x'^2 + y'^2) + y^2(x'^2 + y'^2) = 1 \end{aligned}$$

$$\text{De unde: } X^2 + Y^2 = 1 \Leftrightarrow S(X, Y) \in (c).$$

2.a) Asociativitatea :

Fie $M(x, y)$, $M'(x', y')$, $M''(x'', y'')$, avem :

$$M * M' ; \begin{cases} x = xx' - yy' \\ y = xy' + x'y \end{cases} \Rightarrow (M * M') * M'' :$$

$$\begin{cases} x_1 = xx'' - yy'' \\ y_1 = xy'' - x''y \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Fie } x_1 &= (xx' - yy')x'' - x''(xy' + x'y) \\ &= xx'y'' - yy'y'' + xx''y' + x'x''y. \end{aligned}$$

Pe de altă parte avem :

$$M' * M'' \begin{cases} x = x'x'' - y'y'' \\ y = x'y'' - y'x'' \end{cases} \Rightarrow (M * M') * M''$$

$$\begin{cases} x_2 = xx' - yy' \\ y_2 = xy' - yx' \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Fie : } x_2 &= x'x''x - xy'y'' - yx'y'' - yy'x'' \\ y_2 &= xx'y'' + xyx'' + yx'a'' - yy'y' \end{aligned}$$

Se constată că :

$$x_1 = x_2$$

$y_1 = y_2$, și, prin urmare, avem :

$$M * (M' * M'') = (M * M') * M''.$$

b) Comutativitatea :

$$M * M' : \begin{cases} x = xx' - yy' = x'x - y'y \\ y = xy' + yx = x'y + y'x \end{cases} : M' * M.$$

c) Element neutru : Fie $I(e_1, e_2)$ elementul neutru.

$$M * I = M : \begin{cases} e_1x + e_2y = x \\ e_2x + e_1y = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(e_1 - 1) - e_2y = 0 \\ e_2x + y(e_1 - 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e_1 = 1 \\ e_2 = 0 \end{cases}$$

Elementul neutru este $I(1, 0)$.

d) Simetricul unui element,

Fie $\bar{M}(\bar{x}, \bar{y})$ simetricul unui element $M(x, y)$

$$\begin{aligned} M * \bar{M} = I &\Rightarrow \begin{cases} x\bar{x} - y\bar{y} = 1 \\ \bar{y}x + \bar{x}y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2\bar{x} - yx\bar{y} = x \\ xy\bar{y} + y^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \bar{x}(x^2 + y^2) = x \text{ sau } \bar{x} = x. \end{aligned}$$

Din această relație obținem :

$$\begin{aligned} x\bar{y} + \bar{x}y &= 0 \Leftrightarrow x\bar{y} + xy = 0 \Leftrightarrow x(y + \bar{y}) = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \bar{y} = -y, \text{ sau } M(x, y). \end{aligned}$$

Mulțimea (c), înzestrată cu legea $*$ este prin urmare un grup abelian.

17.3. INEL

O mulțime E înzestrată cu două legi de compoziție interne, notate $*$ și \perp , este un inel dacă cele două legi de compoziție au următoarele proprietăți :

- 1) $(E, *)$ este un grup abelian ;
- 2) Cea de a doua lege de compoziție \perp , este distributivă față de prima și asociativă.

Observație. În general prima lege va fi notată $+$ și se numește adunare, iar cea de a doua lege se notează \times și se numește înmulțire.

Cazuri particulare

a) Dacă cea de a doua lege de compoziție notată multiplicativ este comutativă, atunci inelul se numește comutativ.

b) Dacă cea de a doua lege de compoziție are element neutru, inelul se numește unitar.

c) Dacă a și b sînt două elemente oarecare ale inelului $(E, +, \times)$ și dacă $a \times b = 0$, cu $a \neq 0$ și $b \neq 0$, se spune că a și b sînt divizori ai lui zero.

Un inel comutativ care nu posedă elemente divizori ai lui zero, se numește domeniu de integritate.

Exemplul 1

Se consideră mulțimea F a funcțiilor definite pe R cu valori în R .

Pe mulțimea F vom defini două operații :

- 1) Adunarea funcțiilor,

Dacă $f(x)$ și $g(x)$ sînt două funcții, atunci adunarea funcțiilor $f(x)$ și $g(x)$ este definită prin funcția :

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x).$$

2) Înmulțirea funcțiilor este o operație care la două funcții $f(x)$ și $g(x)$ face să corespundă funcția : $f(x) \times g(x) = (f \cdot g)(x)$
Mulțimea $(F, +, \times)$ este un inel comutativ.

- 1) $f(x) + g(x) = g(x) + f(x)$ — comutativitate;
- 2) $f(x) + [g(x) + h(x)] = [f(x) + g(x)] + h(x)$ — asociativitate;
- 3) $f(x) + 0 = f(x)$;
- 4) $f(x) + (-f(x)) = 0$.

Deci $(F, +)$ este un grup comutativ.

- 1) $f(x) \times [g(x) + h(x)] = f(x) \times g(x) + f(x) \times h(x)$;
- 2) $f(x) \times [g(x) \times h(x)] = [f(x) \times g(x)] \times h(x)$;
- 3) $f(x) \times g(x) = g(x) \times f(x)$.

Mulțimea $(F, +, \times)$ este un inel comutativ.

Exemplul 2

Să se demonstreze că într-un inel $(E, +, \times)$ avem relațiile :

$$(-a) \times b = -(a \times b) \text{ și } (-a) \times (-b) = a \times b.$$

Demonstrație.

Elementul $-(a \times b)$ este simetricul elementului $(a \times b)$ față de adunare.

Din proprietatea de asociativitate deducem :

$$a \times b + (-a) \times b = [a + (-a)] \times b.$$

Dar : $a + (-a) = 0$ și prin urmare avem :

$$a \times b + (-a) \times b = 0.$$

Deci $(-a) \times b$ este simetricul lui $a \times b$.

Deoarece într-un grup abelian simetricul unui element este unic, avem : $(-a) \times b = -(a \times b)$.

2. Să arătăm că : $(-a) \times (-b) = a \times b$.

Am demonstrat anterior că : $a \times b$ este simetricul elementului $(-a) \times b$.

Ținând seama de proprietatea de distributivitate, avem :

$$(-a) \times b + (-a) \times (-b) = (-a) \times [b + (-b)] = -a \times 0 = 0$$

Prin urmare $(-a) \times (-b)$ este simetricul elementului

$(-a) \times b$. Deoarece $(a \times b)$ este și el simetricul elementului $(-a) \times b$, rezultă că $(-a) \times (-b) = a \times b$.

17.4. CORP

Definiție 17.3.

O mulțime C , înzestrată cu două legi de compoziție interne : $*$, \perp , formează corp dacă :

1) $(C, *, \perp)$ este un inel.

2) Elementul e fiind element neutru pentru legea de compoziție notată $*$, mulțimea $C - \{e\}$ formează grup față de cea de-a doua lege de compoziție.

Observație

Corpul se numește comutativ dacă cea de a doua lege de compoziție este comutativă.

Proprietăți

Într-un corp C nu există divizori ai lui zero.

Demonstrație

Fie $a \times b = 0$ ($a, b \in C$) și vom presupune că $b \neq 0$.

În general prima lege se notează cu $+$ și se numește *adunare* iar cea de a doua se notează cu \times și se numește *înmulțire*.

Dacă $b \neq 0$, $\exists b^{-1}$, astfel încît $(a \times b) \times b^{-1} = 0 \times b^{-1} = 0$ sau :

$$a \times (b \times b^{-1}) = 0 \Leftrightarrow a \times 1 = 0 \Rightarrow a = 0$$

unde prin 0 am însemnat elementul neutru față de prima lege iar prin 1, elementul neutru față de cea de a doua lege de compoziție

Prin urmare dacă $a \times b = 0$ atunci cel puțin unul din elementele a sau b este egal cu zero.

2. Într-un corp C , ecuațiile $a + x = b$ și $ax = b$ au soluții unice.

Demonstrația acestor proprietăți este evidentă și o lăsăm în seama cititorilor.

17.5. SUBCORP

Se consideră corpul $(C, +, \times)$. O submulțime S a lui C înzestrată cu aceleași legi de compoziție notate $+$, \times , formează subcorp a lui C , dacă $(S, +, \times)$ este un corp.

Proprietăți

Intersecția unui număr finit de subcorpuri a lui C este și el un subcorp a lui C .

Demonstrație

Fie S_1, S_2, \dots, S_n subcorpuri ale lui C .

Să notăm $X = \bigcap_{i=1}^n S_i$

$$\forall x, y \in X \Rightarrow x, y \in S_i \Rightarrow x + y \in S_i \Rightarrow x + y \in X,$$

pentru $i = 1, 2, \dots, n$.

$$\forall x, y \in X \Rightarrow x, y \in S_i \Rightarrow x \times y \in S_i \Rightarrow x \times y \in X,$$

pentru orice $i = 1, 2, \dots, n$.

$$y \in X \Rightarrow y \in S_1 \wedge y \in S_2 \wedge \dots \wedge y \in S_n \Rightarrow -y \in S_1 \wedge$$

$\wedge -y \in S_2 \wedge \dots \wedge -y \in S_n$ (deoarece S_1, S_2, \dots, S_n sînt subcorpuri ale lui S).

Din aceleași considerente, deducem că :

$$y^{-1} \in S_1 \wedge y^{-1} \in S_2 \wedge \dots \wedge y^{-1} \in S_n.$$

Prin urmare, avem :

$$[y + (-y)] \in S_1 \wedge [y + (-y)] \in S_2 \wedge \dots \wedge [y + (-y)] \in S_n$$

$$(y \times y^{-1}) \in S_1 \wedge (y \times y^{-1}) \in S_2 \wedge \dots \wedge y \times y^{-1} \in S_n$$

Prin urmare : $[y + (-y)] \in S$; $y \times y^{-1} \in S$.

Elementele 0 și 1 aparțin mulțimii S . Mulțimea S formează un subcorp.

17.6. EXERCIIU REZOLVATE

Exemplul 1

Se consideră o mulțime formată din trei elemente $K = \{0, 1, 2\}$, în care adunarea și înmulțirea sînt definite prin următoarele tabele :

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

×	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

Să se arate că mulțimea $(K, +, \times)$ este un corp.

Soluție

Trebuie să verificăm că cea de a doua lege de compoziție este distributivă față de prima, folosind compusele a două elemente prin cele două legi de compoziție date de tabelele de corespondență.

Avem :

$$1 \times (1 + 2) = 1 \times 0 = 0 \wedge 1 \times 1 + 1 \times 2 = 1 + 2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 \times (1 + 2) = 1 \times 1 + 1 \times 2;$$

$$1 \times (1 + 0) = 1 \times 1 = 1 \wedge 1 \times 1 + 1 \times 0 = 1 + 0 = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 \times (1 + 0) = 1 \times 1 + 1 \times 0;$$

$$\begin{aligned}
1 \times (1 + 1) &= 1 \times 2 = 2 \wedge 1 \times 1 + 1 \times 1 = 1 + 1 = 2 \Rightarrow \\
&\Rightarrow 1 \times (1 + 1) = 1 \times 1 + 1 \times 1; \\
2 \times (1 + 0) &= 2 \times 1 = 2 \wedge 2 \times 1 + 2 \times 0 = 2 + 0 = 2 \Rightarrow \\
&\Rightarrow 2 \times (1 + 0) = 2 \times 1 + 2 \times 0; \\
2 \times (1 + 2) &= 2 \times 0 = 0 \wedge 2 \times 1 + 2 \times 2 = 2 + 1 = 0 \Rightarrow \\
&\Rightarrow 2 \times (1 + 2) = 2 \times 1 + 2 \times 2; \\
2 \times (1 + 1) &= 2 \times 2 = 1 \wedge (2 \times 1) + (2 \times 1) = 2 + 2 = 1 \Rightarrow \\
&\Rightarrow 2 \times (1 + 1) = 2 \times 1 + 2 \times 1.
\end{aligned}$$

Cea de-a doua lege este prin urmare distributivă față de prima. Se verifică ușor că mulțimile $(K, +)$ și $(K - \{0\}, \times)$ sînt grupuri comutative.

Exemplul 2

Să se arate că mulțimea $Q^* = Q - \{0\}$ (Q fiind mulțimea numerelor raționale) în care s-au definit două legi de compoziție notate \top și θ astfel: $a \top b = a + b - 1$, $a \theta b = a + b - ab$, formează corp.

Soluție

Se verifică ușor că (Q^*, \top) și (Q^*, θ) sînt grupuri abeliene. Trebuie să verificăm că cea de-a doua lege de compoziție este distributivă față de prima.

$$\begin{aligned}
a \theta (b \top c) &= a \theta (b + c - 1) = a + (b + c - 1) - a(b + c - 1) = \\
&= a + b + c - 1 - ab - ac + a = 2a + b + c - ab - ac - 1. \\
(a \theta b) \top (a \theta c) &= (a + b - ab) \top (a + c - ac) = \\
&= (a + b - ab) + (a + c - ac) - 1 = 2a + b + c - ab - ac - 1.
\end{aligned}$$

Prin urmare (Q^*, \top, θ) este un corp.

17.7. SPAȚIU VECTORIAL

Definiție 15.5.

Să presupunem că mulțimea Ω formează corp față de două legi de compoziție interne — una notată aditiv și alta multiplicativ.



Două legi de compoziție definite pe mulțimea E , una internă numită adunare, și alta externă, față de Ω numită înmulțirea cu elemente din Ω , determină pe E o structură de spațiu vectorial peste corpul Ω , dacă :

1. Mulțimea $(E, +)$ formează un grup comutativ :

Elementele mulțimii E le vom desemna prin literele $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$.

- a) $\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$, oricare ar fi : $\vec{x}, \vec{y} \in E$;
- b) $(\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} = \vec{x} + (\vec{y} + \vec{z})$, oricare ar fi : $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in E$;
- c) $\vec{x} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{x} = \vec{x}$, oricare ar fi : $\vec{x} \in E$;
- d) $\vec{x} + (-\vec{x}) = \vec{0}$ oricare ar fi : $\vec{x} \in E$.

2. Legea de compoziție externă satisface următoarele proprietăți :

- a) $1 \cdot \vec{x} = \vec{x}$ pentru orice $\vec{x} \in E$.

Se notează cu 1 elementul neutru față de legea multiplicativă definită în corpul Ω .

- b) $(\alpha + \beta)\vec{x} = \alpha\vec{x} + \beta\vec{x}$;
- c) $\alpha(\beta\vec{x}) = (\alpha\beta)\vec{x}$;
- d) $\alpha(\vec{x} + \vec{y}) = \alpha\vec{x} + \alpha\vec{y}$;

pentru orice $\alpha, \beta \in \Omega$ și pentru orice $\vec{x}, \vec{y} \in E$.

Elementele spațiului vectorial se numesc *vectori*. Elementele corpului Ω se numesc *scalari*. Înmulțirea cu elemente din Ω se numește înmulțirea vectorilor cu scalari.

Dacă corpul Ω este mulțimea numerelor reale, adică $\Omega = R$, E se numește *spațiu vectorial real*.

În aplicațiile pe care le vom face mai târziu în această lucrare, ne vom folosi de proprietățile deduse din considerarea unor spații vectoriale reale.

În cele ce urmează, este necesar să facem o distincție între elementele 0 și $\vec{0}$. Elementul 0 este element neutru față de operația de adunare în R . Elementul $\vec{0}$ este element neutru față de operația de adunare a vectorilor ; 0 este un scalar, în timp ce $\vec{0}$ este un vector.

17.7.1. APLICAȚII LINIARE

Fie E și F două spații vectoriale peste același corp R . O aplicație f a lui E în F , se numește *liniară* dacă oricare ar fi $\vec{x}, \vec{y} \in E$ și $\alpha \in R$ avem :

$$f(\vec{x} + \vec{y}) = f(\vec{x}) + f(\vec{y}); f(\alpha\vec{x}) = \alpha f(\vec{x}).$$

Pentru orice spațiu vectorial E , aplicația $E \xrightarrow{f} E$ dată de relația $f_E(\vec{x}) = \vec{x}$ ($\vec{x} \in E$) este o aplicație liniară și se numește aplicația identică a lui E .

17.7.2. CONSECINȚE DEDUSE DIN AXIOMELE SPAȚIULUI VECTORIAL

a) Pentru orice $\alpha \in R$ avem $\alpha \cdot \vec{0} = \vec{0}$;

b) Pentru orice $\vec{x} \in E$, avem $0 \cdot \vec{x} = \vec{0}$.

Lăsăm în seama cititorului verificarea acestor proprietăți.

17.7.3. EXEMPLE DE SPAȚII VECTORIALE

1) Produsul cartezian $R \times R$ este un spațiu vectorial peste R . Elementele mulțimii $R \times R$ sînt perechi ordonate de forma

$\vec{a} = (x, y)$, unde $x \in R, y \in R$.

Două elemente (x_1, y_1) și (x_2, y_2) ale produsului cartezian $R \times R$ sînt identice dacă $x_1 = x_2$ și $y_1 = y_2$. În general perechea $(x, y) \neq (y, x)$, deoarece definesc elemente diferite din $R \times R$.

În această mulțime definim adunarea și înmulțirea cu scalari prin :

$$a) (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2);$$

$$b) \alpha(x, y) = (\alpha x, \alpha y).$$

(a) Adunarea are următoarele proprietăți :

1) Este comutativă :

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_2, y_2) + (x_1, y_1). \quad (1)$$



Proprietatea este o consecință imediată a proprietății de comutativitate a operației de adunare definită în mulțimea numerelor reale.

$$\begin{aligned}(x_1, y_1) + (x_2, y_2) &= (x_1 + x_2, y_1 + y_2) = \\ &= (x_2 + x_1, y_2 + y_1) = (x_2, y_2) + (x_1, y_1).\end{aligned}\quad (2)$$

2) Este asociativă :

$$\begin{aligned}[(x_1, y_1) + (x_2, y_2)] + (x_3, y_3) &= (x_1, y_1) + \\ &+ [(x_2, y_2) + (x_3, y_3)].\end{aligned}$$

Proprietatea este o consecință directă a proprietății de asociativitate a operației de adunare în R .

$$\begin{aligned}[(x_1, y_1) + (x_2, y_2)] + (x_3, y_3) &= [(x_1 + x_2), (y_1 + y_2)] + \\ &+ (x_3, y_3) = [(x_1 + x_2) + x_3, (y_1 + y_2) + y_3] = (x_1 + x_2 + x_3, \\ &y_1 + y_2 + y_3) \\ (x_1, y_1) + [(x_2, y_2) + (x_3, y_3)] &= (x_1, y_1) + [(x_2 + x_3, y_2 + y_3)] = \\ &= [x_1 + (x_2 + x_3), y_1 + (y_2 + y_3)] = (x_1 + x_2 + x_3, y_1 + y_2 + y_3).\end{aligned}$$

Din aceste relații rezultă proprietatea cerută.

3) *Element neutru*

Pentru orice $(x, y) \in R \times R$ există $(e_1, e_2) \in R \times R$ avînd proprietatea

$$(x, y) + (e_1, e_2) = (x, y). \quad (3)$$

Membrul stîng al acestei egalități se transformă și relația se scrie.

$$(x + e_1, y + e_2) = (x, y).$$

Din această relație, deducem :

$$x + e_1 = x; y + e_2 = y \Rightarrow e_1 = 0, e_2 = 0.$$

Prin urmare perechea $(0, 0)$ este elementul neutru pentru adunare.

4) *Element simetric*

Pentru orice $(x, y) \in R \times R$ există (x', y') cu proprietatea :

$$(x, y) + (x', y') = (0, 0). \quad (4)$$

Din relația (4) deducem : $(x + x', y + y') = (0, 0)$ sau $x + x' = 0$, $y + y' = 0 \Rightarrow x' = -x$ și $y' = -y$. Prin urmare, simetricul elementului (x, y) este elementul $(-x, -y)$.

(b) Înmulțirea cu un scalar are următoarele proprietăți :

1) Este o lege de compoziție externă ;

2) Pentru orice $(x, y) \in R \times R$, $1 \cdot (x, y) = (x, y)$. Această proprietate este evidentă și rezultă din definiția operației de înmulțire cu un scalar.

3) Înmulțirea cu un scalar este distributivă față de adunarea în R^2 .

Pentru orice $\alpha \in R$ și $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in R^2$ avem :

$$\alpha[(x_1, y_1) + (x_2, y_2)] = \alpha(x_1, y_1) + \alpha(x_2, y_2).$$

Demonstrație

$$\begin{aligned} \alpha[(x_1, y_1) + (x_2, y_2)] &= \alpha(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = \\ &= [\alpha(x_1 + x_2), \alpha(y_1 + y_2)] = (\alpha x_1 + \alpha x_2, \alpha y_1 + \alpha y_2) = \\ &= (\alpha x_1, \alpha y_1) + (\alpha x_2, \alpha y_2) = \alpha(x_1, y_1) + \alpha(x_2, y_2). \end{aligned}$$

4) Înmulțirea este distributivă față de adunarea numerelor reale.

Pentru orice $\alpha, \beta \in R$ și pentru orice $(x, y) \in R \times R$ avem :

$$(\alpha + \beta)(x, y) = \alpha(x, y) + \beta(x, y).$$

Demonstrație

$$\begin{aligned} (\alpha + \beta)(x, y) &= [(\alpha + \beta)x, (\alpha + \beta)y] = (\alpha x + \beta x, \alpha y + \\ &+ \beta y) = (\alpha x, \alpha y) + (\beta x, \beta y) = \alpha(x, y) + \beta(x, y). \end{aligned}$$

5) Înmulțirea cu un scalar este asociativă față de produsul numerelor reale.

Pentru orice $\alpha, \beta \in R$ și pentru orice $(x, y) \in R \times R$ avem :

$$\alpha[\beta(x, y)] = (\alpha\beta)(x, y).$$

Demonstrație

$$\alpha[\beta(x, y)] = \alpha(\beta x, \beta y) = (\alpha\beta x, \alpha\beta y) = (\alpha\beta)(x, y)$$

Observații :

1) Produsul oricărui număr real cu perechea $(0, 0)$, elementul neutru al mulțimii $(R \times R)$, este $(0, 0)$.

$$\alpha(0, 0) = (\alpha \cdot 0, \alpha \cdot 0) = (0, 0).$$

2) Dacă înmulțim cu numărul 0 orice pereche (x, y) , obținem perechea $(0, 0)$. Într-adevăr,

$$0 \cdot (x, y) = (0x, 0y) = (0, 0).$$

3) Proprietățile legilor de compoziție care definesc o structură de spațiu vectorial $R \times R$ peste corpul R se pot generaliza în cazul mulțimii $R \times R \times \dots \times R = R^n$.

Se poate arăta că un element din R^n este format dintr-un sistem de n numere (x_1, x_2, \dots, x_n) , unde $x_i \in R, i = 1, 2, \dots, n$.

Cele două legi de compoziție se definesc asemănător ca în $R \times R$.

a) *Adunarea*

$$\begin{aligned} (x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) = \\ = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n). \end{aligned}$$

b) *Înmulțirea cu un scalar*

$$\alpha(x_1, x_2, \dots, x_n) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n).$$

Se verifică că $(R^n, +)$ este un spațiu vectorial peste R . Alte exemple :

1) Să considerăm mulțimea sistemelor ordonate de trei numere din corpul R al numerelor reale.

Suma a două sisteme din trei numere și înmulțirea cu un scalar sînt definite astfel :

$$\vec{x} + \vec{y} = (x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$$

$$x = \alpha(x_1, y_1, z_1) = (\alpha x_1, \alpha y_1, \alpha z_1), \alpha \in R.$$

Se poate verifica ușor că sînt satisfăcute toate axiomele spațiului vectorial.

2) Se consideră mulțimea funcțiilor continue de o variabilă, definite pe intervalul (a, b) cu valori în corpul R . Suma a două funcții continui și produsul unei funcții cu un scalar sînt tot funcții continui.

Mulțimea funcțiilor continui definite pe intervalul (a, b) cu valori în R , formează un spațiu vectorial.

17.7.4. COMBINAȚIE LINIARĂ A VECTORILOR

Să considerăm un spațiu vectorial (R^n) și m vectori $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_m$, care sînt elemente ale spațiului vectorial.

Vectorul $\vec{d} = \alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \dots + \alpha_m \vec{a}_m$ (unde $\alpha_i \in R, i = 1, 2, \dots, m$) este un element al lui R și se numește combinație liniară a vectorilor considerați.

Exemple :

Am arătat că mulțimea formată din perechile ordonate din două numere reale formează un spațiu vectorial, pe care-l notăm R^2 .

Să considerăm doi vectori \vec{x}_1 și \vec{x}_2 care aparțin spațiului vectorial R^2 .

Vectorul $\vec{x} = \alpha_1 \vec{x}_1 + \alpha_2 \vec{x}_2$ aparține lui R^2 și se numește combinație liniară a vectorilor \vec{x}_1 și \vec{x}_2 .

Fie vectorii : $\vec{x}_1 = (1, 2), \vec{x}_2 = (3, 4)$.

$$\begin{aligned}\vec{x} &= \alpha_1 \vec{x}_1 + \alpha_2 \vec{x}_2 = \alpha_1(1, 2) + \alpha_2(3, 4) = \\ &= (\alpha_1, 2\alpha_1) + (3\alpha_2, 4\alpha_2) = (\alpha_1 + 3\alpha_2, 2\alpha_1 + 4\alpha_2).\end{aligned}$$

17.7.5. INDEPENDENȚA LINIARĂ A VECTORILOR

Să considerăm în spațiu vectorial R^n un sistem de m vectori $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_m$. Dacă se pot găsi m numere $\alpha_1, \dots, \alpha_m$, nu toate nule, astfel ca $\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \alpha_3 \vec{a}_3 + \dots + \alpha_m \vec{a}_m = \vec{0}$, spunem că vectorii $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_m$ sînt *liniar dependenți*.

Un sistem de vectori $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_m$, care nu sînt liniari dependenți, se numesc liniari independenți.

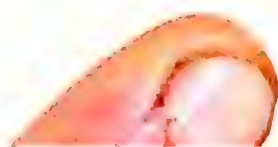
Dacă vectorii sînt liniari independenți, relația

$$\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \dots + \alpha_m \vec{a}_m = \vec{0}$$

este satisfăcută numai dacă toți coeficienții sînt nuli.

Din definiția dependenței liniare a vectorilor, rezultă următoarele proprietăți :

1. Vectorii $\vec{0}, \vec{v}_1 \dots \vec{v}_m$ sînt liniari dependenți.



Egalitatea $1 \cdot \vec{0} + 0 \cdot \vec{V}_1 + 0 \cdot \vec{V}_2 + \dots + 0 \cdot \vec{V}_m = \vec{0}$ este deci satisfăcută.

2. Dacă un sistem de vectori $\vec{V}_1, \dots, \vec{V}_m$ este liniar independent, orice subsistem al său $\vec{V}_1, \dots, \vec{V}_k$ ($k \leq m$) este liniar independent.

Într-adevăr, dacă vectorii $\vec{V}_1, \dots, \vec{V}_k$ ar fi liniari dependenți, atunci ar exista un sistem de scalari $\alpha_1, \dots, \alpha_k$, nu toți nuli, cu proprietatea :

$$\alpha_1 \vec{V}_1 + \alpha_2 \vec{V}_2 + \dots + \alpha_k \vec{V}_k = \vec{0}.$$

Din această relație se deduce ușor că :

$$\alpha_1 \vec{V}_1 + \alpha_2 \vec{V}_2 + \dots + \alpha_k \vec{V}_k + 0 \cdot \vec{V}_{k+1} + \dots + 0 \cdot \vec{V}_m = \vec{0}.$$

Deci vectorii $\vec{V}_1, \dots, \vec{V}_m$ ar fi liniari dependenți, contrar ipotezei menționate mai sus.

Numărul maxim de vectori liniari independenți dintr-un spațiu vectorial se numește dimensiunea spațiului vectorial, iar vectorii liniari independenți formează o bază.

3. Orice vector al spațiului vectorial V care nu face parte din bază, poate fi exprimat ca o combinație liniară a vectorilor bazei. Această afirmație este evidentă. Dacă $\vec{V}_1, \dots, \vec{V}_m$ formează o bază, atunci sistemul format din vectorii $\vec{V}_1, \dots, \vec{V}_m, \vec{V}$, este liniar dependent. Deci vectorul \vec{V} se poate exprima ca o combinație liniară a vectorilor bazei :

$$\vec{V} = \alpha_1 \vec{V}_1 + \alpha_2 \vec{V}_2 + \dots + \alpha_m \vec{V}_m.$$

Numerele $\alpha_1, \dots, \alpha_m$, nu toate nule, se numesc coordonatele vectorului \vec{V} în baza dată.

17.7.6. PRODUSUL SCALAR ÎNTR-UN SPAȚIU VECTORIAL PESTE CORPUL R

Să considerăm un spațiu vectorial V peste corpul R .

Definiție 17.6. Se numește produs scalar a doi vectori $\vec{x}, \vec{y} \in V$ și se notează (\vec{x}, \vec{y}) o aplicație a mulțimii $V \times V$ pe mulțimea

R care satisface următoarele proprietăți :

- 1) $(\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{y}, \vec{x})$, oricare ar fi vectorii \vec{x} și \vec{y} ;
- 2) $(\vec{x} + \vec{y}, \vec{z}) = (\vec{x}, \vec{z}) + (\vec{y}, \vec{z})$, oricare ar fi vectorii $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$;
- 3) $\alpha(\vec{x}, \vec{y}) = (\alpha\vec{x}, \vec{y})$; pentru orice $\alpha \in R$;
- 4) $(\vec{x}, \vec{x}) \geq 0$, oricare ar fi $\vec{x} \neq \vec{0}$.

Numărul real (\vec{x}, \vec{y}) care corespunde vectorilor $\vec{x}, \vec{y} \in V$ se numește produs scalar al vectorilor \vec{x} și \vec{y} .

Din aceste axiome care definesc produsul scalar se pot deduce cu ușurință și alte proprietăți ale produsului scalar.

$$(P_1) (\vec{z}, \vec{x} + \vec{y}) = (\vec{z}, \vec{x}) + (\vec{z}, \vec{y}).$$

Pentru a demonstra această proprietate vom folosi axioma 2 și axioma de comutativitate a produsului scalar.

$$(P_2) \beta(\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{x}, \beta\vec{y}) \text{ oricare ar fi } \beta \in R.$$

Folosind axioma 3 și proprietatea de comutativitate vom obține :

$$(\vec{x}, \beta\vec{y}) = (\beta\vec{y}, \vec{x}) = \beta(\vec{y}, \vec{x}) = \beta(\vec{x}, \vec{y}).$$

$$(P_3) (\vec{x}, \vec{0}) = (\vec{0}, \vec{y}) = 0 \text{ oricare ar fi } \vec{x}, \vec{y}.$$

Din proprietățile care definesc structura de spațiu vectorial reținem :

$$0 \cdot \vec{0} = \vec{0}.$$

Prin urmare, avem :

$$(\vec{x}, \vec{0}) = (\vec{x}, 0 \cdot \vec{0}) = 0 \cdot (\vec{x}, \vec{0}) = 0.$$

Dacă o mulțime de vectori $V_1 \subset V$ verifică condițiile :

1. $\vec{x}, \vec{y} \in V_1 \Rightarrow \vec{x} + \vec{y} \in V_1$; 2. $\vec{x} \in V_1, \alpha \in R \Rightarrow \alpha \vec{x} \in V_1$
atunci V_1 este un subspațiu vectorial al lui V .

Trebuie mai întâi să arătăm că elementul opus al lui $\vec{x} \in V_1$ pe care-l notăm cu $-\vec{x}$, aparține lui V_1 :

$$-\vec{x} = (-1) \cdot \vec{x} \in V.$$

Elementul neutru aparține și el lui V_1 :

$$\vec{x} + (-\vec{x}) = [1 + (-1)]\vec{x} = 0 \cdot \vec{x} = \vec{0}.$$

Exemple

Am arătat că mulțimea sistemelor ordonate de trei numere reale formează un spațiu vectorial pe care-l notăm cu R^3 .

Să considerăm acum mulțimea R^2 formată din sisteme de trei numere, ultimul număr fiind egal cu 0. Este evident că acesta este o submulțime a lui R^3 . Să arătăm că această submulțime formează un spațiu vectorial.

$$1) \vec{x} \in R^2, \vec{y} \in R^2 \Rightarrow \vec{x} + \vec{y} \in R^2.$$

$$\begin{aligned} \text{Fie } \vec{x} = (x_1, x_2, 0), \vec{y} = (y_1, y_2, 0), \vec{x} + \vec{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, 0) \Rightarrow \\ \Rightarrow \vec{x} + \vec{y} \in R^2. \end{aligned}$$

$$2) \vec{x} \in R^2, \alpha \in R, \alpha\vec{x} \in R^2.$$

$$\text{Fie } \vec{x} = (x_1, x_2, 0), \alpha \in R.$$

$$\alpha\vec{x} = (\alpha x_1, \alpha x_2, 0) \Rightarrow \alpha\vec{x} \in R^2.$$

Deci: R^2 este un subspațiu vectorial al lui R^3 .

Observație

Să notăm cu S mulțimea vectorilor din spațiu.

Mulțimea vectorilor cu extremitatea și originea în același plan formează un subspațiu vectorial al lui S .

17.7.7. VECTORI ORTOGONALI. NORMA UNUI VECTOR

1) Vectorii \vec{x} și \vec{y} , care aparțin spațiului vectorial V sînt ortogonali dacă produsul lor scalar este 0 sau $(\vec{x}, \vec{y}) = 0$. Se mai spune că vectorul \vec{x} este ortogonal lui \vec{y} .

2) Se demonstrează ușor că, dacă un vector \vec{x} este ortogonal unui sistem $\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_m$ de vectori, este ortogonal oricărui vector \vec{y} care este o combinație liniară a vectorilor $\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_m$.

Vectorul \vec{y} fiind o combinație liniară a vectorilor $\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_m$ se exprimă prin formula :

$$\vec{y} = \alpha_1 \vec{y}_1 + \alpha_2 \vec{y}_2 + \dots + \alpha_m \vec{y}_m,$$

unde $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ sînt numere reale, nu toate nule.

Ținînd seama de această relație, precum și de proprietățile

$$\begin{aligned} (P_1), (P_2), \text{ obținem : } (\vec{x}, \vec{y}) &= (\vec{x}, \alpha_1 \vec{y}_1 + \alpha_2 \vec{y}_2 + \dots + \\ &+ \alpha_m \vec{y}_m) = (\vec{x}, \alpha_1 \vec{y}_1) + (\vec{x}, \alpha_2 \vec{y}_2) + \dots + (\vec{x}, \alpha_m \vec{y}_m) = \\ &= \alpha_1 (\vec{x}, \vec{y}_1) + \alpha_2 (\vec{x}, \vec{y}_2) + \dots + \alpha_m (\vec{x}, \vec{y}_m). \end{aligned}$$

Cum însă vectorul \vec{y} este ortogonal fiecăruia din vectorii $\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_m$ avem :

$$(\vec{x}, \vec{y}_1) = 0, (\vec{x}, \vec{y}_2) = 0, \dots, (\vec{x}, \vec{y}_m) = 0,$$

prin urmare :

$$(\vec{x}, \vec{y}) = 0.$$

3) Dacă \vec{x} este un vector în spațiu vectorial V , atunci *norma* vectorului \vec{x} este rădăcina pătrată a produsului scalar al vectorului \vec{x} prin el însuși și se notează $||\vec{x}||$, așadar :

$$||\vec{x}|| = \sqrt{(\vec{x}, \vec{x})}.$$

4) Dacă \vec{x} și \vec{y} sînt doi vectori ortogonali, atunci avem relația :

$$||\vec{x} + \vec{y}||^2 = ||\vec{x}||^2 + ||\vec{y}||^2.$$

Vectorii \vec{x}, \vec{y} fiind ortogonali avem :

$$(\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{y}, \vec{x}) = 0;$$



după definiția normei unui vector, avem :

$$||\vec{x} + \vec{y}||^2 = (\vec{x} + \vec{y}, \vec{x} + \vec{y}).$$

Aplicînd proprietățile produsului scalar, relația devine

$$||\vec{x} + \vec{y}||^2 = (\vec{x}, \vec{x} + \vec{y}) + (\vec{y}, \vec{x} + \vec{y}) = (\vec{x}, \vec{x}) + (\vec{x}, \vec{y}) + (\vec{y}, \vec{x}) + (\vec{y}, \vec{y});$$

produsele scalare (\vec{x}, \vec{y}) și (\vec{y}, \vec{x}) fiind nule, avem :

$$||\vec{x} + \vec{y}||^2 = (\vec{x}, \vec{x}) + (\vec{y}, \vec{y})$$

$$\text{sau } ||\vec{x} + \vec{y}||^2 = ||\vec{x}||^2 + ||\vec{y}||^2.$$

5) Oricare ar fi vectorii \vec{x}, \vec{y} dintr-un spațiu vectorial V , avem :

$$|(\vec{x}, \vec{y})| \leq ||\vec{x}|| \cdot ||\vec{y}||$$

Pentru aceasta să considerăm vectorul $\lambda\vec{x} - \vec{y}$. Pentru orice valoare a lui λ avem inegalitatea :

$$(\lambda\vec{x} - \vec{y}, \lambda\vec{x} - \vec{y}) \geq 0.$$

Aplicînd proprietățile produsului scalar obținem relația :

$$(\lambda\vec{x} - \vec{y}, \lambda\vec{x}) - (\lambda\vec{x} - \vec{y}, \vec{y}) \geq 0.$$

sau :

$$\begin{aligned} (\lambda\vec{x}, \lambda\vec{x}) - (\vec{y}, \lambda\vec{x}) - (\lambda\vec{x}, \vec{y}) + (\vec{y}, \vec{y}) = \\ = \lambda^2(\vec{x}, \vec{x}) - 2\lambda(\vec{x}, \vec{y}) + (\vec{y}, \vec{y}) \geq 0. \end{aligned}$$

Expresia din partea stîngă a inegalității poate fi privită ca un trinom de gradul al doilea în variabila λ .

Pentru ca acest trinom să fie pozitiv, pentru orice valoare a lui λ , trebuie ca discriminantul lui să verifice relația :

$$(\vec{x}, \vec{y})^2 - (\vec{x}, \vec{x}) \cdot (\vec{y}, \vec{y}) \leq 0.$$

Ținând seama de definiția normei, din această inegalitate se poate obține : $(\vec{x}, \vec{y})^2 \leq ||\vec{x}||^2 \cdot ||\vec{y}||^2$

$$\text{sau } -1 \leq \frac{(\vec{x}, \vec{y})}{||\vec{x}|| \cdot ||\vec{y}||} \leq 1.$$

Dacă vectorii \vec{x} și \vec{y} sînt legați prin relația $\vec{x} = \lambda \vec{y}$, atunci ultima relație scrisă devine :

$$\begin{aligned} \frac{(\vec{x}, \vec{y})}{||\vec{x}|| \cdot ||\vec{y}||} &= \frac{(\lambda \vec{y}, \vec{y})}{||\lambda \vec{y}|| \cdot ||\vec{y}||} = \frac{\lambda(\vec{y}, \vec{y})}{|\lambda| \cdot ||\vec{y}||^2} = \\ &= \frac{\lambda ||\vec{y}||^2}{|\lambda| \cdot ||\vec{y}||^2} = \frac{\lambda}{|\lambda|} = \begin{cases} 1, & \text{dacă } \lambda > 0 \\ -1, & \text{dacă } \lambda < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Dacă vectorii \vec{x} și \vec{y} sînt legați prin relația $\vec{x} = \lambda \vec{y}$ atunci se spune că sînt coliniari.

Expresia $\frac{(\vec{x}, \vec{y})}{||\vec{x}|| \cdot ||\vec{y}||}$ poate fi privită ca fiind cosinusul unghiului φ format de doi vectori într-un spațiu vectorial, așa cum vom preciza în paragrafele următoare :

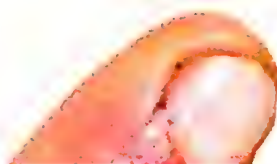
$$\cos \varphi = \frac{(\vec{x}, \vec{y})}{||\vec{x}|| \cdot ||\vec{y}||}.$$

17.7.8. SPAȚIU METRIC. DISTANȚĂ

Să considerăm o funcție $d(\vec{x}, \vec{y})$, cu valori reale, de două variabile, definită pentru orice pereche de vectori \vec{x}, \vec{y} ale spațiului vectorial V .

Dacă funcția $d(\vec{x}, \vec{y})$ satisface proprietățile :

- 1) $d(\vec{x}, \vec{y}) > 0, \vec{x} \neq \vec{y}$;
- 2) $d(\vec{x}, \vec{y}) = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{y}$;
- 3) $d(\vec{x}, \vec{y}) = d(\vec{y}, \vec{x})$;



$$4) d(\vec{x}, \vec{z}) \leq d(\vec{x}, \vec{y}) + d(\vec{y}, \vec{z})$$

pentru orice $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$, atunci se numește distanță sau metrică.

Spațiul vectorial, sau orice altă mulțime pe care s-a definit o metrică, se numește spațiu metric.

17.7.9. PRODUSUL VECTORIAL

Produsul vectorial s-a introdus în legătură cu noțiunea de moment al unei forțe. În mecanică se definește momentul unui vector \vec{a} în raport cu punctul O (fig. 17.1) ca fiind vectorul ce are

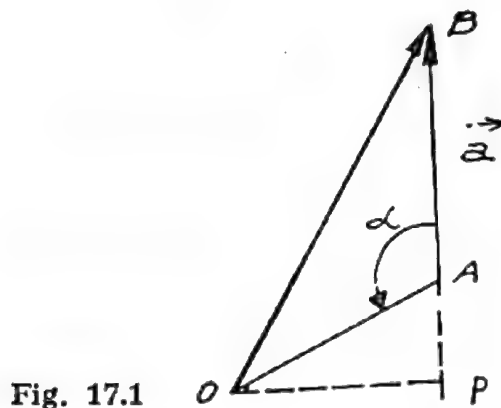


Fig. 17.1

lungimea egală cu produsul dintre modulul vectorului \vec{a} și lungimea perpendicularii coborîte din punctul O pe direcția vectorului, cu direcția perpendiculară pe planul determinat de vector și punctul O .

Dacă notăm momentul prin vectorul \vec{M} , atunci se obține relația :

$$|\vec{M}| = OP \cdot AB.$$

Cum însă $OP = OA \sin (180^\circ - \alpha) = OA \sin \alpha$, obținem :

$$|\vec{M}| = OA \cdot AB \sin \alpha.$$

Prin urmare, modulul vectorului \vec{M} este numeric egal cu aria paralelogramului construită cu ajutorul segmentelor OA și AB .

Dacă considerăm vectorii \vec{OA} și \vec{AB} , ei definesc un plan care este chiar planul OAB . Aria paralelogramului avînd pe OA și AB ca laturi este numeric egală cu modulul vectorului \vec{M} . Deci, putem

considera că \vec{M} este un vector ce corespunde perechii de vectori \vec{AO} și \vec{AB} avînd o mărime, direcție și un sens bine determinate.

Plecînd de la acest exemplu fizic al momentului unei forțe, se definește o operație internă pe mulțimea V a vectorilor din spațiu, numită produsul vectorial, în felul următor :

Definiția 17.7.

Se numește produs vectorial al vectorilor \vec{v}_1 și \vec{v}_2 , și se notează $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2$, un vector \vec{v} , determinat astfel :

1) Modulul produsului $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2$ este numeric egal cu aria paralelogramului determinat de vectorii \vec{v}_1 și \vec{v}_2 sau $|\vec{v}_1 \times \vec{v}_2| = |\vec{v}_1| \cdot |\vec{v}_2| \sin \alpha$.

2) Direcția vectorului \vec{v} este perpendiculară pe planul determinat de direcțiile vectorilor \vec{v}_1 și \vec{v}_2 .

3) Sensul lui \vec{v} coincide, respectiv, cu sensurile pozitiv sau negativ al axei z' după cum suprapunerea direcției \vec{v}_1 cu direcția \vec{v}_2 , se realizează prin rotația de un unghi minim în jurul direcției lui \vec{v} , în sens direct sau în sens retrograd (fig. 17.2).

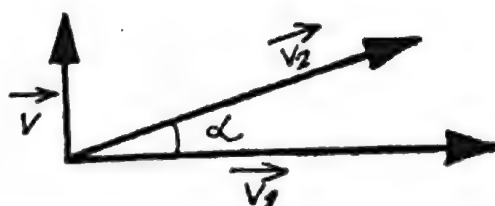


Fig. 17.2

Produsul vectorial al versorilor

1) Dacă notăm cu $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ versorii unui sistem cartezian de axe $Oxyz$ (în spațiul S), atunci din definiția produsului vectorial rezultă (fig. 17.3) :



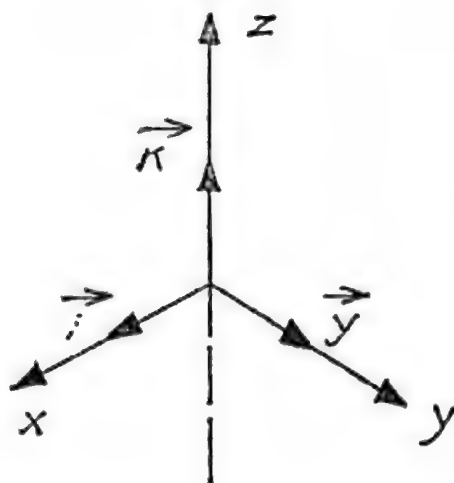


Fig. 17.3

$$\vec{i} \times \vec{j} = -\vec{j} \times \vec{i} = \vec{k},$$

$$\vec{j} \times \vec{k} = -\vec{k} \times \vec{j} = \vec{i},$$

$$\vec{k} \times \vec{i} = -\vec{i} \times \vec{k} = \vec{j},$$

și

$$\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = 0.$$

2) Dacă produsul vectorial a doi vectori nenuli, \vec{v}_1 și \vec{v}_2 , este zero, atunci vectorii sînt liniari dependenți.

$$\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \vec{0} \Rightarrow \sin \alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0.$$

Vectorii \vec{v}_1 și \vec{v}_2 au direcții paralele, deci sînt coliniari.

Proprietăți ale produsului vectorial

1) Produsul vectorial este anticomutativ :

$$\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = -(\vec{v}_2 \times \vec{v}_1).$$

Proprietatea rezultă imediat din definiția produsului vectorial.

2) Produsul vectorial este asociativ față de înmulțirea unui vector cu un număr real.

$$(\alpha \vec{v}_1) \times (\vec{v}_2) = \vec{v}_1 \times (\alpha \vec{v}_2).$$

Să notăm :

$$\vec{v} = (\alpha \vec{v}_1) \times (\vec{v}_2)$$

$$\vec{v} = \vec{v}_1 \times (\alpha \vec{v}_2).$$

Din definiția produsului vectorial rezultă :

$$|\vec{v}| = |\alpha \vec{v}_1| \cdot |\vec{v}_2| \sin \theta,$$

$$|\vec{v}| = |\alpha| \cdot |\vec{v}_1| \cdot |\vec{v}_2| \sin \theta = |\vec{v}_1| \cdot |\alpha \cdot \vec{v}_2| \sin \theta = |\vec{v}'|.$$

Dacă $\alpha > 0$, sensul vectorului \vec{v} este același ca și al vectorului \vec{v}' . În cazul $\alpha < 0$ schimbarea sensului unuia din vectori duce la schimbarea sensului lui \vec{v}' .

3) Produsul vectorial este distributiv față de operația de adunare a vectorilor.

Lăsăm în seama cititorului verificarea acestei proprietăți.

4) Expresia analitică a produsului vectorial.

Să considerăm vectorii \vec{v}_1 și \vec{v}_2 , exprimați cu ajutorul versorilor $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

$$\vec{v}_1 = x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k},$$

$$\vec{v}_2 = x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j} + z_2 \vec{k}.$$

Din proprietățile (2) și (3) rezultă :

$$\begin{aligned} \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 &= (x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k}) \times (x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j} + z_2 \vec{k}) = x_1 x_2 (\vec{i} \times \vec{i}) + \\ &+ x_1 y_2 (\vec{i} \times \vec{j}) + x_1 z_2 (\vec{i} \times \vec{k}) + y_1 x_2 (\vec{j} \times \vec{i}) + y_1 y_2 (\vec{j} \times \vec{j}) + \\ &+ y_1 z_2 (\vec{j} \times \vec{k}) + z_1 x_2 (\vec{k} \times \vec{i}) + z_1 y_2 (\vec{k} \times \vec{j}) + z_1 z_2 (\vec{k} \times \vec{k}). \end{aligned}$$

Ținând seama de modul în care s-a definit produsul vectorial al versorilor, se obține :

$$\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = (y_1 z_2 - y_2 z_1) \vec{i} + (z_1 x_2 - x_1 z_2) \vec{j} + (x_1 y_2 - x_2 y_1) \vec{k}.$$

Această relație poate fi obținută cu ușurință dacă scriem produsul vectorial ca un determinant.

$$\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}.$$

Pentru a regăsi expresia cunoscută va trebui să facem dezvoltarea după elementele primei linii.

5. Modulul produsului vectorial.

Din relația de mai sus, pentru produsul vectorial $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2$ rezultă următoarele coordonate :

$$y_1 z_2 - y_2 z_1; z_1 x_2 - z_2 x_1; x_1 y_2 - x_2 y_1,$$

deci :

$$|\vec{v}_1 \times \vec{v}_2| = \sqrt{(y_1 z_2 - y_2 z_1)^2 + (z_1 x_2 - z_2 x_1)^2 + (x_1 y_2 - x_2 y_1)^2}.$$

17. 7.10. PRODUSUL MIXT A TREI VECTORI

Produsul mixt vectorial al vectorilor \vec{a} , \vec{b} și \vec{c} se numește produsul scalar dintre vectorul $\vec{a} \times \vec{b}$ și vectorul \vec{c} .

Se scrie $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$.

Interpretăm produsul mixt $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$ ca fiind egal cu volumul paralelipipedului construit cu vectorii \vec{a} , \vec{b} și \vec{c} , prevăzut cu semnul plus dacă sistemul \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} este drept și cu semnul minus, dacă este stâng.

Dacă vectorii \vec{a} , \vec{b} și \vec{c} sînt dați prin coordonate $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$, $\vec{c} = (x_3, y_3, z_3)$, în baza ortonormată $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, atunci vom avea :

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Într-adevăr :

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \vec{k}$$

Aplicînd definiția produsului scalar obținem :

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = x_3 \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} - y_3 \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} + z_3 \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

Produsul mixt al vectorilor \vec{a} , \vec{b} și \vec{c} se notează prescurtat $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$.
Se demonstrează ușor următoarele proprietăți de bază ale produsului mixt :

- 1) $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$;
- 2) $\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{b} \cdot \vec{c} \cdot \vec{a} = \vec{c} \cdot \vec{a} \cdot \vec{b} = -\vec{b} \cdot \vec{a} \cdot \vec{c} = -\vec{c} \cdot \vec{b} \cdot \vec{a} = -\vec{a} \cdot \vec{c} \cdot \vec{b}$;
- 3) $\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot (\vec{c} + \vec{d}) = \vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{d}$;
- 4) $(\alpha \vec{a}) \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} = \alpha (\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c})$.

Demonstrația proprietății (1) se face folosind scrierea produsului mixt ca un determinant. Membrul al doilea al egalității (1) reprezintă același determinant ca și membrul întâi, dezvoltat după elementele liniei întâi.

Pentru demonstrarea proprietății (2) să observăm că :

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a} = \vec{b} \cdot \vec{c} \cdot \vec{a}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{c} \cdot \vec{a} \cdot \vec{b},$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = [-\vec{b} \times \vec{a}] \cdot \vec{c} = -\vec{b} \cdot \vec{a} \cdot \vec{c},$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = [-\vec{c} \times \vec{b}] \cdot \vec{a} = -\vec{c} \cdot \vec{b} \cdot \vec{a},$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{a} \cdot [-\vec{c} \times \vec{b}] = -\vec{a} \cdot \vec{c} \cdot \vec{b}.$$

Proprietatea (3) se justifică plecând de la definiția produsului mixt și avem :

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} \cdot (\vec{c} + \vec{d}) &= \vec{a} \cdot [\vec{b} \times (\vec{c} + \vec{d})] = \vec{a} \cdot [-(\vec{c} + \vec{d}) \times \vec{b}] = \\ &= \vec{a} \cdot [-(\vec{c} \times \vec{b} + \vec{d} \times \vec{b})] = \vec{a} \cdot [-(\vec{c} \times \vec{b})] + \\ &+ \vec{a} \cdot [-(\vec{d} \times \vec{b})] = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{d}) = \\ &= \vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{d}. \end{aligned}$$

Proprietatea (4) rezultă simplu, plecând de la definiția produsului mixt și aplicând o proprietate a produsului scalar :

$$(\alpha \vec{a}) \vec{b} \vec{c} = (\alpha \vec{a})(\vec{b} \times \vec{c}) = \alpha[\vec{a}(\vec{b} \times \vec{c})] = \alpha(\vec{a} \vec{b} \vec{c}).$$

Dacă vectorii $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ sînt coplanari, atunci produsul mixt $\vec{a} \vec{b} \vec{c}$ este nul.

Proprietatea este evidentă, deoarece în acest caz vectorii $\vec{a} \times \vec{b}$ și \vec{c} sînt ortogonali și, prin urmare, produsul lor scalar este zero.

$$\text{Avem : } \vec{a} \vec{b} \vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = 0.$$

17.7.11. EXERCITII REZOLVATE

Mulțimea polinoamelor de grad $\leq n$ este un spațiu vectorial pe R .

Soluție.

Fie $a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ și $b_0 + b_1x + \dots + b_nx^n$ două polinoame de grad inferior sau cel mult egal cu n . Coeficienții acestor două polinoame sînt numere reale.

În mulțimea polinoamelor se definesc două operații :

Adunarea polinoamelor :

$$\begin{aligned} (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n) + (b_0 + b_1x + \dots + b_nx^n) = \\ = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + \dots + (a_n + b_n)x^n \end{aligned}$$

și înmulțirea polinoamelor cu un număr real λ :

$$\lambda(a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n) = \lambda a_0 + \lambda a_1x + \dots + \lambda a_nx^n.$$

Se constată că adunarea are următoarele proprietăți :

a) *Asociativitate* :

$$\begin{aligned} (a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n) + [(b_0 + b_1x + \dots + b_nx^n) + \\ + (c_0 + c_1x + \dots + c_nx^n)] = (a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n) + \\ + [(b_0 + c_0)x + (b_1 + c_1)x + \dots + (b_n + c_n)x^n] = \\ = (a_0 + b_0 + c_0) + (a_1 + b_1 + c_1)x + \dots + (a_n + b_n + c_n)x^n. \\ [(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n) + (b_0 + b_1x + \dots + b_nx^n)] + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (c_0 + c_1x + \dots + c_nx^n) = [(a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \dots \\
& + (a_n + b_n)x^n] + (c_0 + c_1x + \dots + c_nx^n) = \\
& = (a_0 + b_0 + c_0) + (a_1 + b_1 + c_1)x + \dots + (a_n + b_n + c_n)x^n.
\end{aligned}$$

b) Există un element neutru

Elementul neutru este polinomul care are toți coeficienții nuli, care se mai numește și polinomul identic nul.

c) Simetricul polinomului $a_0x + a_1x + \dots + a_nx^n$ este polinomul $-a_0 - a_1x - a_2x^2 - \dots - a_nx^n$, deoarece suma acestor două polinoame este polinomul identic nul.

d) Adunarea este comutativă

$$\begin{aligned}
& (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n) + (b_0 + b_1x + \dots + b_nx^n) = \\
& = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \dots + (a_n + b_n)x^n = \\
& = (b_0 + a_0) + (b_1 + a_1)x + \dots + (b_n + a_n)x^n = (b_0 + b_1x + \\
& + \dots + b_nx^n) + (a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n).
\end{aligned}$$

Produsul unui polinom printr-un număr real verifică proprietățile următoare :

1) $(\alpha + \beta)P = \alpha P + \beta P$, unde P este un polinom oarecare iar α și β sînt două numere reale.

$$\begin{aligned}
& (\alpha + \beta)(a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n) = (\alpha + \beta)a_0 + (\alpha + \beta)a_1x + \\
& \dots + (\alpha + \beta)a_nx^n = \alpha(a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n) + \\
& + \beta(a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n).
\end{aligned}$$

$$2) \alpha(P_1 + P_2) = \alpha P_1 + \alpha P_2$$

$$\begin{aligned}
& \alpha[(a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n) + (b_0 + b_1x + \dots + b_nx^n)] = \\
& = \alpha(a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n) + \alpha(b_0 + b_1x + \dots + b_nx^n).
\end{aligned}$$

17.8. ALGEBRA BOOLE

Definiția 17.8.1. Se numește algebră Boole o mulțime arbitrară de elemente x, y, z, \dots , pentru care sînt definite două operații: adunarea și înmulțirea, astfel încît unei perechi de elemente (x, y) ale acestei mulțimi să-i corespundă suma $x + y$ și produsul lor xy ; operația unară notată „—” care face să corespundă

la fiecare element x al acestei mulțimi elementul \bar{x} ; există în mulțime două elemente 0 și 1 care au proprietățile speciale, și sint satisfăcute următoarele proprietăți :

a) Proprietăți relative la adunare :

1. $x + y = y + x$ — lege comutativă ;
2. $(x + y) + z = x + (y + z)$ — lege asociativă ;
3. $x + x = x$ — lege de idempotență ;

b) Proprietăți relative la înmulțire :

1. $x \cdot y = y \cdot x$ — lege comutativă ;
2. $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ — lege asociativă ;
3. $x \cdot x = x$ — lege de idempotență

c) Proprietăți care asociază adunarea la înmulțire :

1. $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$ — lege distributivă ;
2. $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ — lege distributivă ;

d) Proprietăți relative la elementele 0 și 1 :

1. $x + 0 = x$,
2. $x + 1 = 1$,
3. $x \cdot 1 = x$,
4. $x \cdot 0 = 0$.

e) Proprietăți referitoare la operația unară, notată „ $-$ ” :

1. $\overline{\bar{x}} = x$,
2. $\bar{0} = 1$,
3. $\bar{1} = 0$.

f) Proprietăți care leagă operația unară „ $-$ ” cu adunarea și înmulțirea (Regulile lui De Morgan) :

- 1) $\overline{x + y} = \bar{x} \cdot \bar{y}$;
- 2) $\overline{x \cdot y} = \bar{x} + \bar{y}$.

Exemple

Să notăm cu $P(E)$ mulțimea părților mulțimii E .

Mulțimea $P(E)$ este formată din toate submulțimile lui E , inclusiv submulțimea improprie E și mulțimea vidă \emptyset . În mulțimea $P(E)$ se definesc două operații binare, reuniunea \cup și intersecția \cap și operația unară notată C_E (complementara). În mulțimea $P(E)$ există două submulțimi E și \emptyset care au proprietăți speciale. Mulțimea $P(E)$ împreună cu operațiile definite formează o algebră Boole.

Demonstrație. Trebuie arătat că aceste submulțimi verifică proprietățile mai sus enunțate.

$$a) \quad 1. \quad A \cup B = B \cup A, \quad A \cap B = B \cap A$$

(comutativitate)

$$2. \quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

(asociativitate)

$$3. \quad A \cup A = A, \quad A \cap A = A$$

(idempotență)

$$b) \quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C),$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

Distributivitatea operației \cup față de operația \cap și a operației \cap față de operația \cup .

$$c) \quad A \cup \emptyset = A, \quad A \cup E = E$$

$$A \cap \emptyset = \emptyset, \quad A \cap E = A$$

$$d) \quad C_E(C_E A) = A, \quad C_E(E) = \emptyset, \quad C_E(\emptyset) = E.$$

$$e) \quad C_E(A \cup B) = C_E A \cap C_E B,$$

$$C_E(A \cap B) = C_E A \cup C_E B.$$

17.9. EXERCIIU ȘI PROBLEME

1. Se consideră mulțimea $A = \{-1, +1\}$ și o lege de compoziție, înmulțirea numerelor. Este (A, \times) un grup?

2. Să se arate că în grupul $(G, *)$, ecuația $a*x = b$ are o soluție unică $x = a^{-1} * b$.

3. Se consideră o tabelă de trei elemente desenată mai jos. Să se arate că mulțimea $\{a, b, c\}$ nu formează un grup față de legea $*$.

$*$	a	b	c
a	b	c	b
b	c	b	a
c	b	a	c

4. Se consideră patru puncte A, B, C, D , care formează un pătrat, în care se notează cu O centrul. Să notăm $E = \{A, B, C, D\}$. Se consideră patru rotații R_0, R_1, R_2, R_3 , de centrul O și de unghiuri respectiv $0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$.

a) Să notăm $H = \{R_0, R_1, R_2, R_3\}$. În mulțimea H să considerăm o lege de compoziție, compunerea a două rotații $R_i \theta R_j (i, j = 0, 1, 2, 3)$.

b) Să se arate că această lege de compoziție este asociativă.

c) Să se alcătuiască un tabel al legii de compoziție date. (H, θ) este un grup?

5. Fie un grup G în care operația $*$ are element neutru e . Să notăm $E = \{e\}$ și să se arate că mulțimea $(E, *)$ este un grup.

6. Se consideră mulțimea Q a numerelor raționale și legea de compoziție $*$ definită prin: $a*b = a + b + ab$.

Să se arate că mulțimea $Q - \{-1\}$ împreună cu legea $*$ formează un grup abelian.

7. În mulțimea Z a numerelor întregi se consideră operația \perp definită prin: $a \perp b = a + b - 1$.

Să se arate că (Z, \perp) este un grup abelian.

8. Să se arate că un subgrup al unui grup ciclic este el însuși ciclic.

9. Fie $\tau_{a,b}$ transformarea definită pe mulțimea C a numerelor complexe prin:

$$\tau_{a,b}(z) = az + b, \text{ unde } z \in C, a \in R, b \in R.$$

Dacă $a \neq 0$, transformarea $\tau_{a,b}$ formează grup?

10. Se consideră mulțimile $2\mathbb{Z}$, și $3\mathbb{Z}$, formate din numerele naturale multipli de 2 și multipli de 3.

Să se arate că mulțimile $(2\mathbb{Z}, +)$ și $(3\mathbb{Z}, +)$ sînt subgrupuri ale lui $(\mathbb{Z}, +)$.

11. Fie grupul $(G, *)$ și o submulțime A a lui G care conține elementul neutru e ; simetricul lui $a * b$ este $b^{-1} * a^{-1}$.

Să se arate că $(A, *)$ este un subgrup al lui $(G, *)$ dacă și numai dacă $\forall (a, b) \in A \times A, a * b^{-1} \in A$.

12. Fie $E = \{x | x \in \mathbb{R}, -1 \leq x \leq 1\}$.

În această mulțime se definește o lege de compoziție $*$ prin relația :

$$\forall x \in E, \forall y \in E \quad x * y = \frac{x + y}{1 + xy}.$$

Să se arate că $(E, *)$ este un grup abelian.

13. Să se arate că mulțimea numerelor de forma $a + b\sqrt{2}$, cu a și b întregi, în care s-au definit două legi de compoziție adunarea și înmulțirea, formează un inel.

14. Fie $(A, \perp, *)$ un inel și e elementul neutru față de prima lege de compoziție.

Să se arate că : $\forall n \in A, n * e = e$. Să se deducă că e nu este niciodată regulat pentru cea de a doua lege.

15. Să se arate că mulțimea multiplilor lui 3 înzestrată cu două operații $(+, \times)$ adunarea și înmulțirea, formează un subinel al inelului $(\mathbb{Z}, +, \times)$.

16. Să se arate că intersecția subinelului multiplilor lui 2 cu subinelul multiplilor lui 3, este un subinel al mulțimii $(\mathbb{Z}, +, \times)$.

17. Să se arate că reuniunea subinelelor multiplilor lui 2 și a submultiplilor lui 3, este un subinel al mulțimii $(\mathbb{Z}, +, \times)$.

18. Mulțimea \mathbb{Z} este înzestrată cu operația $*$, definită prin :

$$a * b = a + b.$$

Să se definească o a doua operație \perp pentru care $(\mathbb{Z}, *, \perp)$ să fie un inel.

19. Se consideră mulțimea F a funcțiilor de forma :

$$x \mapsto f(x) = \frac{ax + b}{x}, \text{ definite pentru } 0 < x < +\infty.$$

În mulțimea F considerăm două operații :

a) Adunarea

$$f(x) + g(x) = \frac{ax + b}{x} + \frac{cx + d}{x} = \frac{(a + c)x + (b + d)}{x}$$

b) Înmulțirea cu un număr real definită astfel :

$$f(x) = \frac{\lambda ax + \lambda b}{x}$$

Să se arate că mulțimea F este un spațiu vectorial peste corpul R .

20. Se consideră mulțimea E a numerelor reale de forma

$$\alpha = x\sqrt{2} + y\sqrt{3}, \quad x, y \in R.$$

În mulțimea E se definesc două operații :

a) Adunarea, definită astfel :

$$\forall \alpha_1, \alpha_2 \in E, \quad \alpha_1 + \alpha_2 = x_1\sqrt{2} + y_1\sqrt{3} + x_2\sqrt{2} + y_2\sqrt{3}.$$

b) Înmulțirea cu un scalar : $\lambda\alpha = \lambda x\sqrt{2} + \lambda y\sqrt{3}$.

Să se arate că mulțimea E formează spațiu vectorial peste corpul R .

21. În spațiul vectorial de dimensiune 2 se consideră baza

$$(\vec{i}, \vec{j}), \quad \vec{i} = (1, 0); \vec{j} = (0, 1).$$

Să se exprime vectorul α , de coordonate $(2, 3)$ în baza dată.

22. Să se determine $f(u)$, f fiind o aplicație lineară dată de matricea $\begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

23. Fie $x' = Ax$, o omotetie de centru O și de raport k .

Să se găsească matricea omotetiei.

24. Fie $x' = Ax$, o rotație de unghi α . Să se scrie matricea A a rotației.

25. Fie T o transformare astfel încît : $(x_1, x_2) \Rightarrow (x_1, -x_2)$ Să se afle matricea transformării.

26. Să se arate că mulțimea numerelor de forma

$$a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[4]{2}, a, b, c \in \mathbb{Q}$$

formează un spațiu vectorial.

27. Se consideră vectorul $\vec{x} = (6, 9, 14)$. Să se găsească coordonatele vectorului \vec{x} în baza :

$$\vec{e}_1 = (1, 1, 1), \vec{e}_2 = (1, 1, 2), \vec{e}_3 = (1, 2, 3).$$

28. În spațiul \bar{R}^3 se consideră două baze

$$e_1 = (1, 2, 1), e_2 = (2, 3, 3), e_3 = (3, 7, 1);$$

$$e'_1 = (3, 1, 4), e'_2 = (3, 1, 4), e'_3 = (1, 1, -6).$$

Să se găsească legătura dintre coordonatele (x_1, x_2, x_3) ale vectorului \vec{x} în prima bază și coordonatele (x'_1, x'_2, x'_3) ale aceluiași vector în cea de a doua bază.

29. Vectorii \vec{a} și \vec{b} formează un unghi de 45° .

Cunoscînd : $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$, să se calculeze $|\vec{a} + \vec{b}|$ și $|\vec{a} - \vec{b}|$.

30. Ce condiții trebuie să satisfacă vectorii \vec{a} și \vec{b} astfel încît să avem relațiile următoare :

$$a) |\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|; b) |\vec{a} + \vec{b}| > |\vec{a} - \vec{b}|;$$

$$c) |\vec{a} + \vec{b}| < |\vec{a} - \vec{b}|.$$

31. Să se verifice dacă vectorii : $\vec{a} = (2, -1, 3)$ și $\vec{b} = (-6, 3, -9)$ sînt coliniari. Să se stabilească dacă acești vectori sînt de același sens sau de sens contrar.

32. Să se calculeze pentru ce valori α și β vectorii $\vec{a} = -2\vec{i} + 3\vec{j} + \beta\vec{k}$ și $\vec{b} = \alpha\vec{i} - 6\vec{j} + 2\vec{k}$ sînt coliniari.

33. Se dau punctele : $A(-1, 5, 10)$, $B(1, 2, -1)$, $C(2, 2, -7)$, $D(5, -4, 2)$. Verificați dacă vectorii \vec{AB} și \vec{CD} sînt coliniari.

34. Să se calculeze vectorul unitate al vectorului $\vec{a} = (6, -2, -3)$.

35. Vectorii : $\vec{a} = (2, -3, 6)$ și $\vec{b} = (-1, 2, -2)$ au aceeași origine. Să se calculeze coordonatele vectorului \vec{C} purtat de-a lungul bisectoarei unghiului format de vectorii \vec{a} și \vec{b} , dacă se cunoaște $|\vec{C}| = b/\sqrt{42}$.

36. Se consideră vectorii $|\vec{a}| = 1$; $|\vec{b}| = 1$. Să se determine α astfel încât vectorii $\vec{a} + \alpha \vec{b}$ și $\vec{a} - \alpha \vec{b}$ să fie perpendiculari.

37. Vectorii \vec{a} și \vec{b} formează un unghi $\varphi = \frac{\pi}{6}$.

Să se calculeze $|\vec{a} \times \vec{b}|$, cunoscând că $|\vec{a}| = 6$ și $|\vec{b}| = 5$.

38. Vectorii \vec{a} și \vec{b} sînt perpendiculari și unitari.

Să se calculeze $|(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b})|$.

39. Să se demonstreze că, dacă \vec{a} și \vec{b} sînt doi vectori ortogonali, există relația :

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{a}^2 \vec{b}^2.$$

40. Dacă vectorii \vec{a} și \vec{b} sînt unitari și au direcții perpendiculare, să se calculeze :

$$[(4\vec{a} + \vec{b}) \times (4\vec{a} - \vec{b})]^2.$$

41. Vectorii \vec{a} , \vec{b} și \vec{c} , verifică condiția :

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0.$$

Să se demonstreze relația : $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{b} \times \vec{c} = \vec{c} \times \vec{a}$.

42. Să considerăm vectorii :

$$\vec{a} = \{2, -3, 1\}, \vec{b} = \{-3, 1, 2\}, \vec{c} = \{1, 2, 3\}.$$

Să se calculeze :

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} \text{ și } \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}).$$

43. Se consideră vectorii :

$$\vec{a} = \{1, 3, 5\}, \vec{b} = \{2, 6, 10\}, \vec{c} = \{1, 1, 0\}.$$

Să se calculeze $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$.

44. Să se demonstreze egalitatea :

$$(\vec{a} + \vec{b})(\vec{b} + \vec{c})(\vec{c} + \vec{a}) = 2\vec{a} \vec{b} \vec{c}.$$

Aplicații ale calculului vectorial în geometrie

45. În paralelogramul $ABCD$ se consideră vectorii $\vec{AC} = \vec{a}$ și $\vec{BD} = \vec{b}$. Să se exprime cu ajutorul vectorilor \vec{a} și \vec{b} , vectorii : \vec{AB} , \vec{BC} , \vec{CD} și \vec{DA} .

46. În trapezul $ABCD$ (cu bazele AB și CD) se dă $\frac{AB}{DC} = \lambda$ ($\lambda \neq 0$), $\lambda \in R$. Să se exprime cu ajutorul vectorilor $\vec{AC} = \vec{a}$ și $\vec{BD} = \vec{b}$, vectorii \vec{AB} , \vec{BC} , \vec{CD} și \vec{DA} .

47. În triunghiul ABC se duc medianele AD , BE și CF .

Să se calculeze suma : $\vec{AD} + \vec{BE} + \vec{CF}$.

48. Punctele E și F sînt mijloacele laturilor AB și CD ale patrulaterului $ABCD$. Să se demonstreze relația :

$$\vec{EF} = \frac{\vec{BC} + \vec{AD}}{2}$$

49. Se dă tetraedrul $OABC$. Se notează cu E mijlocul laturii OA și cu F mijlocul laturii BC . Să se exprime cu ajutorul vectorilor \vec{OA} , \vec{OB} și \vec{OC} , vectorul \vec{EF} .

50. Se consideră în planul P două triunghiuri ABC și $A'B'C'$

Să se exprime cu ajutorul vectorilor $\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{BB'}$ și $\overrightarrow{CC'}$, vectorul $\overrightarrow{MM'}$, care unește centrele de greutate M și M' ale triunghiurilor date.

51. Se dă exagonul $ABCDEF$. Considerînd ca bază vectorii \overrightarrow{AB} și \overrightarrow{AC} , să se afle în această bază coordonatele vectorilor: \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{BC} , \overrightarrow{CD} , \overrightarrow{DE} , \overrightarrow{EF} și \overrightarrow{FA} .

52. În trapezul $ABCD$ se cunoaște $\frac{BC}{AD} = \lambda$. Se consideră o bază formată din vectorii \overrightarrow{AD} și \overrightarrow{AB} . Să se afle coordonatele vectorilor \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{BC} , \overrightarrow{CD} , \overrightarrow{DA} și \overrightarrow{BD} față de această bază.

53. În paralelipipedul $ABCD A'B'C'D'$ se consideră baza $\{e_1, e_2, e_3\}$, formată de vectorii \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{BC} și $\overrightarrow{BB'}$. Să se afle coordonatele vectorilor $\overrightarrow{BD'}$, $\overrightarrow{B'M}$, M fiind mijlocul diagonalei BD' , în funcție de baza dată.

54. Se dă tetraedrul $OABC$. Luînd ca bază $\{e_1, e_2, e_3\}$ vectorii \overrightarrow{OA} , \overrightarrow{OB} , \overrightarrow{OC} , să se găsească în această bază coordonatele :

a) vectorilor \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{BC} și \overrightarrow{CA} ;

b) vectorului \overrightarrow{DE} , care unește mijlocul D al laturii \overrightarrow{OA} cu mijlocul E ale laturii BC ;

c) vectorul \overrightarrow{OM} , care unește punctul O cu centrul M de greutate al triunghiului ABC .

55. Să se demonstreze că, oricare ar fi trei vectori, \vec{a} , \vec{b} și \vec{c} și trei numere α , β , γ , vectorii $\alpha\vec{a} - \beta\vec{b}$, $\gamma\vec{b} - \alpha\vec{c}$ și $\beta\vec{c} - \gamma\vec{a}$ sînt coplanari.

56. Pe latura AD a paralelogramului $ABCD$ se consideră segmentul $\overline{AK} = \frac{1}{5} \overline{AD}$ și pe diagonala AC , segmentul $\overline{AI} = \frac{1}{6} \overline{AC}$.

Să se arate că vectorii \overrightarrow{KL} și \overrightarrow{LB} sint coliniari. Să se găsească raportul $\frac{\overrightarrow{KL}}{\overrightarrow{LB}}$.

57. Se cunosc razele vectoare $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3$, a trei vîrfuri consecutive ale paralelogramului $ABCD$. Să se afle raza vectoare a celui de al patrulea vîrf.

58. Se cunosc razele vectoare ale punctelor A și B din planul P . Să se afle raza vectoare a punctului M , care împarte segmentul AB coordonate în raportul λ ($\frac{AM}{MB} = \lambda$).

59. În triunghiul ABC se construiește bisectoarea AD a unghiului A .

Să se exprime vectorul \overrightarrow{AD} cu ajutorul vectorilor \overrightarrow{AB} și \overrightarrow{AC} .

60. Se cunosc coordonatele vîrfurilor A și B ale paralelogramului $ABCD$, $A(-4, -7)$ și $B(2, 6)$, și punctul $M(3, 1)$ de intersecție al diagonalelor. Să se găsească coordonatele celorlalte vîrfuri ale paralelogramului.

61. Coardele AB și CD ale unui cerc de centru O se intersectează ortogonal în punctul P . Să se demonstreze relația:

$$\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD} = 2\overrightarrow{PO}.$$

62. Se consideră un triunghi echilateral ABC , care are latura egală cu unitatea. Să se calculeze expresia:

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}) + (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AB}).$$

63. În triunghiul ABC se duc medianele AD , BE și CF . Să se calculeze: $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AD}) + (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{BE}) + (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CF})$.

64. Se consideră dreptunghiul $ABCD$ și un punct arbitrar P în planul său. Să se demonstreze relațiile:

$$1. \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PC} = \overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{PD}$$

$$2. \overrightarrow{PA}^2 + \overrightarrow{PC}^2 = \overrightarrow{PB}^2 + \overrightarrow{PD}^2.$$

65. Se dau doi vectori \vec{a} și \vec{b} . Să se scrie vectorul \vec{b} sub forma sumei a doi vectori \vec{x} și \vec{y} , astfel încît \vec{x} să fie colinear cu vectorul \vec{a} și \vec{y} ortogonal cu vectorul \vec{a} .

66. Se dau doi vectori necoliniari \vec{a} și \vec{b} .

Să se găsească vectorul \vec{x} coplanar cu vectorii \vec{a} și \vec{b} și care verifică sistemul de ecuații $\vec{a} \cdot \vec{x} = 1$, $\vec{b} \cdot \vec{x} = 0$.

67. Se consideră vectorii $\vec{x} = \vec{a} - 3\vec{b}$, $\vec{y} = \vec{a} + 3\vec{b}$. Să se afle produsul scalar al vectorilor \vec{x} și \vec{y} , cunoscînd că vectorii \vec{a} și \vec{b} sînt unitari.

68. Vectorii \vec{a} și \vec{b} sînt unitari și au direcții perpendiculare.

Să se calculeze expresia :

$$[(2\vec{a} + \vec{b}) \times (2\vec{a} - \vec{b})]^{-2}.$$

69. Se dau vectorii \vec{a} , \vec{b} și \vec{c} . Să se calculeze produsul mixt al vectorilor $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{b} + \vec{c}$ și $\vec{c} + \vec{a}$.

70. Să se demonstreze că suma pătratelor laturilor unui paralelogram este egală cu suma pătratelor diagonalelor.

71. Să se demonstreze că într-un triunghi dreptunghic o catetă este medie proporțională între lungimea ipotenuzei și lungimea proiecției ei pe ipotenuză.

72. Se consideră un cerc de centru O și de rază R și un punct S exterior cercului. Fie A și B intersecțiile unei secante duse din S la acest cerc, iar d distanța de la punctul S la centrul O . Să se demonstreze vectorial relația :

$$SA \cdot BS = d^2 - R^2.$$

73. Să se arate că mijloacele a două laturi opuse ale unui dreptunghi și intersecția diagonalelor dreptunghiului sînt puncte colineare.

74. În dreptunghiul $ABCD$ se notează cu M , N , P , Q , mijloacele laturilor AB , CD , DA . Se prelungesc dreptele MN și QP cu

segmentele $NS = MN$ și $QL = QP$. Să notăm cu F punctul de intersecție al diagonalelor dreptunghiului. Să se arate că punctele S , L și F sînt colineare.

75. Să se arate că într-un triunghi dreapta care unește mijloacele a două laturi este paralelă cu latura a treia și egală cu jumătatea ei.

76. Să se demonstreze că într-un trapez dreapta care unește mijloacele a două laturi neparalele este paralelă cu bazele și egală cu semisuma lor.

77. Se prelungească medianele BB' , CC' , ale triunghiului ABC cu $B'B'' = BB'$ și $C'C'' = CC'$. Să se arate că punctele A , B'' , C'' sînt colineare.

78. Fie $ABCDE$ un pentagon regulat convex de centru O . Să se demonstreze că suma :

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE}$$

este vectorul nul.

79. Se notează cu A_1 , B_1 , C_1 mijloacele laturilor BC , AC și AB ale triunghiului ABC . Să se arate folosind calculul vectorial că cele două triunghiuri au același centru de greutate.

80. Se consideră exagonul $ABCDEF$. Să se demonstreze că dacă : $BC \parallel EF \parallel AD$, $CD \parallel AF$; $AB \parallel DE \parallel CF$, atunci $BE \parallel FA$.

81. Se consideră două cercuri tangente în punctul M . O secantă dusă prin punctul M taie cele două cercuri în punctele A și B . Să se găsească mulțimea punctelor X care au proprietatea $\overrightarrow{XA} = m\overrightarrow{XB}$ ($m \neq 0$).

82. Diagonalele patrulaterului $ABCD$ sînt perpendiculare și congruente. Pe laturile patrulaterului se dau punctele P , Q , R , S , astfel încît $\overrightarrow{AP} : \overrightarrow{PB} = \overrightarrow{BQ} : \overrightarrow{QC} = \overrightarrow{CR} : \overrightarrow{RD} = \overrightarrow{DS} : \overrightarrow{SA}$.

Să se arate că dreptele PR și QS sînt perpendiculare și congruente.

83. Se consideră paralelogramul $MNPK$, avînd $MP \cap NK = O$;

$A \in NP$ și $\overrightarrow{AN} = -\overrightarrow{AP}$. Să notăm $\overrightarrow{MN} = \vec{m}$; $\overrightarrow{MO} = \vec{n}$. Să se exprime \overrightarrow{AM} cu ajutorul lui \vec{m} și \vec{n} .

84. Fie M punctul de intersecție al dreptelor care unesc mijloacele laturilor opuse ale patrulaterului $ABCD$.

Dacă O este un punct arbitrar din plan să se demonstreze relația :

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}).$$

85. Laturile AB și CD ale unui tetraedru sînt perpendiculare. Să se demonstreze relația :

$$|\overrightarrow{AC}|^2 - |\overrightarrow{AD}|^2 = BC^2 - BD^2.$$

86. Vectorii \vec{a} și \vec{b} sînt lineari independenți și perpendiculari, avînd aceeași lungime.

Să se arate că vectorii $\vec{x} = 3\vec{a} + \vec{b}$ și $\vec{y} = 10\vec{a} - 6\vec{b}$ sînt de asemenea perpendiculari.

87. Se consideră un pentagon $ABCDE$. Fie M , N și P mijloacele segmentelor EB , DC și ED .

Se notează G centrul de greutate al triunghiului PMN . Să se exprime cu ajutorul vectorilor laturilor pentagonului, vectorul \overrightarrow{MG} .

88. În patrulaterul $ABCD$ se construiește perpendiculara BK pe diagonala AC . Se notează M și N mijloacele segmentelor AK și CD . Să se demonstreze că $MN \perp MB$.

89. Să se demonstreze că dacă în triunghiul ABC medianele corespunzătoare laturilor AB și BC sînt perpendiculare atunci are loc inegalitatea :

$$\cos B \geq \frac{4}{5}.$$

90. Să considerăm mulțimea $\{0, 1\}$ în care se definesc două operații :

adunarea $+$ și înmulțirea \cdot , în modul următor ;

$+$	0	1
0	0	0
1	0	1

\cdot	0	1
0	0	0
1	0	1

și o operație notată $-$ cu proprietatea $\bar{1} = 0, \bar{0} = 1$.

Să se arate că această mulțime împreună cu operațiile mai sus definite formează o algebră Boole.

91. Se dă mulțimea $A = \{0, a, b, 1\}$ în care se definesc două operații : adunare $+$, și înmulțire \cdot , în felul următor :

$+$	0	a	b	1
0	0	a	b	0
a	0	a	1	1
b	a	1	b	1
1	1	1	1	1

\cdot	0	a	b	1
0	0	0	0	0
a	0	a	0	a
b	0	0	b	b
1	0	a	b	1

O operație notată $-$ cu proprietatea :

$$\bar{a} = b, \quad \bar{b} = a, \quad \bar{1} = 0, \quad \bar{0} = 1.$$

Să se arate că această mulțime împreună cu operațiile mai sus definite formează o algebră Boole.

92. Se consideră mulțimile formate din propozițiile logice $\{p, q, A, F\}$ unde prin A și F am notat două propoziții : prima are totdeauna valoarea logică, adevărul notat cu A , a doua are valoarea logică falsul, notat cu F . În această mulțime se definesc două operații disjuncția, și conjuncția logică, precum și o operație unară, negația, care are proprietatea $\overline{p = q} ; q = p$. Să se arate că această mulțime formează o algebră Boole.

93. Se dă mulțimea

$$A = \{x/x \text{ divizor al numărului } 1260\}.$$

În mulțimea A se definesc următoarele operații :

a) $x \top y = \text{c. m. m. c. } (x, y)$ — (cel mai mic multiplu comun al numerelor x, y).

b) $x \theta y = \text{c. m. m. d. c. } (x, y)$ — (cel mai mare divizor comun al numerelor x, y).

c) O operație, notată cu $-$, definită astfel :

$$x \in A, \bar{x} = \frac{1260}{x}.$$

Să se arate că mulțimea A formează o algebră Boole.

94. Folosind rezultatele de la exercițiul precedent, să se formeze tabloul celor două operații „cel mai mic multiplu comun” și „cel mai mare divizor comun a două numere”, pentru divizorii numărului 12.

95. Să se arate că mulțimea divizorilor unui număr oarecare N împreună cu operațiile \top , θ și $-$, definite în același mod ca la exercițiul 93, formează o algebră Boole.

96. În mulțimile $A = \{x/x \text{ divizor al numărului } 360\}$, se definește relația :

$$\forall x, y \in A, \quad x \mathfrak{R} y = x \text{ este divizorul numărului } y.$$

Să se arate că relația \mathfrak{R} definită în această mulțime posedă toate proprietățile relației de incluziune definită în algebra mulțimilor.

Capitolul 18

CONSTRUCȚII ALGEBRICE DE MULȚIMI

18.1. INELUL NUMERELOR ÎNTREGI

Vom nota cu N mulțimea numerelor naturale.

18.1.1. RELAȚIA DE ECHIVALENȚĂ ÎN N^2

Mulțimea N^2 , sau $N \times N$, este formată din perechile ordinate (x, y) , unde x și y sînt elemente din N .

Definiția. 18.1 : Să considerăm pe mulțimea N^2 relația binară, notată cu \mathcal{R} , definită astfel : $(x, y) \mathcal{R} (x', y')$, dacă și numai dacă $x + y' = x' + y$. Relația \mathcal{R} este o relație de echivalență deoarece are următoarele proprietăți :

1) Este reflexivă :

$$\forall (x, y) \in N^2, \quad (x, y) \mathcal{R} (x, y)$$

$$\text{sau : } x + y = x + y.$$

2) Este simetrică :

$$\forall (x, y) \in N^2 \text{ și } \forall (x', y') \in N^2 \text{ dacă}$$

$$(x, y) \mathcal{R} (x', y') \text{ atunci } (x', y') \mathcal{R} (x, y).$$

Într-adevăr : $x + y' = x' + y$ sau $x' + y = x + y'$.

3) Este tranzitivă. Trebuie arătat că :

$$\forall (x, y), (x', y'), (x'', y'') \text{ din } N^2, \text{ dacă } (x, y) \mathcal{R} (x', y')$$

$$\text{și } (x', y') \mathcal{R} (x'', y''), \text{ atunci } (x, y) \mathcal{R} (x'', y'').$$

$$(x, y) \mathcal{R} (x', y') \Leftrightarrow x + y' = x' + y$$

$$(x', y') \mathcal{R} (x'', y'') \Leftrightarrow x' + y'' = x'' + y'$$

Adunind membru cu membru cele două egalități obținem :

$$x + y' + x' + y'' = x' + y + x'' + y',$$

și deci $x + y'' = y + x''$,

ceea ce arată că $(x, y) \mathcal{R}(x'', y'')$.

18.1.2. CLASE DE ECHIVALENȚĂ

Fie N^2 și \mathcal{R} o relație de echivalență în N^2 . Se numește clasă de echivalență a unui element (x, y) al mulțimii N^2 și se notează $\overline{(x, y)}$, mulțimea tuturor elementelor $(x', y') \in N^2$ pentru care avem :

$$\begin{aligned} & (x, y) \mathcal{R}(x', y') \\ \overline{(x, y)} &= \{(x', y') \in N^2, (x', y') \mathcal{R}(x, y)\}. \end{aligned}$$

18.1.3 MULȚIMEA CÎT

Clasele de echivalență determinate în mulțimea N^2 prin relația de echivalență \mathcal{R} formează o nouă mulțime, numită mulțimea cît a lui N^2 prin \mathcal{R} , care se notează N^2/\mathcal{R} .

Definiția 18.2. N^2/\mathcal{R} se numește mulțimea numerelor întregi. Un număr întreg este deci o clasă de echivalență în N^2 pentru relația \mathcal{R} .

Mulțimea N^2/\mathcal{R} a numerelor întregi este notată Z

$$Z = N^2/\mathcal{R}.$$

Observație

Un număr întreg poate avea deci mai mulți reprezentanți. Un reprezentant al numărului întreg $\overline{(x, y)}$ este perechea (x', y') care are proprietatea :

$$(x, y) \mathcal{R} (x', y') \Leftrightarrow x + y' = x' + y.$$

Dacă se dă un reprezentant (x, y) al unui număr întreg, atunci putem obține și alți reprezentanți dacă adunăm sau scădem (dacă este posibil) același număr natural, numerelor x și y . Într-adevăr, să notăm :

$$x_1 = x + m, y_1 = y + m, m \in N.$$

Avem :

$$x_1 + y = x + y + m, \quad x_1 + y = y_1 + x \Leftrightarrow (x, y) \mathcal{R} (x_1, y_1).$$

Prin urmare, perechea (x_1, y_1) este și ea un reprezentant al numărului întreg (x, y) .

18.1.4 REPREZENTAREA CANONICĂ A NUMERELOR ÎNTREGI

Să considerăm numărul întreg $\overline{(x, x)}$.

Scăzînd din ambele componente ale perechii (x, x) numărul natural x obținem :

$$(x - x, x - x) \mathcal{R} (x, x)$$

$$\text{sau} \quad (0, 0) \mathcal{R} (x, x).$$

Prin urmare $(0, 0) \in \overline{(x, x)}$.

Numărul întreg reprezentant al perechii $(0, 0)$ se numește numărul 0 (zero).

Fie (a, b) un element din N^2 . Vom distinge următoarele cazuri :

1) Dacă $a > b$, există un număr întreg x astfel ca :

$$a = b + x. \text{ Să arătăm că } (a, b) \mathcal{R} (x, 0), \text{ unde } x \in N.$$

Într-adevăr : $a + 0 = b + x$.

Putem lua ca reprezentant al clasei $\overline{(a, b)}$ elementul $(x, 0)$, care se numește reprezentant canonic al acestei clase.

Un număr întreg de forma $\overline{(x, 0)}$, $x \in N$, se numește număr întreg pozitiv.

$$a > b, \quad \overline{(a, b)} = \overline{(x, 0)}.$$

2) Dacă $a < b$, atunci există un număr natural x astfel că

$$b = a + x \text{ și } (a, b) \mathcal{R} (0, x).$$

Într-adevăr : $a + x = b + 0$, $(a, b) \mathcal{R} (0, x)$

$$\overline{(a, b)} = \overline{(0, x)}.$$

Numărul întreg de forma $\overline{(0, x)}$, $x \in N$ se numește negativ.

3. Dacă $a = b$, scăzînd din ambele componente numărul b se obține $(a, b) \mathcal{R} (0, 0)$. Numărul $\overline{(0, 0)}$ este nul și se notează 0.

Exemple

Numărul întreg $\overline{(7,5)}$ este pozitiv. Dacă scădem din ambele componente ale perechii $\overline{(7,5)}$, numărul natural 5 obținem : $\overline{(7,5)} \mathcal{R} \overline{(2,0)}$.

Numărul întreg $\overline{(2,0)}$ este numărul întreg pozitiv $+2$.

18.1.5 ADUNAREA PE N^2

Pe mulțimea N^2 vom defini o operație, pe care o numim adunare, astfel :

$$\forall (x, y) \in N^2 \text{ și } \forall (z, w) \in N^2 \text{ avem :}$$

$$(x, y) + (z, w) = (x+z, y+w).$$

Această operație este asociativă și comutativă (cititorul poate demonstra aceste două proprietăți utilizând proprietățile ce corespund adunării în N).

18.1.6 OPERAȚIA DE ADUNARE ESTE COMPATIBILĂ CU RELAȚIA DE ECHIVALENȚĂ \mathcal{R}

$$\text{Fie :} \quad (x, y) \mathcal{R} (x', y') \quad (1)$$

$$(z, w) \mathcal{R} (z', w') \quad (2)$$

Să arătăm că :

$$(x+z, y+w) \mathcal{R} (x'+z', y'+w').$$

$$\text{Din (1), rezultă că : } x+y' = x'+y \quad (3)$$

$$\text{Din (2), rezultă că : } z+w' = z'+w \quad (3')$$

Efectuând suma membru cu membru a relațiilor (3) și (3'), obținem :

$$(x+y') + (z+w') = (x'+y) + (z'+w)$$

$$\text{sau} \quad (x+z) + (y'+w') = (x'+z') + (y+w)$$

$$\text{sau} \quad (x+z, y+w) \mathcal{R} (x'+z', y'+w').$$

18.1.7 ADUNAREA PE Z

Pentru că adunarea pe N^2 este compatibilă cu relația \mathcal{R} se poate defini operația notată $\dot{+}$ determinată pe mulțimea cît N^2/\mathcal{R} astfel :

$$(\overline{x}, y) \dot{+} (\overline{z}, w) = (\overline{x+z}, y+w).$$

Se recunoaște ușor că această operație, notată de această dată $\dot{+}$, nu se poate confunda cu operațiile $+$ definite respectiv în N^2 și N .

Proprietăți.

1) Element neutru

Elementul (\overline{a}, b) este element neutru pentru operația $\dot{+}$, dacă pentru orice element (x, y) din Z avem :

$$\begin{aligned} & (\overline{x}, y) \dot{+} (\overline{a}, b) = (\overline{x}, y) \\ \text{sau : } & (\overline{x+a}, x+b) = (x+y) \Leftrightarrow (x+a, y+b) \mathcal{R} (x, y) \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow x+a+y = y+b+x \text{ sau } a=b. \end{aligned}$$

Prin urmare (\overline{a}, b) este element neutru dacă $a = b$. Elementul neutru al operației $\dot{+}$ pe N^2/\mathcal{R} este deci clasa de elemente (\overline{n}, n) al cărui reprezentant canonic este $(0,0)$. Vom nota elementul neutru cu $(0,0)$.

Element simetric

Un element (\overline{x}, y) din Z admite ca element simetric, elementul $(\overline{x'}, y')$, dacă :

$$\begin{aligned} & (\overline{x}, y) \dot{+} (\overline{x'}, y') = (\overline{0}, 0) \Leftrightarrow (\overline{x+x'}, y+y') = (\overline{0}, 0), \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow (x+x', y+y') \mathcal{R} (0,0), \end{aligned}$$

$$\text{sau : } x+x' = y+y'.$$

De unde :

$$y' = x \text{ și } x' = y \text{ (necunoscutele sînt } x' \text{ și } y').$$

Prin urmare pentru orice număr întreg (x, y) , există un număr întreg (y, x) , astfel ca :

$$(\overline{x}, y) + (\overline{y}, x) = (\overline{0}, 0).$$

Fiind definită operația $\dot{+}$ în Z , spunem că orice element în Z admite un element simetric.

3) Structura $(Z, \dot{+})$.

Operația $\dot{+}$ este asociativă și comutativă.

Elementul $(0, 0)$ este neutru pentru $\dot{+}$.

Un element (x, y) admite ca simetric elementul (y, x) .

Concluzie :

$(Z, \dot{+})$ este un grup abelian.

18.1.8. IZOMORFISMUL STRUCTURILOR $(N, +)$ și $(Z^+, \dot{+})$

Numerele al căror reprezentanți canonici sînt de forma $(x, 0)$, unde $x \in N$, se numesc numere întregi pozitive.

Mulțimea numerelor întregi pozitive sau nule este notată Z^+ .

Vom arăta că există o bijecție f din Z^+ în N , astfel ca :

$$f[(x, 0) \dot{+} (x', 0)] = f(x, 0) + f(x', 0).$$

Aplicația f care asociază oricărui element $(x, 0)$ din Z^+ , elementul x din N este o bijecție și un omomorfism.

$$f[(x, 0) + (x', 0)] = f[(x + x', 0)] = x + x' = f(x, 0) + f(x', 0).$$

Structurile $(Z^+, \dot{+})$ și $(N, +)$ sînt izomorfe.

Convenim să identificăm numărul întreg pozitiv (sau nul) $+p$ cu numărul natural p .

Observație.

Vom reprezenta deci prin același simbol numărul natural x și numărul întreg, pozitiv sau nul, $(x, 0)$.

Operației $\dot{+}$ definită pe Z îi corespunde operația $+$ definită pe N .

Astfel $(0, 0)$ este notat 0 .

Remarcăm că un număr întreg este pozitiv, negativ sau nul.

Numărului întreg $(x, 0)$ îi corespunde, pentru operația $\dot{+}$, simetricul său $(0, x)$ care este un număr negativ sau nul. Prin convenție vom nota acest număr întreg prin $-x$ și vom scrie $x + (-x) = 0$.

18.1.9. SCĂDEREA în Z

În Z să definim o nouă operație astfel :

Dacă $a = b + x$, vom scrie $a - b = x$, unde simbolul „ $-$ ” este un simbol operatoriu. Această operație este peste tot definită în Z .

Oricare ar fi (a, b) din Z^2 , există un element x din Z astfel ca $a = b + x$. În grupul abelian $(Z, +)$ o ecuație de forma $a = b + x$ este rezolvabilă și avem : $x = a + (-b)$.

Numărul întreg $a + (-b)$ se notează prin $a - b$ și se numește diferența dintre a și b . Operația prin care oricărei perechi de numere (a, b) i se asociază numărul $a - b$ și se numește scădere.

18.1.10. RELAȚIA DE ORDINE ÎN $(Z, +)$

Definiție 18.3 Un număr întreg x este mai mare sau egal cu un număr întreg y , dacă diferența $x - y$ este un element din Z^+ .

Prin urmare vom scrie : $x \geq y$, dacă $x - y \in Z^+$. Arătăm că această relație este o relație de ordine (notind prin simbolul obișnuit, uzual pentru relațiile de ordine \geq).

Proprietățile relației \geq :

1. Relația este reflexivă.

$\forall x, x \geq x$; într-adevăr $x - x = 0$ și 0 este un element din Z^+ .

2. Relația este antisimetrică.

Dacă pentru două elemente x și y avem simultan relațiile $x \leq y$ și $y \leq x$, atunci, $x = y$;

$$x \leq y \Rightarrow y - x = a \text{ și } a \in Z^+$$

$$y \leq x \Rightarrow x - y = b \text{ și } b \in Z^+$$

Adunând aceste două egalități membru cu membru obținem : $a + b = 0$ și prin urmare $a = b = 0$ sau $x = y$.

3. Relația este tranzitivă.

Pentru orice x, y, z , dacă $x \geq y$, $y \geq z$, atunci $x \geq z$ (cititorul va face demonstrația).

Relația \leq , este prin urmare o relație de ordine.

Mai mult, fiind date două numere întregi x și y atunci $x \leq y$ sau $y \leq x$. Această relație este deci o relație de ordine totală.

Observație : Relația \geq este compatibilă cu operația $+$.

Dacă $x \geq y$, atunci $x + a \geq y + a$ și reciproc ($a \in N$).

18.1.11. IZOMORFISMUL STRUCTURILOR (Z^+, \leq) și (N, \leq) .

Aplicația care la orice element $(\overline{x}, 0)$ din Z face să-i corespundă elementul x din N , astfel încât dacă $(\overline{x}, 0) \leq (\overline{y}, 0)$, atunci $x \leq y$ este un izomorfism.

Într-adevăr dacă $(\overline{x}, 0) \leq (\overline{y}, 0)$, atunci :

$$(\overline{y}, 0) - (\overline{x}, 0) = (\overline{a}, 0),$$

sau : $(\overline{y}, 0) = (\overline{a}, 0) + (\overline{x}, 0),$

sau :

$$f[(\overline{y}, 0)] = f[(\overline{a}, 0) + (\overline{x}, 0)] = f[(\overline{a+x}, 0)] = a+x$$

Prin urmare $y=a+x$, unde y , a și x sînt elemente din N .
Dacă $y=a+x$, atunci $x \leq y$.

18.1.12. ÎNMULȚIREA NUMERELOR ÎNTREGI

Să definim produsul \otimes a două perechi ordonate de numere din N^2 , prin relația :

$$(x, y) \otimes (x', y') = (xx' + yy', xy' + x'y).$$

Cititorul poate verifica că această operație este comutativă și asociativă.

Această operație este compatibilă cu relația de echivalență \mathcal{R} .

Într-adevăr, să considerăm perechile (x, y) , (x', y') , (z, z') , (w, w') , care aparțin lui N^2 , pentru care avem relațiile :

$$(x, y) \mathcal{R} (x', y') \quad (1)$$

$$(z, w) \mathcal{R} (z', w') \quad (2)$$

Va trebui să demonstrăm relația :

$$[(x, y) \otimes (z, w)] \mathcal{R} [(x', y') \otimes (z', w')].$$

Relațiile (1) și (2) sînt echivalente cu :

$$x+y' = x'+y \text{ și } z+w' = z'+w.$$

Se poate ușor arăta că :

$$xz+yw + y'z' + w'w' = w'z' + y'w' + yz + xw,$$

care arată compatibilitatea acestei operații cu relația de echivalență \mathcal{R} .

Operația de înmulțire $\dot{\times}$ definită în N^2 este compatibilă cu relația \mathfrak{A} . Prin urmare vom defini operația $\dot{\times}$ în mulțimea N^2/\mathfrak{A} astfel :

$$(\overline{x, y}) \dot{\times} (\overline{x', y'}) = \overline{(xx' + yy', xy' + x'y)}$$

Observație :

Am notat înmulțirea în N^2 prin simbolul \otimes . Notăm înmulțirea în Z prin simbolul \times pentru a nu confunda această operație cu înmulțirea în N , notată $\dot{\times}$.

Proprietățile operației $\dot{\times}$:

Se arată foarte ușor că operația $\dot{\times}$ definită pe mulțimea N^2/\mathfrak{A} este comutativă și asociativă.

— Element neutru

Dacă $(\overline{a, b})$ este element neutru pentru $\dot{\times}$, atunci pentru orice element $(\overline{x, y})$ din Z , vom avea :

$$(\overline{x, y}) \dot{\times} (\overline{a, b}) = (\overline{x, y}),$$

sau :

$$\overline{(xa + yb, ya + xb)} = \overline{(x, y)},$$

$$xa + yb + y = ya + xb + x,$$

sau :

$$xa + y(b+1) = x(b+1) + ya, \quad (3).$$

pentru x și y din N .

Din relația (3) deducem : $a = b+1$.

Prin urmare elementul $(\overline{b+1, b})$ este neutru pentru $\dot{\times}$.

Reprezentantul său canonic este $(1, 0)$.

— Element absorbant : Elementul neutru pentru operația $\dot{+}$ este element absorbant pentru operația $\dot{\times}$.

Într-adevăr :

$$\forall (x, y) \in N^2, (\overline{x, y}) \dot{\times} (\overline{0, 0}) = \overline{(x \cdot 0 + y \cdot 0, x \cdot 0 + y \cdot 0)} = (\overline{0, 0})$$

Proprietățile înmulțirii.

Înmulțirea este distributivă față de adunare :

$$[(\overline{a, b}) \dot{+} (\overline{c, d})] \dot{\times} (\overline{e, f}) = [(\overline{a, b}) \dot{\times} (\overline{e, f})] \dot{+} [(\overline{c, d}) \dot{\times} (\overline{e, f})].$$

Într-adevăr :

$$\begin{aligned}
 [(\overline{a}, \overline{b}) + (\overline{c}, \overline{d})] \times (\overline{e}, \overline{f}) &= \overline{(a+c, b+d)} \times (\overline{e}, \overline{f}) = \\
 &= \overline{[(a+c)e + (b+d)f, (a+c)f + (b+d)e]} = \\
 &= \overline{[(ae+bf) + (ce+df), (af+be) + (cf+de)]} = \\
 &= \overline{(ae+bf, af+be) + (ce+df, cf+de)} = \\
 &= (\overline{a}, \overline{b}) \times (\overline{e}, \overline{f}) + (\overline{c}, \overline{d}) \times (\overline{e}, \overline{f}).
 \end{aligned}$$

Structura lui $(Z, +, \times)$.

- 1) $(Z, +)$ este un grup comutativ ;
- 2) Operația \times este comutativă și asociativă ;
- 3) Operația $+$ admite element neutru ;
- 4) Operația \times este distributivă față de $+$.

Structura $(Z, +, \times)$ este un inel comutativ unitar.

18.1.13. REGULA SEMNELOR LA ÎNMULȚIRE

1) Produsul numerelor întregi pozitive.

Fie $(\overline{m}, 0)$ și $(\overline{n}, 0)$, $m, n \in N$, două numere pozitive.

Avem $(\overline{m}, 0) \cdot (\overline{n}, 0) = (\overline{mn}, 0)$,

ceea ce se scrie $(+m) \cdot (+n) = +(m \cdot n)$

2) Produsul numerelor întregi negative.

Fie $(0, \overline{m})$ și $(0, \overline{n})$, $m, n \in N$, două numere negative.

După regula stabilită la înmulțirea numerelor întregi avem :

$$(0, \overline{m}) \cdot (0, \overline{n}) = (\overline{mn}, 0)$$

ceea ce se scrie : $(-m) \cdot (-n) = +(m \cdot n)$.

3) Produsul numerelor întregi de semne contrare.

Fie $(\overline{m}, 0)$ și $(0, \overline{n})$, $m, n \in N$ două numere întregi de semne contrare.

Avem : $(\overline{m}, 0) \cdot (0, \overline{n}) = (0, \overline{m \cdot n})$ sau $(+m) \cdot (-n) = -(m \cdot n)$.

Pentru a efectua produsul a două numere întregi, se înmulțesc numerele naturale cu care sînt scrise cele două numere întregi, iar rezultatul primește semnul plus dacă numerele întregi care se

înmulțesc cu același semn și semnul minus în cazul când cele două numere întregi ce se înmulțesc au semne contrare.

Înmulțirea numerelor întregi are următoarele proprietăți :

- 1) Comutativitate : $\forall x, y \in \mathbb{Z} : x \cdot y = y \cdot x$;
- 2) Asociativitate : $\forall x, y, z \in \mathbb{Z} : x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$;
- 3) Element neutru : $\forall x \in \mathbb{Z} : x \cdot 1 = x$;
- 4) Distributivitatea înmulțirii față de adunare :

$$\forall x, y, z \in \mathbb{Z} : x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z.$$

Lăsăm în seama cititorilor noștri verificarea acestor proprietăți foarte simple.

18.2. MULȚIMEA NUMERELOR RAȚIONALE

Să considerăm mulțimea :

$\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} - \{0\}$ adică mulțimea numerelor întregi fără elementul zero.

Fie : $\mathbb{Z}^{*2} = \mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*$.

Pe mulțimea \mathbb{Z}^{*2} vom defini o relație de echivalență \mathcal{R} în modul următor :

Dacă : (a, b) și $(a', b') \in \mathbb{Z}^{*2}$, atunci : $(a, b) \mathcal{R} (a', b')$ dacă și numai dacă avem :

$$ab' = ba'.$$

Proprietățile relației \mathcal{R} .

a) Este reflexivă :

$$\forall (a, b), \text{ avem } (a, b) \mathcal{R} (a, b) \Leftrightarrow ab = ab.$$

b) Este simetrică :

$$\forall (a, b) \text{ și } \forall (a', b'), \text{ avem :}$$

$$(a, b) \mathcal{R} (a', b') \Rightarrow (a', b') \mathcal{R} (a, b),$$

căci :

$$ab' = a'b \text{ este echivalent } a'b = b'a.$$

c) Relația \mathcal{R} este tranzitivă :

Pentru orice $(a, b), (c, d), (e, f)$, dacă :

$$(a, b) \mathcal{R} (c, d) \text{ și } (c, d) \mathcal{R} (e, f), \text{ atunci } (a, b) \mathcal{R} (e, f).$$

Într-adevăr :

$$\begin{cases} (a, b) \mathcal{R}(c, d) \Leftrightarrow ad = bc. \\ (c, d) \mathcal{R}(e, f) \Leftrightarrow cf = de. \end{cases}$$

Dacă înmulțim cele două egalități membru cu membru, obținem :

$$adcf = bcde \Leftrightarrow af = be,$$

sau :

$$(a, b) \mathcal{R}(e, f).$$

Clasele de echivalență determinate în mulțimea Z^{*2} de relația \mathcal{R} , formează o nouă mulțime, numită mulțimea cît Z^{*2}/\mathcal{R} .

Mulțimea cît Z^{*2}/\mathcal{R} este deci o partiție a lui Z^{*2} în care elementele sînt clase de echivalență după \mathcal{R} .

Mulțimea Z^{*2}/\mathcal{R} se numește mulțimea numerelor raționale nenule și se notează Q^* .

Toate perechile aparținînd aceleiași clase de echivalență pot fi considerate ca diverși reprezentanți ai acestei clase. Conform cu definiția adoptată, vom zice că ele reprezintă un același număr rațional.

Cînd perechea (a, b) de numere întregi are rolul de reprezentant al unui număr rațional, i se dă numele de *fracție*, primului său termen a se numește *numărător*, iar cel de-al doilea, b se numește *numitor*.

Relația $ab' = a'b$ exprimă faptul că perechile (a, b) și (a', b') aparțin unei aceleiași clase de echivalență; ea exprimă, de asemenea, faptul că fracțiile $\frac{a}{b}$ și $\frac{a'}{b'}$, reprezintă un același număr rațional.

Mulțimea de referință fiind mulțimea Q a numerelor raționale, iar fracțiile $\frac{a}{b}$ și $\frac{a'}{b'}$, reprezentînd un același număr rațional, trebuie să le considerăm *egale*.

18.2.1. NUMĂRUL RAȚIONAL 0

Să considerăm mulțimea $Z \times Z$.

Cînd $a = 0$, atunci $ab' = 0$ și din $a'b = 0$, ($b \neq 0$) rezultă $a' = 0$. Deci, dacă o fracție are numărătorul nul, atunci orice

fracție egală cu aceasta are, de asemenea, numărătorul nul. Se zice că acest număr rațional este nul, se notează cu 0 iar valoarea sa absolută este 0. I se poate atribui semnul + sau -, la alegere, dar acesta, în general, se omite.

18.2.2. ÎNMULȚIREA NUMERELOR RAȚIONALE

Să definim pe mulțimea Z^{*2} , înmulțirea, notată \otimes , a două perechi (a, b) și (c, d) prin relația :

$$(a, b) \otimes (c, d) = (ac, bd).$$

Să considerăm perechile (a, b) , (a', b') , (c, d) și (c', d') .

Dacă : $(a, b) \mathcal{R} (a', b')$

$$(c, d) \mathcal{R} (c', d'),$$

atunci : $(ac, bd) \mathcal{R} (a'c', b'd')$.

Deoarece înmulțirea pe Z^{*2} este compatibilă cu relația de echivalență, putem defini operația determinată în mulțimea \dot{Q}^{*2} , pe care o notăm cu $\dot{\times}$, astfel :

$$(\overline{a, b}) \dot{\times} (\overline{c, d}) = (\overline{ac, bd})$$

18.2.3 PROPRIETĂȚILE ÎNMULȚIRII

1. Element neutru pentru $\dot{\times}$.

Dacă (a, b) este un element neutru pentru $\dot{\times}$, atunci, pentru orice element (x, y) din \dot{Q}^{*2} , avem :

$$(\overline{x, y}) \dot{\times} (\overline{a, b}) = (\overline{x, y})$$

sau :

$$(\overline{xa, yb}) = (\overline{x, y}),$$

sau :

$xy = ybx$, care implică $a = b$, pentru orice x și orice y , nenuli din \dot{Q}^{*2} .

Prin urmare (a, b) este element neutru pentru $\dot{\times}$, dacă $a = b$.

Elementul neutru din \dot{Q}^{*2} este deci clasa de echivalență a elementelor $(\overline{h, h})$ din Z^{*2} . Această clasă de echivalență admite ca reprezentant canonic elementul $(1, 1)$.

Să presupunem că simetricul elementului $(\overline{x, y})$ este elementul $(\overline{x', y'})$.

Atunci avem :

$$(\overline{x}, \overline{y}) \dot{\times} (\overline{x'}, \overline{y'}) = (\overline{1}, \overline{1}),$$

sau : $(\overline{xx'}, \overline{yy'}) = (\overline{1}, \overline{1})$.

Rezultă : $xx' = yy' = 1$, care este echivalent cu $(x', y') \mathcal{R} (y, x)$; x', y' sînt dați de relațiile $x' = \frac{1}{x}, y' = \frac{1}{y}$.

Prin urmare orice element (x, y) din Q^* admite element simetric pentru operația $\dot{\times}$:

$$\forall (x, y) \in N^2, (\overline{x}, \overline{y}) \dot{\times} (\overline{y}, \overline{x}) = (\overline{1}, \overline{1}).$$

Structura $(Q^*, \dot{\times})$.

- 1) $\dot{\times}$ este asociativă și comutativă ;
 - 2) Elementul $(\overline{1}, \overline{1})$ este neutru ;
 - 3) Orice element $(\overline{x}, \overline{y})$ admite element $(\frac{1}{\overline{x}}, \frac{1}{\overline{y}})$ ca simetric.
- $(Q^*, \dot{\times})$ este un grup abelian.

18.2.1. MULȚIMEA NUMERELOR RAȚIONALE NENULE

Se consideră submulțimea $\overline{Q} \subset Q$, avînd elemente de forma $(\overline{x}, \overline{1})$.

Această mulțime, avînd elemente de forma $(\overline{x}, \overline{1})$, înzestrată cu operația $\dot{\times}$, este izomorfă cu Z^* , înzestrată de $\dot{\times}$.

Să arătăm că aplicația f care face să corespundă elementului $(\overline{x}, \overline{1})$ din această mulțime numărul întreg nenul x este o bijecție și un omomorfism.

1. f este bijecție ; aceasta este evident ;
2. f este un omomorfism ; într-adevăr :

$$\begin{aligned} x &\xleftarrow{f} \overline{(\overline{x}, \overline{1})} \\ y &\xleftarrow{f} \overline{(\overline{y}, \overline{1})} \\ x \dot{\times} y &\xleftarrow{f} \overline{(\overline{x}, \overline{1}) \dot{\times} (\overline{y}, \overline{1})} \end{aligned}$$

$$f[(\overline{x}, \overline{1}) \dot{\times} (\overline{y}, \overline{1})] = f[(\overline{xy}, \overline{1})] = \overline{xy} = \overline{x} \dot{\times} \overline{y} = f[(\overline{x}, \overline{1})] \dot{\times} f[(\overline{y}, \overline{1})],$$

sau :

$$f[(\overline{x}, \overline{1}) \dot{\times} (\overline{y}, \overline{1})] = f[(\overline{x}, \overline{1})] \dot{\times} f[(\overline{y}, \overline{1})].$$

În aceste condiții, orice număr rațional $(\overline{x, y})$ ($y \neq 0$) verifică egalitatea : $(\overline{x, y}) = (\overline{x, 1}) \times (\overline{1, y})$, și un reprezentant va fi notat x/y , sau : $(\overline{x, y}) = \frac{(\overline{x, 1})}{(\overline{y, 1})} = \frac{x}{y}$.

Putem deci considera numărul rațional x/y ca produsul numărului rațional $(\overline{x, 1})$ prin simetricul numărului rațional $(\overline{y, 1})$.

Vom nota $\frac{(\overline{x, 1})}{(\overline{y, 1})}$, bara orizontală simbolizează operația reciprocă înmulțirii.

În cele ce urmează vom folosi, pentru notația numărului rațional forma x/y .

18.2.5. MULȚIMEA NUMERELOR RAȚIONALE

Să considerăm submulțimea Z'^2 a lui Z^2 definită astfel :

$$Z'^2 = \{(0, x), x \in N\}$$

În mulțimea Z' se consideră relația,

$$(x, y) \mathfrak{R} (x', y') \Leftrightarrow xy' = x'y.$$

Avem : $(0, x) \mathfrak{R} (0, y) \Leftrightarrow 0 \cdot x = 0 \cdot y$

Clasa tuturor elementelor echivalente cu $(0, x)$ o vom nota $(\overline{0, x})$. Mulțimea $Q = Q^* \cup (\overline{0, x})$ se numește mulțimea numerelor raționale.

18.2.6. ADUNAREA ÎN Q

Pe mulțimea $Z' \times Z'$ definim operația \oplus , numită adunarea perechilor, astfel :

$$(x, y) \oplus (z, w) = (xw + zy, yw).$$

Se arată, ca și în exemplele precedente, că operația de adunare astfel definită este compatibilă cu relația de echivalență \mathfrak{R} , adică, dacă :

$$(x, y) \mathfrak{R} (x', y') \text{ și } (z, w) \mathfrak{R} (z', w'),$$

atunci :

$$[(x, y) \oplus (z, w)] \mathfrak{R} [(x', y') \oplus (z', w')] \quad (1)$$

Lăsăm în seama cititorului verificarea acestei proprietăți.

Relația (1) ne arată că dacă în operația \oplus se înlocuiesc perechile (x, y) și (z, w) cu două perechi echivalente (x', y') și (z', w') se obțin perechi echivalente după relația \mathcal{R} .

Operația \oplus corespunde deci la o operație între clase de echivalență. Vom nota cu $+$ operația corespunzătoare între numerele raționale și avem :

$$x/y + z/w = (xw + yz)/yw$$

Acastă operație este comutativă, admite element neutru și, pentru fiecare element al mulțimii Q^* există un element simetric.

1) Comutativitatea și asociativitatea sînt evidente ;

2) Element neutru

Operația $+$ fiind definită, să presupunem că există un element neutru notat a/b .

Avem :

$$\begin{aligned} a/b + x/y = x/y &\Leftrightarrow ay + bx/by = x/y \Leftrightarrow (ay + bx/by) \mathcal{R} (x/y) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (ay + bx)y = ybx \Leftrightarrow y^2a = 0 \Leftrightarrow a = 0. \end{aligned}$$

Elementul $0/b$ este neutru pentru operația $+$.

3. Element simetric

Să presupunem că orice element x/y a lui Q admite un element simetric (x'/y') .

Atunci avem :

$$x/y + x'/y' = 0/1$$

sau : $(xy' + x'y/yy') \mathcal{R} (0,1)$

De unde rezultă că : $xy' = -x'y$ sau : $(x', y') \mathcal{R} (-x, y)$.

Prin urmare orice element $x/y \in Q$ admite un element simetric $-x/y$ față de operația $+$.

Structura $(Q, +)$

1) Operația $+$ este comutativă ;

2) Este asociativă ;

3) Elementul $(0,1)$ este neutru ;

4) Orice element x/y are un simetric $-x/y$ față de operația $+$.
 $(Q, +)$ este un grup abelian.

Structura $(Q, +, \times)$

- 1) $(Q, +)$ este un grup abelian;
 - 2) (Q^*, \times) este un grup abelian;
 - 3) Se verifică că înmulțirea este distributivă față de adunare.
- Structura $(Q, +, \times)$ este un corp.

18.2.7. RELAȚIA DE ORDINE ÎN Q

Definiție 18.4. Se numește submulțimea numerelor raționale pozitive, o submulțime a mulțimii Q , notată Q^+ , ale cărei elemente x/y sînt astfel încît $x \cdot y$ aparține lui Z^+ .

Definiție 18.5. Se numește submulțimea numerelor raționale negative și se notează Q^- , submulțimea a mulțimii Q , ale cărei elemente x/y sînt astfel încît $x \cdot y \in Z^-$.

Definiție 18.6. Numărul rațional x este „superior sau egal”, numărului y , dacă și numai dacă diferența $x - y$ este un element din Q^+ . Se notează $x \geq y$.

Această relație este o relație de ordine totală :

- 1) Relația este reflexivă : $\forall x, x \geq x$;
- 2) Relația este antisimetrică ; dacă relațiile $x \geq y$ și $y \geq x$ sînt adevărate simultan, atunci $x = y$.
- 3) Relația este tranzitivă.

Această relație este deci o relație de ordine; arătăm că această ordine este totală.

Într-adevăr, orice număr rațional aparține fie lui Q^+ , fie lui Q^- . Fiind date două numere raționale oarecare x și y , atunci $x - y$ aparținînd lui Q^+ sau lui Q^- , vom avea respectiv relația $x \geq y$ sau $y \geq x$.

18.3. RELAȚIA DE CONGRUENȚĂ ÎN MULȚIMEA Z

Definiție 18.7. Două numere întregi x și y sînt congruente modulo a și se scrie $x \equiv y \pmod{a}$, dacă $x - y = az$, unde $z \in Z$. Relația de congruență este o relație de echivalență în Z .

- 1) Relația este reflexivă :

$$\forall x \in Z, x - x = 0 = a \cdot 0, 0 \in Z, \text{ deci } x \equiv x \pmod{a}$$

2) Relația este simetrică :

$\forall (x, y) \in Z^2$, dacă $x - y = az$, atunci : $y - x = -az$.

3) Relația este tranzitivă :

Pentru orice x, y, w din Z , dacă : $x - y = az$ și $y - w = az'$, atunci $x - w = az''$.

Într-adevăr :

$$(x - y) + (y - w) = x - w = az + az' = a(z + z') = az''.$$

O altă interpretare a relației de echivalență.

Dacă x și y sînt două elemente oarecare din Z , împărțirea lui x și y prin a dă :

$$x = aq_1 + r_1, 0 \leq r_1 < a;$$

$$y = aq_2 + r_2, 0 \leq r_2 < a.$$

Dacă x și y sînt echivalente :

$$x - y = az,$$

$$\text{atunci } [(aq_1 + r_1) - (aq_2 + r_2)] = az,$$

$$\text{sau : } [a(q_1 - q_2) + r_1 - r_2] = az,$$

$$\text{sau : } a(q_1 - q_2) = az \text{ și } (r_1 - r_2) = 0, \text{ rezultînd } r_1 = r_2.$$

Cititorul poate verifica că, reciproc, dacă două numere x și y dau același rest cînd ele se împart prin a , atunci aceste două numere sînt echivalente în sensul relației de mai sus :

$$x - y = az \text{ sau } x \equiv y \pmod{a},$$

$$x = aq + r \text{ și } y = aq' + r.$$

Clasele de echivalență a tuturor perechilor de numere întregi congruente modulo a le vom nota aZ .

18.3.1. MULȚIMEA CÎT

Clasele de echivalență determinate în mulțimea Z prin relația de congruență formează o nouă mulțime numită mulțimea cît a lui Z prin a .

Notăm această mulțime cît prin simbolul Z/aZ .

18.3.2. REPREZENTAREA CANONICĂ

Fie x un element din Z .

$$\begin{cases} x = aq + r \\ 0 \leq r < a \end{cases} \quad \text{sau } x - r = aq, \quad x - r \in aZ,$$

x și r sînt deci echivalente.

Relația $0 \leq r < a$ implică că reprezentările canonice ale claselor de echivalență sînt: $0, 1, 2, \dots, a-1$, și vom nota clasele corespundente prin simbolurile: $\hat{0}, \hat{1}, \dots, \hat{a-1}$. Z/aZ este deci o mulțime de a elemente distincte, această mulțime este finită.

18.3.3. OPERAȚIA DE ADUNARE ÎN Z/aZ

Operația de adunare, notată $+$, din Z^2 , este compatibilă cu relația de echivalență:

$$\forall (x, y) \in Z^2, \forall (x', y') \in Z^2, \text{ dacă:}$$

$$x \equiv x' \pmod{a}, y \equiv y' \pmod{a}, \text{ atunci } x + y \equiv x' + y' \pmod{a}.$$

Demonstrație:

$$x - x' = az'$$

$$y - y' = az''$$

Adunînd cele două egalități membru cu membru, obținem:

$$[(x - x') + (y - y')] = az, \text{ sau } [(x + y) - (x' + y')] = az \text{ și } x + y \equiv x' + y' \pmod{a}.$$

Compatibilitatea adunării cu relația de echivalență ne permite definirea în mulțimea cit a operației $+$.

Să notăm cu \hat{x} și respectiv \hat{y} clasele de echivalență a elementelor congruente modulo a cu x , respectiv y și avem:

$$\hat{x} + \hat{y} = \widehat{x + y}.$$

Structura $(Z/aZ, +)$

1. Operația $+$ este comutativă și asociativă (proprietatea operației de adunare notată $+$, este conservată prin operația $+$).

2. Există pentru $+$ un element neutru : $\hat{0}$.

Dacă \hat{x} este element neutru pentru orice clasă \hat{y} avem :

$$\hat{y} + \hat{x} = \hat{y},$$

sau $\widehat{y + x} = \hat{y}$, egalitatea între clase care implică :

$$(y + x) \mathcal{R} y, \text{ sau } [(y + x) - y] = aZ,$$

sau $x \in aZ$, sau $\hat{x} = \hat{0}$.

3. Orice element admite un element simetric :

$$\hat{b} + (-\hat{b}) = \hat{0}.$$

Dacă \hat{x} este simetric lui \hat{b} , pentru $+$, avem :

$$\hat{b} + \hat{x} = \hat{0},$$

sau : $\widehat{b + x} = \hat{0}$ și $(b + x) \mathcal{R} 0$,

sau : $(b + x) = az$ sau $[x - (-b)] \in aZ$.

x este deci echivalent cu $(-b)$ și $\hat{x} = -\hat{b}$.

Orice element admite deci pentru $+$ un element simetric.

Cele trei proprietăți determină pe $(Z/aZ, +)$ o structură de grup comutativ.

18.3.4. OPERAȚIA DE ÎNMULȚIRE ÎN Z/aZ

Vom arăta că operația de înmulțire, notată \times în Z , este compatibilă cu relația de echivalență :

$$\forall (x, y) \in Z^2, \forall (x', y') \in Z^2, \text{ dacă :}$$

$$x \equiv x' \pmod{a} \text{ și } y \equiv y' \pmod{a} \text{ atunci } x - y \equiv x' - y' \pmod{a}$$

Demonstrație :

$$x = aq + r, y = ak + r', x \cdot y = a^2 qk + a(qr' + kr) + rr',$$

$$x' = aq' + r, y' = ak' + r', x' \cdot y' = a^2 q'k' + a(q'r' + k'r) + rr';$$

și deci :

$$xy = ka + rr',$$

$$x'y' = qa + rr',$$

adică xy și $x'y'$ sînt echivalente.

18.3.5. OPERAȚIA \times ÎN Z/aZ

Compatibilitatea dintre operația \times cu relația de echivalență ne permite să definim pe mulțimea cit operația \times astfel :

$$\hat{x} \times \hat{y} = \widehat{x \times y}.$$

Proprietățile operației \times

1) Această operație este comutativă și asociativă (proprietatea a operației \times în Z , conservată prin operația cit).

2) Operația \times admite un element neutru. Dacă \hat{y} este element neutru, vom avea pentru orice element \hat{b} :

$$\hat{b} \times \hat{y} = \hat{b}, \text{ sau } \widehat{b \times y} = \hat{b},$$

sau : $(b \times y) \mathcal{R} b, b(y-1) \in aZ$.

Relația fiind adevărată pentru orice element b din Z , deducem :

$$(y-1) \in aZ \text{ sau } y \mathcal{R} 1 \Leftrightarrow \hat{y} = \hat{1}.$$

3) $\hat{0}$ este absorbant pentru \times (proprietate pe care cititorul o va verifica).

4) \times este distributivă prin $+$ (proprietatea a operațiilor $+$ și \times în Z conservată prin operațiile citurilor) :
 $(Z/aZ, +, \times)$ are o structură de inel.

Se demonstrează în același mod proprietățile următoare :

5) Dacă $x_1 \equiv y_1 \pmod{a}$; $x_2 \equiv y_2 \pmod{a}$, ..., $x_n \equiv y_n \pmod{a}$, unde $x_i, y_i \in \mathbb{Z}$, $i = 1, 2, \dots, n$.

atunci : $x_1 + x_2 + \dots + x_n \equiv y_1 + y_2 + \dots + y_n \pmod{a}$.

6) Dacă $x \equiv y \pmod{a}$, atunci :

$$x + ak \equiv b \pmod{a}, \quad k \in \mathbb{Z};$$

7) Dacă $x \equiv y \pmod{a}$, atunci ;

$$x^n \equiv y^n \pmod{a}, \quad n \in \mathbb{N};$$

8) Dacă $x \equiv y \pmod{a}$, atunci :

$$xk \equiv yk \pmod{a}, \quad \text{unde } k \in \mathbb{N};$$

9) Dacă $x \equiv y \pmod{a}$, atunci :

$$x \equiv y \pmod{d}, \quad \text{unde } d \text{ este un divizor a lui } a.$$

18.3.6. APLICAȚII

1. Să se calculeze restul împărțirii numărului 197^{21} la 13.

Soluție. Avem $197 \equiv 13 \cdot 15 + 2$ și prin urmare $197 \equiv 2 \pmod{13}$

Aplicând P_7 , obținem :

$$197^{21} \equiv 2^{21} \pmod{13}.$$

Avem : $2^7 = 128$. Dar $128 \equiv 11 \pmod{13}$.

Prin urmare avem : $2^7 \equiv 11 \pmod{13}$.

Aplicând din nou P_7 obținem :

$$(2^7)^3 \equiv 11^3 \pmod{13},$$

sau : $2^{21} \equiv 1331 \pmod{13}$, $2^{21} \equiv 5 \pmod{13}$.

Prin urmare avem :

$$197^{21} \equiv 2^{21} \pmod{13} \equiv 5 \pmod{13}.$$

Restul împărțirii este deci 5.

2. Să se calculeze restul împărțirii prin 6 a numărului $N = 122^{98}$

Soluție. $122 \equiv 2 \pmod{6}$, $122^{96} \equiv 2^{96} \pmod{6}$.

Avem : $2 \equiv 2 \pmod{6}$, $2^2 \equiv 4 \pmod{6}$, $2^3 \equiv 2 \pmod{6}$, $2^4 \equiv 4 \pmod{6}$...

În general : $2^{2^p} \equiv 4 \pmod{6}$, $2^{2^p+1} \equiv 2 \pmod{6}$.

Deoarece 96 este un număr par, restul împărțirii este 4.

18.4. NUMERE REALE

Vom arăta că nu există în mulțimea Q un număr al cărui pătrat să fie egal cu 2.

Pentru a demonstra această afirmație vom proceda prin reducerea la absurd.

Să presupunem că există un număr rațional ireductibil $\frac{p}{q}$ al cărui pătrat este numărul 2.

Vom avea :

$$\frac{p^2}{q^2} = 2, \text{ sau } p^2 = 2q^2, p, q \in N$$

Vom distinge două principale cazuri.

1) Dacă p este impar, atunci p^2 este de asemenea impar și prin urmare rezultă că $2q^2$ este impar ceea ce este imposibil.

2) Dacă p este par, atunci p este divizibil prin 2 și prin urmare p^2 este divizibil cu 4. Însă q este impar (fracția $\frac{p}{q}$ fiind ireductibilă și prin urmare q nu poate fi divizibil cu 2) iar $2q^2$ nu poate fi divizibil cu 4. Prin urmare ajungem din nou la o contradicție.

Deci nu există nici un număr rațional al cărui pătrat să fie egal cu 2.

Este necesar să construim o nouă mulțime, pe care o vom nota cu R , care are toate proprietățile mulțimii Q , dar care să posede în plus și alte proprietăți printre care existența unui element al cărui pătrat să fie egal cu 2. În cele ce urmează vom schița numai construcția mulțimii numerelor reale urmînd o cale indicată de Lucienne Felix.*

Definiție 18.8. Se numește majorantul unei submulțimi A , a unei mulțimi E , ordonată după relația $<$, orice element M a lui E care verifică relația $x < M$, pentru orice $x \in A$.

* În lucrarea „Expunere modernă a matematicii elementare” (Ed. științifică, 1970).

Definiție. 18.9. Se numește minorantul unei submulțimi A a lui E , orice element m a lui E care verifică relația $x > m$ pentru orice $x \in A$.

Definiție. 18.10. Dacă M este un majorant al submulțimii $A \subset E$, care aparține lui A , atunci el se numește element maximal.

În mod analog se definește elementul minimal.

Să considerăm o diviziune a mulțimii Q^+ în două submulțimi \bar{Q}^+ și \hat{Q}^+ .

Submulțimea \bar{Q}^+ este formată din numerele raționale q care au proprietatea că $q^2 < a$ ($a \in Q$) și submulțimea \hat{Q}^+ este formată din elementele q ale lui Q^+ , care verifică relația $q^2 > a$.

18.4.1. PROPRIETĂȚI

Mulțimea \bar{Q}^+ , majorată de elementele lui Q , nu are cel mai mare element.

Să considerăm $\frac{x}{y} \in \bar{Q}^+$, ($x, y \in N$)

și să notăm $a = \frac{\alpha}{\beta}$, $\alpha \in N$, $\beta \in N$.

Din relația evidentă :

$$\left(\frac{x}{y}\right)^2 < \frac{\alpha}{\beta} \text{ deducem : } \beta x^2 - \alpha y^2 < 0.$$

Se arată că se poate găsi un k întreg și pozitiv, astfel încît :

$$\left(\frac{kx + 1}{ky}\right)^2 < \frac{\alpha}{\beta} \quad (1)$$

Această relație se mai poate scrie :

$$\left(k^2 - \frac{\beta x}{(\alpha y^2 - \beta x^2)^2}\right)^2 - \frac{\alpha \beta y^2}{(\alpha y^2 - \beta x^2)^2} > 0 \quad (2)$$

Să notăm cu r un număr rațional aparținând clasei numerelor raționale pozitive. Vom avea :

$$r^2 > \frac{\alpha \beta x^2}{(\alpha y^2 - \beta x^2)^2}$$

Din relația (2), deducem : $k > \frac{\beta x}{\alpha y^2 - \beta x^2} + r$.

Pentru ca relația (1) să fie verificată, trebuie să avem :

$$\frac{kx + 1}{ky} > \frac{kx}{ky}, \text{ sau } \frac{kx + 1}{ky} > \frac{x}{y}.$$

Prin urmare, orice ar fi numărul rațional aparținând lui \bar{Q}^+ există un număr rațional mai mare decât el, aparținând lui \bar{Q}^+ .

Se poate arăta, urmînd o cale analoagă, că mulțimea \hat{Q}^+ , majorată prin elementele lui \bar{Q}^+ , nu are cel mai mic element.

Cel mai mic majorant al mulțimii \bar{Q}^+ se numește margine superioară a lui \bar{Q}^+ . Se definește în același mod marginea inferioară.

Definiție. 18.11. Se numește mulțimea numerelor reale, reuniunea mulțimii numerelor raționale cu mulțimea marginilor inferioare și superioare a tuturor elementelor majorate sau minorate de Q .

Exerciții rezolvate.

Să considerăm șirul :

$$u_1 = \sqrt{2}, \quad u_2 = \sqrt{2 + u_1}, \quad u_3 = \sqrt{2 + u_2}, \dots$$

$$u_n = \sqrt{2 + u_{n-1}} \dots$$

Să se arate că acest șir este crescător și este mărginit superior de 2.

Demonstrație.

$$u_2 = \sqrt{2 + \sqrt{2}} > u_1, \quad u_3 = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}} > u_2, \dots,$$

$$u_n \geq u_{n-1}$$

Din relația $u_n > u_{n-1}$, deducem :

$$2 + u_n > 2 + u_{n-1} \Rightarrow \sqrt{2 + u_n} > \sqrt{2 + u_{n-1}} \Rightarrow u_{n+1} > u_n.$$

Șirul este crescător.

Din relația $u_n < 2$, deducem :

$$u_n + 2 < 4 \Rightarrow \sqrt{2 + u_n} < 2 \Rightarrow u_{n+1} < 2.$$

18.5. NUMERE COMPLEXE

18.5.1. GENERALITĂȚI

Pe mulțimea R^2 se definesc operațiile :

1) Adunarea perechilor de numere reale (operație pe care o notăm $+$) :

$$\forall (a, b) \in R^2, (c, d) \in R^2 ; (a, b) + (c, d) = (a+c, b+d).$$

2) Înmulțirea cu un număr real λ (operație pe care o notăm \times).

$$\forall (a, b) \in R^2, \lambda \times (a, b) = (\lambda a, \lambda b).$$

3) Înmulțirea perechilor (operație pe care o notăm \cdot).

$$\forall (a, b) \in R^2, \forall (c, d) \in R^2 : (a, b) \cdot (c, d) = (ac-bd, ad+cb).$$

Dacă $(a, b) = (a', b')$ atunci $a = a', b = b'$.

Mulțimea R^2 înzestrată cu operațiile $+$, \cdot , \times se numește mulțimea numerelor complexe și se notează cu K .

Operațiile au următoarele proprietăți care se pot verifica ușor :

(α) *Adunarea*

$$1) (a, b) + (c, d) = (c, d) + (a, b) \text{ (comutativitate);}$$

$$2) (a, b) + [(c, d) + (e, f)] = [(a, b) + (c, d)] + (e, f) \text{ (asociativitatea);}$$

$$3) (a, b) + (0, 0) = (a, b) \text{ (element neutru);}$$

$$4) (a, b) + (-a, -b) = (0, 0) \text{ (element simetric).}$$

(β) *Înmulțirea cu un număr real*

$$1) (\lambda + \mu) \times (a, b) = \lambda \times (a, b) + \mu \times (a, b);$$

$$2) 1 \times (a, b) = (a, b);$$

$$3) \lambda \times \mu \times (a, b) = (\lambda \mu) \times (a, b).$$

(γ) *Înmulțirea*

$$1) (a, b) \cdot (c, d) = (c, d) \cdot (a, b) \text{ (comutativitate);}$$

$$2) (a, b) \cdot [(c, d) \cdot (e, f)] = [(a, b) \cdot (c, d)] \cdot (e, f) \text{ (asociativitate);}$$

$$3) (a, b) \cdot (1, 0) = (a, b) \text{ (element neutru);}$$

4) $(a, b) \cdot \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2} \right) = (1, 0)$ (element simetric);

5) $(a, b) \cdot [(c, d) + (e, f)] = (a, b) \cdot (c, d) + (a, b) \cdot (e, f)$
(înmulțirea este distributivă față de adunare).

Proprietăți

Structura $(K, +; \times)$ este un spațiu vectorial.

Structura $(K, +, \cdot)$ este un corp comutativ.

Lăsăm această verificare în seama cititorilor noștri.

18.5.2. BAZA CANONICĂ A SPAȚIULUI VECTORIAL $(K, +; \times)$

Să considerăm două numere complexe $(1, 0)$ și $(0, 1)$.

Avem : $(a, b) = a \times (1, 0) + b \times (0, 1)$.

Numerele complexe $(1, 0)$ și $(0, 1)$ constituie o bază a spațiului vectorial, numită baza canonică.

18.5.3. IZOMORFISMUL MULȚIMII R CU O SUBMULȚIME A LUI K

Să notăm cu K' submulțimea formată din toate numerele complexe de forma $(x, 0)$, $x \in R$.

Să considerăm o aplicație a mulțimii numerelor reale pe submulțimea K' dată prin relația :

$$\forall a \in R, f(a) = (a, 0).$$

Se poate arăta că această aplicație este o bijecție.

Avem :

$$\begin{array}{l} a \in R \Rightarrow (a, 0) \in K' \\ b \in R \Rightarrow (b, 0) \in K' \\ \hline a + b \in R \Rightarrow (a + b, 0) \in K' \\ \lambda \in R, \lambda \cdot a \Rightarrow \lambda(a, 0) \end{array}$$

Prin urmare :

$$f(a + b) = f(a) + f(b);$$

$$f(\lambda a) = \lambda \cdot f(a).$$

Aplicația f este un izomorfism.

Pe baza acestui izomorfism putem nota numărul complex $(a, 0)$ cu a .

Se notează numărul complex $(1, 0)$ prin 1 , iar numărul complex $(0, 1)$ prin i .

$$\text{Avem } (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0).$$

$$\text{Prin urmare } i^2 = -1.$$

Pe baza notațiilor introduse avem :

$$(a, b) = a \times (1, 0) + b \times (0, 1) = a + b i.$$

Se poate ușor verifica ca operațiile notate $+$, \cdot , \times , definite în mulțimea numerelor complexe, se reduc la operațiile algebrice obișnuite cu expresii algebrice binomiale de forma :

$$x + i y \quad (i^2 = -1).$$

Exerciții rezolvate

Să se afle numerele complexe care au pătratele egale cu $-2i$.

Soluție

$$(x + iy)^2 = -2i \Leftrightarrow x^2 + 2i xy - y^2 = -2i \Leftrightarrow$$

$$(x^2 - y^2) + 2xyi = -2i \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ 2xy = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ xy = -1 \end{cases} \vee \begin{cases} x + y = 0 \\ xy = -1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ xy = -1 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -y \\ xy = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x^2 = -1 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -y \\ x^2 = 1 \end{cases}$$

Singurele numere complexe z care satisfac relația

$$z^2 = -2i \text{ sînt } z_1 = 1 - i, z_2 = -1 + i.$$

18.5.4. FORMA TRIGONOMETRICĂ A UNUI NUMĂR COMPLEX

Să considerăm numărul complex $z = a + bi$ și să reprezentăm față de un sistem de axe punctul $M(a, b)$. Avem : $m = \overline{OM} = \sqrt{a^2 + b^2}$,

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a}, \quad \varphi = \operatorname{arctg} \frac{b}{a} + k\pi$$

Prin urmare punctul M este perfect determinat dacă se cunoaște :

$$OM = m \quad (m \geq 0),$$

$$(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM}) = \varphi \pmod{2\pi}$$

Avem :

$$a = m \cos \varphi, \quad b = m \sin \varphi,$$

$$z = a + bi = m \cos \varphi + i m \sin \varphi = m(\cos \varphi + i \sin \varphi) \quad (1)$$

Expresia (1) se numește forma trigonometrică a unui număr complex.

Exemplul 1.

Să se scrie sub formă trigonometrică numărul complex $z = 1 + i$.

$$\text{Avem : } m = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{1}, \quad \varphi = \frac{\pi}{4}.$$

$$\text{Prin urmare : } z = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

18.5.5. FORMULA LUI MOIVRE

Fie :

$$z_1 = m_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$$

$$z_2 = m_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$$

Avem :

$$z_1 \cdot z_2 = m_1 \cdot m_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)] \quad (1)$$

$$z_1 : z_2 = \frac{m_1}{m_2} [\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)] \quad (2)$$

$$z = m(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

$$z^n = m^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi) \quad (3)$$

Formula (3) se numește formula lui Moivre.

Exemplul 2

Să se calculeze $\sin 3\alpha$ cu ajutorul funcțiilor trigonometrice ale unghiului α .

Soluție

$$(\cos \alpha + i \sin \alpha)^3 = \cos 3\alpha + i \sin 3\alpha$$

$$\cos^3 \alpha + 3i \cos^2 \alpha \sin \alpha - 3 \cos \alpha \sin^2 \alpha - i \sin^3 \alpha = \cos 3\alpha + i \sin 3\alpha$$

Se deduce :

$$\cos 3\alpha = \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha \sin^2 \alpha$$

$$\sin 3\alpha = 3 \cos^2 \alpha \sin \alpha - \sin^3 \alpha$$

18.6. EXERCITII ȘI PROBLEME

1. Să se arate că pentru orice număr întreg inegalitatea $a \leq b$ implică $(-b) \leq (-a)$.

2. Să se arate că singurele elemente ale mulțimii \mathbb{Z} care admit elemente inverse sînt $+1$ și -1 .

3. Să se arate că în mulțimea numerelor întregi ecuația $a + x = b$ admite o soluție unică.

4. Să se arate că dacă în mulțimea numerelor întregi avem inegalitatea $x \leq y$, atunci $ax \leq ay$, dacă $a > 0$, și $ax \geq ay$, dacă $a < 0$.

5. În mulțimea \mathbb{Z}^2 se definesc două operații notate \top și \perp prin relațiile :

$$(a, b) \top (a', b') = (a + a', b + b').$$

$$(a, b) \perp (a', b') = (aa' - bb', ab' + ba').$$

Să se arate că $(\mathbb{Z}^2, \perp, \top)$ este un inel. Să se precizeze care sînt elementele unitare.

6. Să se determine ce semn are suma :

$$(\overline{p, q}) + (\overline{q-1, p-1}).$$

7. Să se afle semnele numerelor întregi a și b dacă avem :

$$ab > 0 \text{ și } a + b > 0.$$

8. Să se determine relația dintre p și q astfel încît să avem :
 $(\overline{p+1, q}) = (\overline{q+1, p}).$

9. Să se determine un număr de două cifre cunoscînd suma lor egală cu 1008 și cel mai mare divizor comun egal cu 24.

10. Să se arate că cel mai mare divizor comun al numerelor întregi pozitive a și b este același cu cel mai mare divizor comun al numerelor $5a + 3b$ și $13a + 8b$.

11. Să se arate că numărul $A = 3^{2n+2} - 2^{n+1}$, $n \in \mathbb{Z}^+$ este divizibil cu 7 oricare ar fi numărul n .

12. Să se arate că numărul $7^n + 1$ este divizibil cu 8, dacă n este impar, și să se afle restul împărțirii sale prin 8.

13. Dacă a și b sînt două numere întregi oarecare, arătați că numărul $a^2 + b^2$ este divizibil prin 7, dacă și numai dacă, numerele a și b sînt divizibile cu 7.

14. Să se arate că dacă numerele m și n sînt multipli ai numărului 3, numărul $A = 3^{2m} + 3^n + 1$ este divizibil cu numărul 13.

Să se determine apoi restul împărțirii numărului A la 13, dacă n este multiplu de 13.

15. Să se arate că pentru orice număr natural n numărul $37^{n+2} + 16^{n+1} + 23^n$ se divide cu 7.

16. Să se arate că numărul $3^{105} + 4^{105}$ se divide cu 181.

17. Să se arate că $(7a + 3)^{2n+1} + (7b + 25)^{2n+1}$ se divide cu 7, $a, b, n \in \mathbb{N}$.

18. Să se arate că numărul $72^{2n+2} - 47^{2n} + 28^{2n-1}$ se divide cu 25.

19. Să se arate că numărul $2^{60} + 7^{30}$ se divide cu 13.

20. Să se arate că $4^n + 15^n - 1$ se divide cu 9, unde $n \in \mathbb{N}$.

21. Pentru ce valori întregi x numărul $a(x^3 + a^2x^2 + a^2 - 1)$ se divide cu 6, pentru orice număr întreg a .

22. Să se arate că numărul $N = 5^{2n-1} \cdot 2^{n+1} + 3^{n+1} \cdot 2^{n-1}$ se divide cu 19 pentru orice număr natural n .

23. Să se arate că numărul $a^{4n+1} - a$ pentru orice numere întregi a și pentru $n \geq 0$ se divide cu 30.

24. Să se afle toate numerele naturale n astfel încât numărul $n^2 + 1$ se divide cu $n + 1$.

25. Să se arate că pentru orice numere întregi x și y , numărul $N = (x^2y^3 - 4x^2y)(x^4 + x^2 - 2)$ se divide cu 216.

26. Să se arate că $(x - y)^5 + (y - z)^5 + (z - x)^5$ se divide cu 5 $(x - y)(y - z)(z - x)$, dacă x, y, z sînt numere întregi impare și neegale.

27. Să se arate că numărul $N = 2^{5n-1} + 2^{5n-2} + 2^{5n-3} + \dots + 2^2 + 2 + 1$ se divide cu 31.

28. Să se arate că pentru orice număr $n \in \mathbb{N}$ numărul $2n^3 - 3n^2 + n$ se divide cu 6.

29. Să se arate că pentru orice număr întreg n , pozitiv, numărul $2^{6n+2} + 3$ se divide cu 19.

30. Să se arate că numărul :

$$A_n = 10^{6n+2} + 10^{3n+1}, n \in \mathbb{N} \text{ este divizibil cu } 111.$$

31. Să se calculeze restul împărțirii : $(1000)^{150} : 7$.

32. Să se arate că pentru orice $n \in \mathbb{N}$, numărul $n^8 + 4n^7 + 6n^6 + 4n^4$ se divide cu 16.

33. Să se arate că numărul $(n + 1)^{3n} - n^2(n + 3)^2$ se divide cu numărul $3n + 1$.

34. Să se arate că numărul :

$$N = 1^{2n+1} + 2^{2n+1} + 3^{2n+1} + \dots + (2a)^{2n+1} \text{ se divide cu } 2a + 1, \text{ oricare ar fi numărul natural } a.$$

35. Să se arate că pentru orice număr natural n , numărul $n^{8888} - n^{7777} + 1$, se divide cu $n^2 - n + 1$.

36. Să se demonstreze că pentru orice valoare a lui $x \in \mathbb{Z}$ numărul $9x^5 - 5x^3 - 4x$ se divide cu 120.

37. Să se demonstreze că pentru orice număr natural n , numărul $9^n(9^n + 1) + 1$ se divide cu numărul $3^n(3^n + 1) + 1$.

38. Să se arate că pentru orice valoare întregă a lui n numărul $n^2 + 3n + 5$ nu se divide cu 121.

39. Să se demonstreze că dacă funcția $y = ax^2 + bx + c$ pentru toate valorile întregi ale lui x primește valori întregi atunci $2a$, $a + b$ și c sînt numere întregi.

40. Să se arate că nu există numerele întregi a, b, c, d , astfel încît expresia $ax^3 + bx^2 + cx + d$ să fie egală cu 1 pentru $x = 19$ și egală cu 2 pentru $x = 62$.

41. Să se găsească toate numerele naturale x pentru care expresia $22x + 5$ este pătratul unui număr natural.

42. Să se găsească un număr natural \overline{abcd} , scris în sistemul cu baza de numerație 10, egal cu $(5c + 1)^2$.

43. Să se arate că numărul $\frac{2n!}{n!(n+1)!}$ este un număr natural.

44. Să se demonstreze că nu există nici un număr prim de trei cifre ale cărui cifre să formeze o progresie aritmetică.

45. Să se determine valorile parametrului a pentru care ecuația $a(a + 1)x^2 + x - a(a - 1) = 0$ are rădăcini întregi.

46. Să se rezolve în numere întregi pozitive ecuația :

$$x + y = (x - y)^2.$$

47. Să se arate că ecuația $3x^2 + 8 = y^2$ nu are soluții în mulțimea numerelor întregi.

48. Să se rezolve în numere întregi pozitive ecuația :

$$(x + y)^2 - (x + y) - 2x = 150.$$

49. Să se rezolve în numere întregi ecuația :

$$2xy + 3y^2 = 24.$$

50. Să se rezolve în numere întregi pozitive ecuația :

$$2x^2 - xy - y^2 + 2x + 7y = 84.$$

51. Să se arate că ecuația $x^3 + y^3 + 1 = 3xy$ are singura soluție $x = y = 1$ în mulțimea numerelor întregi pozitive.

52. Să se găsească soluțiile întregi și numere pozitive ale ecuației :

$$2^{x^2+x-2} - 2^{x^2-4} = 992.$$

53. Să se afle soluțiile întregi, pozitive ale sistemului :

$$\begin{cases} x + y + z = 14 \\ x + yz = 19 \end{cases}$$

54. Să se rezolve în mulțimea N , ecuația :

$$(x^x + y^y) = 2x + y.$$

55. Să se rezolve ecuația :

$$(x + 1)(y + 2) = 2xy \text{ în mulțimea numerelor întregi.}$$

Numere raționale

56. Să se arate că înmulțirea \times definită în Q este distributivă față de operația $+$ definită în Q^* .

57. Să se arate că în corpul Q , ecuația $ax = b$ admite soluție unică.

58. Să se arate că submulțimea numerelor raționale de forma $(x, 1)$ înzestrată cu operația de înmulțire $\dot{\times}$, este izomorfă cu mulțimea $(Z^*, \dot{\times})$.

59. Să se arate că în mulțimea Q , orice element $(\overline{x, y})$ admite un element simetric față de operația $+$.

60. În mulțimea Q se definește operația $*$ prin :

$$x*y = \frac{x + y}{2}, \text{ numită medie aritmetică.}$$

Să se studieze structura $(Q, *)$.

61. În mulțimea Q^2 se definesc două operații notate :

$$(x, y) \top (x', y') = (x + x', y + y')$$

$$(x, y) \perp (x', y') = (xx' + yy', xy' + x'y).$$

Să se arate că structura (Q, \perp, \top) este un corp.

62. Să se arate că dacă $x + \frac{1}{x} = 1$, atunci $x^5 + \frac{1}{x^5} = 1$.

63. Să se arate că :

$$2 \left(1 + \frac{1}{3}\right) \left(1 + \frac{1}{3^2}\right) \left(1 + \frac{1}{3^4}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{3^{2^n}}\right) = 3 \left(1 - \frac{1}{3^{2^n}}\right).$$

64. Să se demonstreze că dacă $x + y = a + b$ și $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$ atunci $x^n + y^n = a^n + b^n$.

65. Să se demonstreze că dacă: $ax + by + cz = 0$, atunci expresia

$$\frac{ax^2 + by^2 + cz^2}{bc(y - z)^2 + ca(z - x)^2 + ab(x - y)^2}$$

nu depinde de x, y, z .

66. Să se demonstreze că:

$$(a^2 + b^2 + c^2)^2 = 2(a^4 + b^4 + c^4),$$

dacă $a + b + c = 0$.

Numere reale

67. Fie a, b, c, α , patru numere raționale astfel ca $\sqrt[3]{\alpha}$ să fie irațional. Să se demonstreze că dacă avem egalitatea:

$$a\sqrt[3]{\alpha^2} + b\sqrt[3]{\alpha} = c, \text{ atunci } a = b = c = 0.$$

68. Folosind rezultatele din exercițiul precedent să se arate că numărul:

$$\frac{a\sqrt[3]{\alpha^2} + b\sqrt[3]{\alpha} + c}{a'\sqrt[3]{\alpha^2} + b'\sqrt[3]{\alpha} + c'}$$

nu poate fi rațional decât dacă a, b, c sînt proporționale cu a', b', c' .

69. Să se stabilească condițiile în care numărul $\frac{ax + b}{a'x + b'}$ este număr rațional, a, b, a', b' , fiind numere raționale iar x număr irațional.

70. Să se demonstreze că numerele:

$\cos 15^\circ$ și $\sin 15^\circ$ sînt două numere iraționale.

71. Să se arate că numărul:

$$x = \sqrt[3]{3 + \sqrt{\frac{371}{27}}} + \sqrt[3]{-3 + \sqrt{\frac{371}{26}}} \text{ este rațional.}$$

72. Să se arate că numărul :

$$x = \sqrt[3]{3} - \sqrt{2} \text{ este irațional.}$$

Numere complexe

73. Să se demonstreze următoarele proprietăți referitoare la modulele numerelor complexe :

$$\left| \frac{Z_1}{Z_2} \right| = \frac{|Z_1|}{|Z_2|} ; |Z^n| = |Z|^n$$

$$|Z_1 + Z_2| \leq |Z_1| + |Z_2| ; |Z_1 - Z_2| \leq |Z_1| - |Z_2| ; |\bar{Z}| = |Z|$$

74. Să se scrie sub formă trigonometrică numărul complex :

$$Z = \left(\frac{1 + \sqrt{3}i}{1 - \sqrt{3}i} \right)^2$$

75. Să se găsească numărul complex z al cărui pătrat să fie egal cu i .

76. Să se calculeze $Z = \frac{a + bi}{c + di}$.

77. Să se determine valoarea lui α pentru care expresia :

$$\left[\frac{1 + i \operatorname{tg} \alpha}{1 - i \operatorname{tg} \alpha} \right]^n \text{ este reală.}$$

78. Să se arate că : $\left(\frac{1 + i \operatorname{ctg} \alpha}{1 - i \operatorname{ctg} \alpha} \right)^2 = \cos 4\alpha - i \sin 4\alpha$.

79. Să se determine valoarea α pentru care expresia $(1 + i \operatorname{ctg} \alpha)(\sin \alpha + i \cos \alpha)$ este un număr real.

80. Să se aducă la forma trigonometrică expresiile :

$$Z_1 = 1 + \cos \alpha + i \sin \alpha$$

$$Z_2 = -\cos \alpha + i \sin \alpha$$

$$Z_3 = \frac{\sin 2\alpha - i \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha + i \cos 2\alpha}$$

$$Z_4 = \operatorname{tg} \alpha - i$$

81. Să se calculeze $\cos 5\theta$ în funcție de $\cos \theta$.

82. Să se rezolve ecuația :

$$Z^5 - 1 = 0$$

83. Să se rezolve ecuațiile :

$$x^2 - 2x\cos\alpha + 1 = 0$$

$$(1 + Z)^4 = (Z - 1)^4$$

84. Să se calculeze sumele :

$$S_n = \cos x + \cos 2x + \dots + \cos nx,$$

$$T_n = \sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx.$$

85. Să se aducă la forma cea mai simplă

$$F = \frac{\cos 2x + \cos 4x + i(\sin 4x + \sin 2x)}{\cos 2x + \cos 4x - i(\sin 4x - \sin 2x)}$$

86. Să se calculeze : $E = Z^{142} + \frac{1}{Z^{142}}$

unde Z este soluția ecuației $Z + \frac{1}{Z} = 1$.

87. Să se rezolve ecuația :

$$\frac{(1+x)^3}{(1-x)^3} = \frac{\cos\alpha + i\sin\alpha}{\cos\alpha - i\sin\alpha}$$

88. Să se rezolve ecuația : $|Z| - Z = 1 + 2i$.

89. Să se calculeze sumele :

$$S_1 = \cos x + \cos(x+r) + \dots + \cos(x+kr),$$

$$S_2 = \sin x + \sin(x+r) + \dots + \sin(x+kr).$$

90. Se dă expresia

$$Z = \frac{\alpha^2 - \beta^2 + 2\alpha\beta i}{\alpha\beta\sqrt{2} + i\sqrt{\alpha^4 + \beta^4}}, \alpha, \beta \in R.$$

Să se calculeze $|Z|$.

91. Să se construiască afixul numărului Z care verifică relația :

$$\frac{Z - a}{Z - b} = \alpha$$

a, b, α fiind constante complexe.

92. Să se arate că dacă $ZZ' = \alpha^2$ atunci avem relația :

$$|Z| + |Z'| = \left| \frac{Z + Z'}{2} - \alpha \right| + \left| \frac{Z + Z'}{2} + \alpha \right|$$

93. Să se calculeze :

$$S_n = 1 + C_n^2 + C_n^4 + \dots + C_n^{2p},$$

$$T_n = C_n^1 + C_n^3 + \dots + C_n^{2p+1}.$$

94. Să se afle locul geometric al afixelor M a numerelor complexe Z care satisfac relația :

$$|Z - Zi| = |Z + 1|.$$

95. Să se pună sub formă trigonometrică numărul complex :

$$Z^2 - Z.$$

96. Să se rezolve ecuația :

$$Z = Z^{k-1}.$$

$$k = 0, 1, 2, \dots, n - 1.$$

97. Se dă polinomul : $f(Z) = Z^2 - (3 + 4i)Z - 1 + 5i$.

a) Să se calculeze valoarea acestui polinom pentru $Z_1 = 2 + 3i$.

b) Să se arate că : $\overline{f(Z_1)} \neq f(\bar{Z}_1)$.

98. Să se arate că orice număr complex de modul 1 se poate pune sub forma :

$$\frac{1 + xi}{1 - xi}, \quad x \in R.$$

99. Să se arate că, dacă $|Z_1| = |Z_2| = 1$, numărul :

$$Z = \frac{Z_1 + Z_2}{1 + Z_1 Z_2} \text{ este număr real.}$$

100. Să se arate că :

$$(1 - ai)(1 - bi) = (a + i)(b - i).$$

101. Să se determine modulul și argumentul lui $Z = \frac{1 + i}{1 - i}$.

Să se calculeze : $u = Z^{32}$.

102. Să se calculeze :

$$\frac{(1 + i)^{2n+1}}{(1 - i)^{2n-1}}$$

103. Să se arate că :

$$\left(\sqrt[2]{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}} + i \sqrt[2]{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}} \right)^{24} + 2^{24} = 0$$

104. Se dă numărul $z = (1 + axi)^5$.

Să se determine x , astfel încât să z fie real.

105. Se consideră mulțimea numerelor complexe C .

Să se demonstreze că $f(Z) = \bar{Z}$ ($Z \in C$) este bijectivă.

106. Să se determine modulul și argumentul numărului complex.

$$\frac{(1 + i)^4}{1 - 2i}; \frac{(1 - i)^4}{1 + i}$$

107. Să se calculeze : $a^{14} + \frac{1}{a^{14}}; a^{17} + \frac{1}{a^{17}}$, dacă
 $a^2 + a + 1 = 0$.

108. Să se arate că numărul : $\frac{Z}{|Z|} + \frac{|Z|}{Z}$ este real.

Să se arate că $Z = 1 + 2i$ este o rădăcină a ecuației :

$$Z^3 = -11 - 2i.$$

109. Se dă $Z = \frac{a + i}{a - i}$, $a \in \mathbb{R}$

Să se determine $|Z|$ și să se arate că imaginea lui Z descrie un cerc când a variază.

110. Se consideră polinomul :

$$P(Z) = Z^4 - 2ai\sqrt{3}Z^3 - 8a^2Z^2 + (8a^3i + \sqrt{3})Z + 16a^4.$$

Se cere :

a) Să se calculeze $P(-2a)$; $P\left[2a\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)\right]$.

b) Să se rezolve ecuația $P(Z) = 0$.

c) Să se determine punctele corespunzătoare rădăcinilor ecuației $P(Z) = 0$.

111. Să se rezolve ecuația :

$$(\sqrt{3} - i)Z^4 - (\sqrt{3} + i) = 0.$$

Capitolul 19

MATRICI. DETERMINANȚI

19.1. GENERALITĂȚI. DEFINIȚII

În teoria sistemelor de ecuații liniare se întâlnesc adesea diferite tablouri de numere, ca de exemplu tabloul coeficienților necunoscutelor unui sistem cu m ecuații și n necunoscute. Se folosește denumirea de matrice pentru a indica un tablou dreptunghiular cu elemente avînd m linii și n coloane.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Elementele a_{ij} ($i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$) pot aparține unei mulțimi numerice oarecare. În loc de paranteze pentru a nota o matrice se folosesc adesea bare verticale duble. În scrierea matricei, a_{ij} este elementul din linia i și coloana j . Dacă m (numărul liniilor) este egal cu n (numărul coloanelor) matricea se numește matrice pătrată de ordinul n . În particular, matricea compusă dintr-o singură linie sau matricea compusă dintr-o singură coloană se numește *vector linie*, respectiv *vector coloană*. Într-o matrice pătratică de ordinul n elementele $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots, a_{nn}$ formează diagonala principală a matricei, iar elementele $a_{1n}, a_{2n-1}, \dots, a_{n1}$ formează diagonala a doua. O matrice pătrată în care numai elementele de pe diagonala principală sînt diferite de zero se numește matrice diagonală. Matricea pătratică se numește triunghiulară, dacă toate elementele ei sînt nule pentru $i > j$ (sau $i < j$).

De exemplu matricea :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

este o matrice triunghiulară deoarece elementele a_{21}, a_{31}, a_{32} , adică elementele pentru care $i > j$ sînt egale cu zero.

Prin definiție, două matrice sînt egale atunci cînd au aceeași dimensiune și elementele corespunzătoare egale.

Așa de exemplu dacă: $A = (a_{ij})$ și $B = (b_{ij})$, $i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$, matricile sînt egale și scriem $A = B$ dacă $a_{ij} = b_{ij}$, pentru oricare $i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$. Transpusa unei matrice A este matricea A' care are drept linii coloanele matricei A . Transpusa matricei A este deci matricea care se obține înlocuind liniile prin coloane. Matricea A se numește simetrică dacă pentru orice i și j avem: $a_{ij} = a_{ji}$.

Matricea nulă este matricea ale cărei elemente sînt toate egale cu zero. O vom nota prin 0.

Exemplul 1

Matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ este simetrică. Transpusa matricii A este matricea: $A' = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, egală cu matricea A .

Exemplul 2

Se dă matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix}$. Transpusa matricii A este matricea $A' = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$.

Se numește matrice unitate de ordinul n matricea pătratică de ordinul n ale cărei elemente sînt egale cu zero, cu excepția celor situate pe diagonala principală, care sînt egale cu 1. Aceste matrice se notează de obicei cu E .

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

19.2. OPERAȚII CU MATRICE

19.2.1. ADUNAREA MATRICELOR

Suma a două matrici cu aceeași dimensiune este matricea de același ordin ce are elementele egale cu suma elementelor corespunzătoare din cele două matrice.

Dacă notăm matricea A prin $A = [a_{ij}]$ și matricea $B = [b_{ij}]$, vom avea $A + B = [a_{ij} + b_{ij}]$.

Exemplu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 3 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 6 \\ 7 & 6 & 6 \end{pmatrix}$$

19.2.2. ÎNMULȚIREA MATRICELOR CU UN SCALAR

Să considerăm un număr oarecare α , real sau complex, și o matrice A . Să formăm matricea αA ale cărei elemente se deduc din elementele matricei A înmulțindu-le cu numărul α (și lăsând neschimbate linia și coloana în care se găsesc). Matricea αA se numește produsul dintre numărul α și matricea A .

Exemplu :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}, \alpha = 3$$

$$\alpha A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 12 \\ -3 & 9 & 15 \end{pmatrix}.$$

Operația de adunare a matricelor are următoarele proprietăți :

1) Comutativitatea : $A + B = B + A$

$$[a_{ij}] + [b_{ij}] = [a_{ij} + b_{ij}] = [b_{ij} + a_{ij}] = [b_{ij}] + [a_{ij}].$$

2) Asociativitatea

$$(A + B) + C = A + (B + C).$$

$$\begin{aligned} [a_{ij} + b_{ij}] + [c_{ij}] &= [(a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij}] = [a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij})] = \\ &= [a_{ij}] + [b_{ij} + c_{ij}]. \end{aligned}$$

3) Matricea nulă $[0]$ este matricea cu toate elementele zero :
 $V + 0 = A$

$$[a_{ij}] + [0] = [a_{ij} + 0] = [a_{ij}].$$

4) Matricea opusă matricei $A = [a_{ij}]$ este matricea $-A = [-a_{ij}]$ deoarece elementele sînt opusele elementelor lui A ,
 $A + (-A) = 0$.

Înmulțirea matricelor cu un scalar are următoarele proprietăți

1) este distributivă față de adunarea scalarilor :

$$(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A.$$

$$\begin{aligned} (\alpha + \beta)[a_{ij}] &= [(\alpha + \beta)a_{ij}] = [\alpha a_{ij} + \beta a_{ij}] = \\ &= [\alpha a_{ij}] + [\beta a_{ij}] = \alpha[a_{ij}] + \beta[a_{ij}]. \end{aligned}$$

2) este distributivă față de suma matricelor :

$$\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B.$$

$$\begin{aligned} \alpha[a_{ij} + b_{ij}] &= [\alpha(a_{ij} + b_{ij})] = [\alpha a_{ij} + \alpha b_{ij}] = \\ &= [\alpha a_{ij}] + [\alpha b_{ij}] = \alpha[a_{ij}] + \alpha[b_{ij}]. \end{aligned}$$

3) $1 \cdot A = A$. $1[a_{ij}] = [1 \cdot a_{ij}] = [a_{ij}]$.

4) $0 \cdot A = A$ (unde prin 0 am însemnat scalarul nul).

19.2.3. PRODUSUL MATRICELOR

Produsul matricelor A și B , luate în această ordine, are sens dacă numărul coloanelor matricei A este egal cu numărul liniilor matricei B .

Să considerăm matricele :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2p} \\ \dots & & & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{np} \end{pmatrix}$$

Vom însemna prescurtat $A(m \times n)$ și $B(n \times p)$, înțelegînd prin această notație că matricea A are dimensiunea $m \times n$ (m linii și n coloane), iar matricea B are dimensiunea $n \times p$ (n linii și p coloane). Produsul se definește în felul următor : elementul c_{ij} din matricea produs se obține făcînd suma produselor dintre elementele liniei i din matricea A și elementele corespunzătoare din coloana j

a matricei B . Deoarece elementele liniei i din matricea A sînt $a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{ij}, \dots, a_{in}$ iar ale coloanei j din B sînt $b_{1j}, b_{2j}, \dots, b_{ij}, \dots, b_{nj}$, conform definiției produsului matricilor, elementul c_{ij} , din matricea produs $C = A \cdot B$ va fi :

$$c_{ij} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \dots + a_{in} b_{nj}$$

sau :

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}.$$

Deoarece i ia valori de la 1 la m iar j ia valori de la 1 la p , matricea produs va avea dimensiunea $m \times p$ adică m linii și p coloane.

Exemplu :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 2 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Matricea A este de dimensiunea 2×3 (are două linii și trei coloane). Matricea B are dimensiunea 3×2 (trei linii și două coloane). Numărul de coloane al matricei A este egal cu numărul de linii al matricei B . Conform regulii de înmulțire vom avea :

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 2 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Pentru a afla elementul din linia 1 și coloana 1 a matricei produs se înmulțesc elementele liniei I din matricea A cu elementele coloanei I din matricea B și se face suma produselor astfel obținute :

$$1 \cdot (-1) + 4(+3) + (-1) \cdot (+4) = -1 + 12 - 4 = +7$$

Procedînd în mod analog se obțin celelalte elemente ale matricei $C = A \cdot B$.

$$C = A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 \cdot (-1) + 4(+3) + (-1)(+4) & 1 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + (-1)(+6) \\ 3(-1) + 2(+3) + (+1)(+4) & 3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 6 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 7 & 13 \end{pmatrix}.$$

Dacă A este o matrice pătratică de ordinul n iar E este matricea unitate avem relația :

$$A \cdot E = E \cdot A = A.$$

Exemplu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$A \cdot E =$

$$\begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 & 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 0 & 1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 1 \\ 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 + 1 \cdot 0 & 1 \cdot 0 + (-1) \cdot 1 + 1 \cdot 0 & 1 \cdot 0 + (-1) \cdot 0 + 1 \cdot 1 \\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 & 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 & 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Produsul matricelor nu este comutativ

Fie A o matrice de dimensiunea $m \times n$ și B o matrice de dimensiunea $n \times p$. Se poate prin urmare efectua produsul $A \cdot B$. Pentru ca să existe și produsul $B \cdot A$ este necesar ca $p = m$. În acest caz produsul $B \cdot A$ este o matrice pătratică de ordinul n . Se poate întâmpla ca să existe $A \cdot B$ și $B \cdot A$ dar $A \cdot B \neq B \cdot A$.

Produsul matricelor are următoarele proprietăți

- 1) $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$ (produsul matricilor este asociativ);
- 2) $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$ (produsul matricilor este distributiv față de adunare);
- 3) $k(A \cdot B) = (kA) \cdot B = A \cdot (kB)$, $k \in R$.

Folosind noțiunea de produs a două matrice se deduce imediat ce înseamnă puterea A^k a matricii A .

Se demonstrează următoarea proprietate: transpusa unui produs de matrice este egală cu produsul matricelor transpuse luate în ordine inversă:

$$(A \cdot B)' = B' \cdot A'$$

19.3. DETERMINANȚI

Să considerăm că se dau mai multe numere $0, 1, 2, \dots, n$. Dacă așezăm aceste numere într-o anumită ordine, spunem că avem o permutare.

Dacă într-o permutare schimbăm un număr mai mic la dreapta unui număr mai mare spunem că în permutare am efectuat o inversiune. O permutare care are un număr par de inversiuni se numește permutare *pară*, iar dacă permutarea are un număr impar de inversiuni se numește permutare *impară*.

Un determinant de ordinul n este un tablou pătratic cu n elemente de forma :

$$D = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & & & \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{vmatrix}$$

a cărui valoare este egală cu

$$\sum (-1)^I a_{1i_1} a_{2i_2} \dots a_{ni_n}$$

suma fiind extinsă la toate permutările (i_1, \dots, i_n) , unde i_1, \dots, i_n sînt numerele $1, \dots, n$, iar I reprezintă numărul de inversiuni ale permutării i_1, \dots, i_n .

19.3.1. DETERMINANT ASOCIAT UNEI MATRICE PĂTRATE

Fiecărei matrici pătrate de ordinul n :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

i se asociază determinantul său :

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Dacă în acest determinant suprimăm linia și coloana care trec prin elementul a_{ij} obținem un determinant de ordinul $(n - 1)$ numit minorul elementului a_{ij} , pe care-l vom nota D_{ij} .

Numărul $A_{ij} = (-1)^{i+j} D_{ij}$ se numește complementul algebric al elementului a_{ij} .

Dacă facem suma algebrică a produselor dintre elementele unei linii oarecare sau ale unei coloane oarecare a determinantului și complementele algebrice respective, se obține același număr, valoarea determinantului $|A|$.

$$|A| = a_{i1} A_{i1} + a_{i2} A_{i2} + \dots + a_{in} A_{in}, \text{ pentru orice } i = 1, 2, \dots, n.$$

În mod analog se poate dezvolta determinantul după elementele coloanei j și obținem :

$$|A| = a_{1j} A_{1j} + a_{2j} A_{2j} + \dots + a_{nj} A_{nj}, \text{ pentru orice } j = 1, 2, \dots, n.$$

19.3.2. REGULA LUI SARRUS

Pentru calcularea valorii unui determinant de ordinul al treilea există o regulă de calcul, numită regula lui Sarrus. Să considerăm determinantul :

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Dacă dezvoltăm acest determinant după elementele primei linii, obținem dezvoltarea :

$$D = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

Se poate ușor verifica faptul că se poate ajunge la acest rezultat, adăugând primele două linii și efectuând produsele indicate de săgeți în schema pe care o redăm mai jos :

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

(Diagram showing the Sarrus rule with arrows indicating the products to be added and subtracted. The first three products are added, and the last three are subtracted.)

Exemplu

Să se calculeze valoarea determinantului :

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

Folosind procedeul stabilit anterior, vom adăuga primele două linii și vom obține :

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 \times 2 & 3 \times 2 & 4 \times 2 \\ 1 \times 3 & -1 \times 3 & 2 \times 3 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -3 + 16 + 6 + 4 - 4 - 18 = 1.$$

Dacă calculăm valoarea acestui determinant după elementele primei linii vom avea :

$$D = 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$D = (-3 - 4) - 3(6 - 2) + 4(4 + 1) = -7 - 12 + 20 = 1$$

19.3.3. PROPRIETĂȚILE DETERMINANȚILOR

Deoarece pentru determinantii de ordin mai mare ca 3 nu există o regulă mecanică pentru calcularea valorii determinantului, se folosesc unele proprietăți pe care le vom enunța fără demonstrație.

Proprietatea I

Dacă într-un determinant schimbăm liniile cu coloanele, obținem un determinant transpus. Prin transpunere, determinantul nu-și schimbă valoarea.

Exemplu

Fie determinantul

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Transpusul acestui determinant este :

$$D' = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

Se observă că dezvoltând primul determinant după elementele liniei 1 se obține valoarea celui de al doilea determinant după elementele primei coloane :

$$D = 1 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$D' = 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Rezultă că $D = D'$.

Proprietatea II

Dacă elementele unei linii sau ale unei coloane a determinantului se înmulțesc cu un scalar k atunci determinantul se înmulțește cu același scalar.

Vom exemplifica această proprietate pe cazul unui determinant de ordinul al treilea.

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Să înmulțim elementele primei linii cu k și să dezvoltăm determinantul după elementele primei linii :

$$D' = \begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = ka_{11}A_{11} + ka_{12}A_{12} + ka_{13}A_{13} =$$

$$= k(a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}) = k \cdot D.$$

Proprietatea III

Schimbând două linii sau două coloane între ele, determinantul își schimbă semnul.

Proprietatea IV

Dacă elementele unei linii sau ale unei coloane sînt sume de p termeni, atunci determinantul se descompune într-o sumă de p determinanți.

De exemplu, dacă avem determinantul :

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} + \alpha_1 a_{22} + \alpha_2 \end{vmatrix}$$

în care elementele liniei a doua sînt sume de cîte doi termeni putem scrie :

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ \alpha_1 & \alpha_2 \end{vmatrix}$$

Proprietatea V

Dacă elementele unei linii (sau unei coloane) sînt combinații liniare ale elementelor celorlalte linii (sau coloane) valoarea determinantului este egală cu zero. Pentru demonstrarea acestei proprietăți se aplică proprietatea IV.

Proprietatea VI

Suma produselor dintre elementele unei linii sau coloane și complementele algebrice respective ale altei linii sau coloane este egală cu zero.

Prin definiție o matrice pătrată este nedegenerată dacă determinantul său $|A|$ este diferit de zero.

19.4. MATRICEA INVERSĂ

Să considerăm o matrice pătratică

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Matricea asociată lui A este matricea :

$$A_1 = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

unde A_{ij} este complementul algebric al elementului a_{ij} .

Matricea inversă a matricei pătratică A , de ordinul n , este o nouă matrice, pe care o notăm prin A^{-1} și care satisface relațiile :

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E,$$

unde E este matricea unitate de ordinul n .

Deoarece determinantul produsului a două matrice pătratice este egal cu produsul determinantilor celor două matrice vom avea :

$$|AA^{-1}| = |A| \cdot |A^{-1}| = |E| = 1$$

Dacă $|A| = 0$, adică matricea A este degenerată, atunci ea nu admite o inversă.

Pentru calculul matricei inverse procedăm astfel.

1) Calculăm transpusa A' a matricei A

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

2) Calculăm asociata transpusei A' , adică matricea formată din complementele algebrice ale matricei A' .

$$\bar{A}' = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

3) Pentru a obține matricea inversă se împart elementele lui \bar{A}' cu valoarea determinantului A .

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{|A|} & \frac{A_{21}}{|A|} & \dots & \frac{A_{n1}}{|A|} \\ \frac{A_{12}}{|A|} & \frac{A_{22}}{|A|} & \dots & \frac{A_{n2}}{|A|} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{A_{1n}}{|A|} & \frac{A_{2n}}{|A|} & \dots & \frac{A_{nn}}{|A|} \end{pmatrix}$$

19.5. RANGUL UNEI MATRICE

Prin definiție numărul maxim de vectori coloană, liniar independenți, se numește rangul matricei A și se notează prin $\text{rang } A$.

Într-o matrice de dimensiune $(m \times n)$ cu $m < n$ putem suprima anumite linii sau coloane formînd mai mulți determinanți. Determinanții care se pot forma într-o matrice de dimensiunea $(m \times n)$, cu $m < n$, se numesc minori. Ordinul maxim al minorilor diferiți de zero ai matricei A este egal cu rangul matricei.

19.6. EXERCIIII REZOLVATE

1. Să considerăm mulțimea S a matricelor de forma $E = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, unde $a, b \in \mathbb{R}$.

Să se arate că această mulțime formează un spațiu vectorial izomorf cu \mathbb{C} (spațiul vectorial al numerelor complexe)

Soluție

Dacă $E_1 = \begin{pmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} a_2 & -b_2 \\ b_2 & a_2 \end{pmatrix}$ sînt două matrici ce aparțin lui S , atunci:

$$E_1 + E_2 = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & -(b_1 + b_2) \\ b_1 + b_2 & a_1 + a_2 \end{pmatrix}$$

$$\lambda E_1 = \begin{pmatrix} \lambda a_1 & -\lambda b_1 \\ \lambda b_1 & \lambda a_1 \end{pmatrix}$$

sînt de asemenea matrici ce aparțin lui S deoarece sînt de forma

$$E = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

Se mai constată că matricea nulă și matricea opusă sînt de aceeași formă și prin urmare ele aparțin mulțimii S . Prin urmare $(S, +)$ formează un grup și înmulțirea cu scalari se bucură de următoarele proprietăți:

$$\lambda(\beta E) = (\lambda\beta)E,$$

$$(\lambda + \beta)E = \lambda E + \beta E,$$

$$1. E = E$$

Mulțimea S a matricilor de forma $E = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ formează un spațiu vectorial.

19.7. IZOMORFISMUL SPAȚIULUI VECTORIAL S CU SPAȚIUL VECTORIAL AL NUMERELOR COMPLEXE DE FORMA $a + bi$

Să definim o funcție $f: C \rightarrow S$ prin :

$$f(a + bi) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

Avem :

$$\lambda(a + bi) = \lambda a + \lambda bi \Rightarrow \lambda \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a & -\lambda b \\ \lambda b & \lambda a \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} (a + bi) + (c + di) &= (a + c) + (b + d)i \Rightarrow \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} a + c & -b - d \\ b + d & a + c \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Prin urmare :

$$f[\lambda(a + bi)] = \lambda f(a + bi),$$

$$f[(a + bi) + (c + di)] = f(a + bi) + f(c + di).$$

Observație 1

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = ae_1 + be_2$$

unde : $e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $e_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ sînt vectori liniari independenți în spațiul E . S este prin urmare un spațiu vectorial care are baza 2, deoarece orice matrice E se poate exprima ca o combinație liniară a două elemente liniar independente ale spațiului S .

$$E = ae_1 + be_2.$$

Observăm că $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ este un element neutru și avem :

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

Matricea $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ corespunde numărului complex : $1 + 0 \cdot i = 1$,

iar $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ corespunde numărului complex $0 + i = i$.

Se știe că $i^2 = -1$ și prin urmare constatăm din relația (1) că înmulțirea matricilor verifică aceeași tablă de înmulțire ca cea a numerelor complexe.

Mulțimea E este un corp izomorf cu mulțimea numerelor complexe.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow 1, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow i, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 = - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow i^2 = -1.$$

19.8. TRANSFORMĂRI LINIARE

În spațiul R^2 se consideră vectorul $\vec{v} = (x_1, x_2)$ și o transformare liniară. Să notăm cu $\vec{v}_1 = (x'_1, x'_2)$ vectorul obținut prin această transformare.

$$\text{Avem :} \quad \begin{cases} x'_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ x'_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{cases} \quad (1)$$

Ecuatiile transformării pot fi scrise sub formă matricială astfel :

$$\vec{v}_1 = A \vec{v} \quad (2),$$

$$\text{unde } x' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}; \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Transformarea dată prin ecuațiile (1) este liniară.
Matricea A se numește matricea transformării :

$$1) \quad A(\lambda x) = \lambda A(x). \quad (1)$$

Să notăm prin $\vec{V}'' = (x''_1, x''_2)$ vectorul obținut prin transformarea de matrice A a vectorului $\lambda x = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \end{pmatrix}$.

$$x''_1 = a_{11}(\lambda x_1) + a_{12}(\lambda x_2) = \lambda a_{11}x_1 + \lambda a_{12}x_2. \quad (2)$$

$$x''_2 = a_{21}(\lambda x_1) + a_{22}(\lambda x_2) = \lambda a_{21}x_1 + \lambda a_{22}x_2,$$

$$\begin{aligned} \text{sau : } x_1'' &= \lambda(a_{11}x_1 + a_{12}x_2) = \lambda x_1' \\ x_2'' &= \lambda(a_{21}x_1 + a_{22}x_2) = \lambda x_2'. \end{aligned} \quad (3)$$

Relațiile (2), (3) pot fi scrise sub formă matricială :

$$\vec{v}'' = A(\lambda \vec{x}) = \lambda A \vec{x}.$$

$$2) \quad A(\vec{x} + \vec{y}) = A\vec{x} + A\vec{y}.$$

$$\text{Să notăm : } \vec{x}_1 = A\vec{x}, \vec{y}_1 = A\vec{y},$$

$$\begin{aligned} \text{și avem : } A(\vec{x} + \vec{y}) &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} a_{11}(x_1 + y_1) + a_{12}(x_2 + y_2) \\ a_{21}(x_1 + y_1) + a_{22}(x_2 + y_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{pmatrix} + \\ &+ \begin{pmatrix} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 \end{pmatrix} = A\vec{x} + A\vec{y}. \end{aligned} \quad (4)$$

Prin urmare transformarea dată de ecuațiile (1) este lineară. Vom folosi proprietățile (1) și (2) pentru a găsi o relație între două baze ale spațiului vectorial R^2 .

19.9. TRANSFORMAREA BAZELOR

Să considerăm în spațiul R^2 o bază (\vec{e}_1, \vec{e}_2) .

$$\text{Avem : } \vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2, \vec{y} = y_1\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2.$$

Ținând seama de proprietățile (1) și (2) avem :

$$\begin{aligned} \vec{x}' &= A\vec{x} = A(x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2) = A(x_1\vec{e}_1) + A(x_2\vec{e}_2) = \\ &= x_1(A\vec{e}_1) + x_2(A\vec{e}_2) = x_1\vec{e}'_1 + x_2\vec{e}'_2. \end{aligned}$$

Să notăm cu x'_1 și x'_2 coordonatele vectorului \vec{x}' în baza (\vec{e}'_1, \vec{e}'_2) .

Avem :

$$\vec{x}' = x'_1 \vec{e}_1 + x'_2 \vec{e}_2 = x_1 \vec{e}'_1 + x_2 \vec{e}'_2. \quad (5)$$

Prin urmare fiind dată o transformare lineară :

$\vec{x}' = A\vec{x}$ și o bază (\vec{e}_1, \vec{e}_2) , transformarea definită prin formulele (4), matricea A a transformării lineare (4) și matricea A^* formată cu ajutorul componentelor vectorilor $A\vec{e}_1$ și $A\vec{e}_2$ în raport cu baza \vec{e}_1, \vec{e}_2 se deduc una din alta printr-o transpoziție.

$$\vec{x}' = A\vec{x}, \vec{e}'_1 = A^*\vec{e}_1, \vec{e}'_2 = A^*\vec{e}_2.$$

$$A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Exemplu

Să considerăm vectorul $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ și baza formată din vectori

$\vec{i}(1, 0), \vec{j}(0, 1)$. Să considerăm o transformare lineară dată prin matricea $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Să se afle transformatul vectorului \vec{x} și transformatele vectorilor de bază $\vec{i}(1, 0), \vec{j}(0, 1)$.

Soluție : $\vec{x}' = A\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$, sau : $x'_1 = 5, x'_2 = 5$.

$$\vec{i}' = A \cdot \vec{i} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{j}' = A \cdot \vec{j} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

19.10. PRODUSUL A DOUĂ TRANSFORMĂRI LINIARE

Fie două matrici :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

Să considerăm o bază arbitrară (\vec{e}_1, \vec{e}_2) . Cu ajutorul transformărilor lineare definite de matricile A și B vom defini o nouă transformare lineară.

Să notăm $\vec{y} = B\vec{x} = (y_1, y_2)$. Transformarea A va schimba vectorul obținut în vectorul $\vec{x}' = A\vec{y} = (x'_1, x'_2)$. Prin urmare se stabilește o legătură între coordonatele vectorului \vec{x} și vectorului \vec{x}' prin relația $\vec{x}' = A(B\vec{x})$.

Deci $\vec{y} = B\vec{x}$,

$$\begin{cases} y_1 = b_{11}x_1 + b_{12}x_2 \\ y_2 = b_{21}x_1 + b_{22}x_2 \end{cases} \quad (1)$$

Cum însă $\vec{x}' = A\vec{y}$, avem :

$$\begin{cases} x'_1 = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 \\ x'_2 = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 \end{cases} \quad (2)$$

Substituind valorile lui y_1 și y_2 din (1) în (2), obținem :

$$x'_1 = (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21})x_1 + (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22})x_2$$

$$x'_2 = (a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21})x_1 + (a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22})x_2.$$

Aceste formule definesc o nouă transformare : $\vec{x}' = (AB) \vec{x}$.

Exemplu

Să considerăm transformarea dată de relația :

$$\begin{cases} y_1 = x_1 \cos \alpha - x_2 \sin \alpha \\ y_2 = x_1 \sin \alpha + x_2 \cos \alpha \end{cases} \quad (1)$$

Matricea acestei transformări este :

$$A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

Fie acum transformarea :

$$\begin{cases} x'_1 = y_1 \cos \beta - y_2 \sin \beta \\ x'_2 = y_1 \sin \beta + y_2 \cos \beta \end{cases} \quad (2)$$

Matricea acestei transformări este :

$$B = \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}$$

Avem : $\vec{x}' = (AB)\vec{x}$.

Aplicând regulile de înmulțire a matricilor obținem :

$$AB = \begin{pmatrix} \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta & -\cos\alpha \sin\beta - \sin\alpha \cos\beta \\ \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta & -\sin\alpha \sin\beta + \cos\alpha \cos\beta \end{pmatrix},$$

de unde rezultă :

$$AB = \begin{pmatrix} \cos(\alpha + \beta) & -\sin(\alpha + \beta) \\ \sin(\alpha + \beta) & \cos(\alpha + \beta) \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x'_1 = x_1 \cos(\alpha + \beta) - x_2 \sin(\alpha + \beta) \\ x'_2 = x_2 \sin(\alpha + \beta) + x_1 \cos(\alpha + \beta) \end{cases} \quad (3)$$

Transformările (1), (2) și (3) sînt rotații de unghiuri α , β și $(\alpha + \beta)$.
Produsul a două rotații este o rotație.

19.11. EXERCITII

Matrici

1. Să se rezolve ecuațiile matriciale :

$$a) \begin{pmatrix} x+3 \\ 4+y \\ z+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$b) \begin{pmatrix} x-2y \\ x+y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$c) \begin{pmatrix} x^2 & y \\ x & y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Se dau matricile :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 0 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Să se calculeze matricile :

$$A + B, A - B, (A + B) + C, A + (B + C), (A - B) + C.$$

3. Să se determine matricile X din egalitățile :

$$a) X + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$b) X + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

4. Să se rezolve ecuațiile matriciale următoare :

$$\frac{1}{2} (X + A) = 3 (X + (2X + B)) + C$$

$$2 (X + B) = 3 (X + \frac{1}{2} (X + A)) + C$$

$$5. \text{ Se dau matricile : } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Să se calculeze : $A \cdot B, A \cdot (A + B), B \cdot A, (B \cdot A) \cdot B.$

$$6. \text{ Se dau matricile : } A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Să se arate că : $(A + B)(A + B) \neq A^2 + 2AB + B^2$

$$(A + B)(A - B) \neq A^2 - B^2.$$

7. Se dă matricea :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \text{ Să se arate că } A^3 = E.$$

8. Să se arate că matricea :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ este soluția ecuației : } A^2 - 5A + 7E = 0.$$

9. Să se arate că dacă $a^2 + bc = 0$, atunci:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} = 0$$

10. Se dă matricea:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Să se verifice egalitatea: $A^2 - 2A + I = 0$.

11. Se dă matricea:

$$B = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Să se calculeze B^2 și B^3 , dacă $\theta = 120^\circ$.

12. Să se arate că matricea:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

verifică relația $A^2 - (a + d)A + ad - bc = 0$.

13. Să se calculeze produsul matricilor:

$$a) \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}; \quad b) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}; \quad c) \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & -6 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$$

14. Să se calculeze expresiile:

$$a) \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}^3; \quad b) \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}^5; \quad c) \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}^n;$$

$$d) \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}^n.$$

15. Să se rezolve ecuațiile matriciale:

$$a) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} : X = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}; \quad b) X \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{pmatrix};$$

$$c) \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & 7 & 8 \end{pmatrix}; \quad d) \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

16. Să se arate că transpusele matricilor A și B , notate A' și B' , satisfac următoarele proprietăți :

$$(A + B)' = B' + A'$$

$$(A B)' = B' A'$$

$$(A^{-1})' = (A')^{-1}$$

17. Să se găsească matricea inversă a matricilor :

$$a) \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \quad b) \begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$c) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad d) \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 & \dots & a^n \\ 0 & 1 & a & a^2 & \dots & a^{n-1} \\ 0 & 0 & 1 & a & \dots & a^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

18. Să se demonstreze că dacă $AB = BA$, atunci :

$$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2,$$

$$(A^2 - B^2) = (A + B)(A - B)$$

$$(A + B)^n = A^n + \frac{n}{1} A^{n-1} B + \dots + B^n.$$

19. Să se calculeze $AB - BA$, dacă :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

20. Să se calculeze $f(A)$:

$$a) f(A) = A^2 - A - 1, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$b) f(A) = A^2 - 5A + 3, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

21. Să se demonstreze că dacă : $AB = BA$, atunci $A^{-1}B = BA^{-1}$.

22. Să se afle rangul matricilor :

$$a) \begin{pmatrix} 0 & 4 & 10 & 1 \\ 4 & 8 & 18 & 7 \\ 10 & 18 & 40 & 17 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \end{pmatrix} \quad b) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 14 & 32 \\ 4 & 5 & 6 & 32 & 77 \end{pmatrix}$$

$$c) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad d) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Determinanți

23. Să se afle valoarea determinanților :

$$a) \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} \quad b) \begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}$$

$$c) \begin{vmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \cos \beta & \sin \beta \end{vmatrix} \quad d) \begin{vmatrix} \log_b N & \log_a N \\ 1 & \log_a b \end{vmatrix}$$

$$e) \begin{vmatrix} x^2 & (x+1)^2 \\ y^2 & (y+1)^2 \end{vmatrix} \quad f) \begin{vmatrix} \log_x 8^a & \log_x 4^a \\ \log_4 x^a & \log_4 x^a \end{vmatrix}$$

$$g) \begin{vmatrix} a^2(a+1)^2 & (a+2)^2 \\ b^2(b+1)^2 & (b+2)^2 \\ c^2(c+1)^2 & (c+2)^2 \end{vmatrix} \quad h) \begin{vmatrix} a^2 & ab \\ ab & a^2 \end{vmatrix}$$

$$i) \begin{vmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{vmatrix} \quad j) \begin{vmatrix} \sin \alpha + \sin \beta & \cos \beta + \cos \alpha \\ \cos \beta - \cos \alpha & \sin \alpha - \sin \beta \end{vmatrix}$$

24. Să se calculeze valoarea determinantilor următori :

$$a) \begin{vmatrix} a & c+di \\ c-di & b \end{vmatrix} \quad b) \begin{vmatrix} a+bi & b \\ 2 & a-bi \end{vmatrix}$$

$$c) \begin{vmatrix} \cos \alpha + i \sin \alpha & 1 \\ 1 & \cos \alpha - i \sin \alpha \end{vmatrix} \quad d) \begin{vmatrix} a+bi & c+di \\ -c+di & a-bi \end{vmatrix}$$

25. Să se calculeze valoarea următorilor determinanți :

$$\begin{vmatrix} a+x & x & x \\ x & b+x & x \\ x & x & c+x \end{vmatrix} ; \quad \begin{vmatrix} \sin \alpha & \cos \alpha & 1 \\ \sin \beta & \cos \beta & 1 \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 1 \end{vmatrix}$$

26. Să se stabilească în ce condiții are loc egalitatea :

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos \alpha & \cos \beta \\ \cos \alpha & 1 & \cos \gamma \\ \cos \beta & \cos \gamma & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \cos \alpha & \cos \beta \\ \cos \alpha & 0 & \cos \gamma \\ \cos \beta & \cos \gamma & 0 \end{vmatrix}$$

27. Să se aplice proprietățile determinantilor și apoi să se calculeze :

$$a) \begin{vmatrix} \sin^2 \alpha & 1 & \cos^2 \alpha \\ \sin^2 \beta & 1 & \cos^2 \beta \\ \sin^2 \gamma & 1 & \cos^2 \gamma \end{vmatrix} \quad b) \begin{vmatrix} \sin^2 \alpha & \cos 2\alpha & \cos^2 \alpha \\ \sin^2 \beta & \cos 2\beta & \cos^2 \beta \\ \sin^2 \gamma & \cos 2\gamma & \cos^2 \gamma \end{vmatrix}$$

$$c) \begin{vmatrix} x & x' & ax + bx' \\ y & y' & ay + by' \\ z & z' & az + bz' \end{vmatrix} \quad d) \begin{vmatrix} a + b & c & 1 \\ b + c & a & 1 \\ c + a & b & 1 \end{vmatrix}$$

28. Să se aplice proprietățile determinantilor și apoi să se calculeze :

$$\begin{vmatrix} (a_1 + b_1)^2 & a_1^2 + b_1^2 & a_1 b_1 \\ (a_2 + b_2)^2 & a_2^2 + b_2^2 & a_2 b_2 \\ (a_3 + b_3)^2 & a_3^2 + b_3^2 & a_3 b_3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} \sin \alpha & \cos \alpha & \sin(\alpha + \delta) \\ \sin \beta & \cos \beta & \sin(\beta + \delta) \\ \sin \gamma & \cos \gamma & \sin(\gamma + \delta) \end{vmatrix}$$

29. Să se demonstreze următoarele egalități :

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & a_1 x + b_1 y + c_1 \\ a_2 & b_2 & a_2 x + b_2 y + c_2 \\ a_3 & b_3 & a_3 x + b_3 y + c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_1 + b_1 x & a_1 - b_1 x & c_1 \\ a_2 + b_2 x & a_2 - b_2 x & c_2 \\ a_3 + b_3 x & a_3 - b_3 x & c_3 \end{vmatrix} = -2x \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & a & cb \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix} = (b - a)(c - a)(c - b).$$

$$30. \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (a + b + c)(b - a)(c - a)(c - b)$$

31. Să se demonstreze egalitățile :

$$\begin{vmatrix} \alpha & \alpha & \alpha & \alpha \\ \alpha & \beta & \beta & \beta \\ \alpha & \beta & \gamma & \gamma \\ \alpha & \beta & \gamma & \gamma \end{vmatrix} = \alpha(\beta - \alpha)(\gamma - \beta)(\delta - \gamma).$$

$$\begin{vmatrix} a - b - c & 2a & 2a \\ 2b & b - c - a & 2b \\ 2c & 2c & c - a - b \end{vmatrix} = (a + b + c)^2$$

$$\begin{vmatrix} \cos(a+b) & \cos(b+c) & \cos(c+a) \\ \cos(a-b) & \cos(b-c) & \cos(c-a) \\ \sin(a+b) & \sin(b+c) & \sin(c+a) \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \sin(a-b) \sin(b-c) \sin(c-a).$$

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 1 & b & b^3 \\ 1 & c & c^3 \end{vmatrix} = (a + b + c) \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}.$$

$$\begin{vmatrix} a & a^2 & a^3 & a^4 \\ b & b^2 & b^3 & b^4 \\ c & c^2 & c^3 & c^4 \\ d & d^2 & d^3 & d^4 \end{vmatrix} = abcd (b-a)(c-a)(d-a)$$

$$(c-b)(d-b)(d-c).$$

32. Să se arate că matricile :

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, -I = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, K = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, -K = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

formează un grup față de operația de înmulțire.

33. Să se arate că matricile de forma :

$M = \begin{bmatrix} t & s \\ s & t \end{bmatrix}, t \in \mathbb{R}, s \in \mathbb{R}, t^2 + s^2 = 1$ formează un grup față de operația de înmulțire.

34. Se dă matricea : $A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

Să se arate că mulțimea $\{A, A^2, A^3\}$ formează grup față de operația de înmulțire a matricelor.

35. Se dau matricile :

$$T = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}, K = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Să se arate că mulțimea formată de matricile :

$$\{T, I, T^{-1}, T(-I) \cdot T^{-1}, TKT^{-1}, T(-K)T^{-1}\}$$

formează grup față de operația de înmulțire a matricilor.

36. Se dau matricile :

$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, K = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Să se arate că toate matricile de forma : $xI + yK$ formează grup față de operația de înmulțire dacă $x^2 - y^2 \neq 0$.

Indicație. Matricea $xI + yK$ are forma :

$$\begin{bmatrix} x & y \\ y & x \end{bmatrix} \text{ și problema se rezolvă ca la exercițiul 33.}$$

37. Să se arate că dacă a, b, c, d sînt numere reale, mulțimea

matricelor de forma : $\begin{pmatrix} a+bi & c+di \\ -c+di & a-bi \end{pmatrix}$ constituie un inel fără

divizori ai lui zero.

38. Se consideră transformarea lineară :

$$\begin{cases} x'_1 = 3x_1 + 2x_2 \\ x'_2 = x_1 + x_2. \end{cases}$$

Să se afle transformatele bazelor $\vec{i} = (1,0)$, $\vec{j} = (0,1)$.

39. Se consideră două transformări lineare date prin matricile :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Să se afle produsul acelor două transformări.

b) Să se afle transformatele coordonatelor vectorilor bazei $\vec{i} = (1,0)$, $\vec{j} = (0,1)$.

c) Să se verifice formula : $(AB)' = B'A'$.

40. Să considerăm o omotetie de centru O și de raport K . Coordonatele unui punct $M(x', y')$ se transformă după relațiile următoare :

$$x'_1 = Kx_1, \quad x'_2 = Kx_2$$

a) Să se scrie matricea transformării. Să se arate apoi că produsul a două omotetii de același centru O și de raport K_1 și K_2 este o omotetie de același centru și de raport $K_1 K_2$.

41. Se consideră o transformare dată de matricea :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Să se arate că această transformare este o simetrie în raport cu axa Oy .

42. Se consideră transformările date de matricile :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

a) Să se determine transformarea produs ;

b) Să se arate, folosind rezultatele de la punctul (a), că produsul a două simetrii este o rotație de unghiul $\alpha = 180^\circ$.

43. Se consideră matricea :

$$A = \begin{pmatrix} a & a & 0 \\ 0 & a & a \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

Să se calculeze : $A^2, A^3, \dots, A^n, n \in \mathbb{N}$.

44. Se consideră matricea :

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix},$$

a) Să se calculeze X^2, X^3, X^4 ;

b) Să se determine X^n .

45. Să considerăm matricea :

$$X = \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & x \end{pmatrix}, x, y \in \mathbb{R}.$$

Să se arate că X verifică relația :

$$X^2 - 2xX + x^2 \cdot I_2 = O_2.$$

I_2 și O_2 sînt matricile unitate și nulă de ordinul al doilea
Să se arate apoi că avem relația :

$$nX^{n+1} - (n+1)x \cdot X^n + x^{n+1} I_2 = O_2.$$

46. Să se determine matricea A , cunoscînd că :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

47. Se dau matricile :

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 2a & a+b \end{pmatrix}.$$

Să se rezolve ecuația $X^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a+b \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{R}$.

48. Se consideră aplicația $R \rightarrow M$ dată prin egalitatea $f(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix}$, cu $x \in R$, unde M este mulțimea matricilor de forma :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix} \text{ cu } a \in R.$$

Să se arate că această aplicație este bijectivă.

Capitolul 20

CALCUL INFORMAȚIONAL

20.1. ENERGIA INFORMAȚIONALĂ. FORMULA ONICESCU

Să presupunem că efectuăm un anumit experiment al cărui rezultat nu este dinainte cunoscut. Rezultatele acestui experiment le vom numi evenimente și le vom nota cu A_1, A_2, \dots, A_n . Probabilitățile de realizare ale acestor evenimente le vom nota cu p_1, p_2, \dots, p_n . Să presupunem că sistemul de evenimente A_1, \dots, A_n este un sistem complet de evenimente, ceea ce înseamnă că dacă efectuăm experimentul nostru, unul din evenimentele A_1, A_2, \dots, A_n se produce cu certitudine.

Dacă notăm cu E evenimentul sigur, atunci avem :

$$E = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_n,$$

$$p(E) = p(A_1) + p(A_2) + \dots + p(A_n) = 1 \quad (1)$$

Prin urmare :

$$\sum_{i=1}^n p_i = 1, \quad p_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Experimentul nostru, pe care-l notăm cu A , pune în evidență un câmp de probabilități și prin urmare o repartiție pe care o notăm :

$$\alpha = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{pmatrix} \quad \sum_{i=1}^n p_i = 1 \quad (2)$$

De aceea în cele ce urmează, cînd vom spune experiment, ne vom referi la un anumit câmp de probabilitate.

Definiția 20.1 Se numește energie informațională a experimentului α și se notează $E(\alpha)$ expresia :

$$E(\alpha) = \sum_{i=1}^n p_i^2. \quad (3)$$

Exemple :

$$\alpha = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ \frac{1}{10} & \frac{3}{10} & \frac{4}{10} & \frac{2}{10} \end{pmatrix}$$

$$\text{Avem : } E(\alpha) = \left(\frac{1}{10}\right)^2 + \left(\frac{3}{10}\right)^2 + \left(\frac{4}{10}\right)^2 + \left(\frac{2}{10}\right)^2 = \frac{3}{10}$$

Definiția 20.2 Se numește sinergia informațională a unui sistem de evenimente expresia :

$s = -\log_2 E$, unde E este energia informațională a sistemului.

20.2. ENERGIA INFORMAȚIONALĂ A PRODUSULUI A DOUĂ EXPERIMENTE INDEPENDENTE

Să considerăm două experimente A și B date prin repartițiile de probabilitate :

$$\alpha = \begin{pmatrix} A_1 & \dots & A_n \\ p_1 & \dots & p_n \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} B_1 & \dots & B_m \\ q_1 & \dots & q_m \end{pmatrix}$$

$$\sum_{i=1}^n p_i = 1, \quad \sum_{i=1}^m q_i = 1.$$

Să presupunem că evenimentele A_1, \dots, A_n și B_1, \dots, B_m sînt independente. Evenimentul care constă din realizarea concomitentă a evenimentelor A_k și B_h îl putem nota cu $(A_k \cap B_h)$. Să notăm cu π_{kh} probabilitatea de producere a evenimentului $A_k B_h$. Deoarece evenimentele A_k și B_h sînt independente avem :

$$\pi_{kh} = p(A_k \cap B_h) = p(A_k) \cdot p(B_h) \quad (4)$$

$$\text{sau} \quad \pi_{kh} = p_k q_h, \quad k = 1, \dots, n; \quad h = 1, \dots, m \quad (5)$$

Avem :

$$\sum_{k,h} \pi_{kh} = \sum_{k=1}^n \sum_{h=1}^m p_k q_h = \left(\sum_{k=1}^n p_k \right) \left(\sum_{h=1}^m q_h \right) = 1$$

Definiția 20.3. Se numește energie informațională a produsului a două experimente A și B expresia :

$$E(\alpha \times \beta) = \sum_k^n \sum_h^m \pi_{kh}^2$$

Proprietate

Energia informațională a produsului a două experimente independente este egală cu produsul energiilor.

Demonstrație

Aplicînd formula (5) obținem :

$$\begin{aligned} E(\alpha \times \beta) &= \sum_{k=1}^n \sum_{h=1}^m \pi_{kh}^2 = \sum_{k=1}^n \sum_{h=1}^m p_k^2 q_h^2 = \\ &= \left(\sum_{k=1}^n p_k^2 \right) \left(\sum_{h=1}^m q_h^2 \right) = E(\alpha) \cdot E(\beta) \end{aligned}$$

20.3. ENERGIA INFORMAȚIONALĂ CONDIȚIONATĂ

Fie două experimente α și β care nu mai sînt independente. Să presupunem că experimentul α pune în evidență schema :

$$\alpha = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{pmatrix}$$

Experimentul β este condiționat de rezultatele experimentului α .

Dacă în experimentul α s-a produs evenimentul A_k , atunci evenimentele experimentului β vor fi condiționate de producerea evenimentului A_k . Probabilitățile evenimentelor din experimentul β sînt condiționate de evenimentul A_k . Producerea evenimentului A_k în experimentul α pune în evidență, în experimentul β , următoarea schemă :

$$\beta/A_k = \begin{pmatrix} B_1/A_k & B_2/A_k & \dots & B_m/A_k \\ q_{k1} & q_{k2} & \dots & q_{km} \end{pmatrix},$$

unde prin q_{kl} am notat probabilitatea ca în experimentul β să se producă evenimentul B_l cu condiția ca în experimentul α să se fi produs evenimentul A_k . Avem evident relațiile :

$$q_{kl} = p(B_l / A_k), \sum_{l=1}^m q_{kl} = 1, \quad q_{kl} \geq 0;$$

$$1 \leq k \leq n, \quad 1 \leq l \leq m.$$

Dacă considerăm evenimentul produs $\alpha \times \beta$ atunci probabilitatea π_{kl} , $1 \leq k \leq n$, $1 \leq l \leq m$, a evenimentului $A_k \cap B_l$, $1 \leq l \leq m$, $1 \leq k \leq n$, se va scrie :

$$\pi_{kl} = p(A_k \cap B_l) = p(A_k) \cdot p(B_l / A_k); \quad 1 \leq k \leq n, \quad 1 \leq l \leq m.$$

Prin urmare, obținem relația :

$$\pi_{kl} = p_k \cdot q_{kl}.$$

Definiția 20.4. Se numește energie informațională a experimentului β , condiționată de realizarea evenimentului A_k în experimentul α , expresia :

$$E(\beta / A_k) = \sum_{l=1}^m q_{kl}^2$$

Definiția 20.5. Se numește energie informațională a experimentului β , condiționată de experimentul α , expresia :

$$E(\beta / \alpha) = \sum_{i=1}^n p_i E(\beta / A_i)$$

Proprietate : $E(\alpha \times \beta) \leq E(\beta / \alpha)$.

Demonstrație : Din definițiile anterioare avem :

$$E(\beta / A_i) \geq 0, \quad p_i \leq 1, \quad p_i - 1 \leq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

$$\begin{aligned} E(\alpha \times \beta) - E(\beta / \alpha) &= \sum_{i=1}^n p_i^2 E(\beta / A_i) - \sum_{i=1}^n p_i E(\beta / A_i) = \\ &= \sum_{i=1}^n p_i E(\beta / A_i) (p_i - 1) \leq 0 \end{aligned}$$

Prin urmărire avem : $E(\alpha \times \beta) \leq E(\beta/\alpha)$.

Exerciții rezolvate

1. Să se determine energia informațională a experimentului ce constă din aruncarea consecutivă a două zaruri.

Soluție

Să notăm cu α și β experimentele ce constau în aruncarea celor două zaruri.

Experimentelor α și β le corespund evenimentele

A_i ($i = 1, 2, \dots, 6$), B_j ($j = 1, 2, \dots, 6$) ce constau din apariția fețelor $1, 2, \dots, 6$.

Avem :

$$\alpha = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_6 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \dots & \frac{1}{6} \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} B_1 & \dots & B_6 \\ \frac{1}{6} & \dots & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

$$E(\alpha) = E(\beta) = \frac{1}{6}$$

Deoarece experimentele α și β sînt independente,

$$E(\alpha \times \beta) = E(\alpha) \cdot E(\beta) = \frac{1}{36}$$

2. Să se afle energia informațională a experimentului ce constă din aruncarea consecutivă a m zaruri.

Soluție

Fie $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ experimentele ce constau din aruncarea consecutivă a zarurilor. Avem :

$$E(\alpha_1) = E(\alpha_2) = \dots = E(\alpha_m) = \frac{1}{6}$$

$$E(\alpha_1 \times \alpha_2 \times \dots \times \alpha_m) = E(\alpha_1) \cdot E(\alpha_2) \dots E(\alpha_m) = \frac{1}{6^m}$$

3. O urnă conține 5 bile albe și 3 bile negre. Se extrag din urnă la început două bile și apoi încă una. Se notează cu α , respectiv β , experimentele care corespund celor două extracții succesive. Să se calculeze $E(\alpha)$ și $E(\beta/\alpha)$.

Soluție

a) Experimentul α se realizează în condițiile schemei bilei nerevenite. Vom distinge trei evenimente elementare posibile: A_1, A_2, A_3 — după cum la extracția celor două bile s-au obținut 0, 1, 2 bile negre. Prin urmare, avem :

$$\alpha = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ \frac{C_5^2}{C_8^2} & \frac{C_5^1 C_3^1}{C_8^2} & \frac{C_3^2}{C_8^2} \end{pmatrix}$$

$$\text{sau : } \alpha = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ \frac{10}{28} & \frac{15}{28} & \frac{3}{28} \end{pmatrix}, p_1 = \frac{10}{28}, p_2 = \frac{15}{28}, p_3 = \frac{2}{28}$$

$$E(\alpha) = \left(\frac{10}{28}\right)^2 + \left(\frac{15}{28}\right)^2 + \left(\frac{3}{28}\right)^2 = \frac{234}{784}$$

b) În experimentul β vom distinge două evenimente elementare, B_1 și B_2 , corespunzătoare scoaterii unei bile albe sau a unei bile negre.

Experimentele α și β sînt dependente, deoarece realizarea evenimentelor B_1 și B_2 din experimentul β depinde de probabilitățile A_1, A_2, A_3 din experimentul α . Experimentului β îi corespund trei scheme de repartiție, după cum în experimentul α s-a produs unul din evenimentele A_1, A_2, A_3 .

Prin urmare avem :

$$E(\beta/A_1) = \frac{9}{36} + \frac{9}{36} = \frac{1}{6}$$

$$E(\beta/A_2) = \frac{16}{36} + \frac{4}{36} = \frac{20}{36} = \frac{5}{9}$$

$$E(\beta/A_3) = \frac{25}{36} + \frac{1}{36} = \frac{26}{36} = \frac{13}{18}$$

$$E(\beta/\alpha) = \sum_{i=1}^3 p_i \quad E(\beta/A_i) = \frac{10}{28} \cdot \frac{1}{6} + \frac{15}{28} \cdot \frac{5}{9} + \frac{3}{28} \cdot \frac{13}{18} =$$

$$= \frac{30 + 150 + 39}{18 \cdot 28} = \frac{219}{504}$$

4. În agricultură, un anumit dăunător apare cu frecvența de 4% (adică din 100 de plante, 4 sînt atacate de dăunători). Pentru depistarea lui se folosește un anumit preparat, care în prezența dăunătorului capătă o culoare roșie, iar în lipsa lui primește în $\frac{1}{8}$ din cazuri culoarea roșie și în $\frac{7}{8}$ din cazuri culoarea albastră.

Notînd cu α experimentul ce constă în determinarea dacă o plantă are sau nu dăunători și cu β rezultatul reacției, să se determine $E(\alpha)$ și $E(\alpha/\beta)$.

Soluție

Să notăm cu A_1 și A_2 evenimentele ce constau din lipsa, respectiv prezența, dăunătorului, cu B_1 , B_2 evenimentele ce constau din rezultatul identificării (apariția nuanței roșii sau albastre):

$$\alpha = \left(\begin{array}{cc} A_1 & A_2 \\ \frac{96}{100} & \frac{4}{100} \end{array} \right)$$

Să observăm că evenimentul B_1 , preparatul capătă culoarea roșie, se produce într-un număr de cazuri aflat din relația:

$$4 + \frac{1}{8} (100 - 4) = 16 \text{ cazuri din } 100 \text{ de preparate posibile.}$$

Prin urmare, realizarea experimentului pune în evidență schema următoare:

$$\beta = \left(\begin{array}{cc} B_1 & B_2 \\ \frac{16}{100} & \frac{84}{100} \end{array} \right)$$

Probabilitățile experimentului α condiționat de β vor fi:

$$P_{B_1}(A_1) = \frac{12}{16}, P_{B_1}(A_2) = \frac{4}{16}, P_{B_2}(A_1) = 1, P_{B_2}(A_2) = 0.$$

Prin urmare, avem :

$$E(\alpha/B_1) = \frac{12^2}{16^2} + \frac{4^2}{16^2} = \frac{160}{256} = \frac{5}{8},$$

$$E(\alpha/B_2) = 1,$$

$$E(\alpha/\beta) = \frac{96}{100} \cdot \frac{5}{8} + \frac{4}{100} = \frac{19}{25} \cdot \frac{5}{8} + \frac{1}{25} = \frac{1}{25 \cdot 8} = \frac{12}{15}$$

5. Se consideră experimentul (α) caracterizat prin următoarea schemă :

$$\alpha \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ x & x+y & y \end{pmatrix}$$

Să se determine parametrii x și y cunoscând că energia informațională a experimentului α este $E(\alpha) = \frac{3}{8}$.

Soluție

Pentru $(x, y) \in R^2$ avem :

$$\begin{cases} x + x+y + y = 1 \\ x^2 + (x+y)^2 + y^2 = \frac{3}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = \frac{1}{2} \\ x^2 + y^2 + xy = \frac{3}{16} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + 2xy = \frac{1}{4} \\ x^2 + y^2 + xy = \frac{3}{16} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y = \frac{1}{2} \\ xy = \frac{1}{16} \end{cases}, t^2 - \frac{1}{2}t + \frac{1}{16} = 0 \Leftrightarrow 16t^2 - 8t + 1 = 0$$

$$t_1 = t_2 = \frac{1}{4}$$

Prin urmare, avem :

$$x = y = \frac{1}{4}.$$

20.4. ENTROPIE. FORMULA LUI SHANNON. PROPRIETĂȚI

Să considerăm un experiment (α) căruia îi corespunde schema :

$$\alpha = \begin{pmatrix} A_1 & \dots & A_n \\ p_1 & \dots & p_n \end{pmatrix}, \text{ unde } A_i \cap A_j = \emptyset;$$

$$\bigcup_{i=1}^n A_i = E, \quad \sum_{i=1}^n p_i = 1$$

Evenimentele A_1, \dots, A_n se numesc elementare, iar E se numește eveniment sigur.

Definiție. Se numește entropia H a experimentului (α) expresia :

$$H = - \sum p_i \log_2 p_i$$

Exemplu : Două urne conțin, fiecare, 20 bile. Prima urnă conține 10 bile albe, 5 negre și 5 albastre. Cea de a doua urnă conține 8 bile albe, 8 negre și 4 roșii. Se extrage la întâmplare o bilă din fiecare urnă. Care este experiența care conține cea mai mică incertitudine.

Soluție Să calculăm entropia H_1 a primei experiențe :

$$H_1 = - \frac{1}{2} \log_2 \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \log_2 \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \log_2 \frac{1}{4} \cong 1,50 \text{ biți.}$$

Entropia H_2 a celei de a doua experiențe :

$$H_2 = - \frac{2}{5} \log_2 \frac{2}{5} - \frac{2}{5} \log_2 \frac{2}{5} - \frac{1}{5} \log_2 \frac{1}{5} \cong 1,528 \text{ biți}$$

Experiența care prezintă cea mai mică incertitudine este prima.

20.5. ENTROPIA PRODUSULUI A DOUĂ EXPERIMENTE INDEPENDENTE

Să considerăm două experimente independente α și β .

$$\alpha = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & \dots & A_n \\ p_1 & p_2 & p_3 & \dots & p_n \end{pmatrix} \quad \beta = \begin{pmatrix} B_1 & \dots & B_m \\ q_1 & \dots & q_m \end{pmatrix}$$

Să notăm cu $A_k \cap B_l$ evenimentul ce constă din realizarea concomitentă a evenimentelor A_k și B_l .

Conform cu regula stabilită anterior avem :

$$\pi_{kl} = p(A_k \cap B_l) = p(A_k) \cdot p(B_l) = p_k \cdot q_l$$

Să considerăm experimentul produs $\alpha \times \beta$, care reprezintă experimentul ce constă din realizarea concomitentă a experimentelor α și β , și care are $m \cdot n$ evenimente $A_k \cap B_l$ cu probabilitățile π_{kl} , $1 \leq k \leq n, 1 \leq l \leq m$.

Nedeterminarea experimentului produs $\alpha \times \beta$ o vom nota $H(\alpha \times \beta)$ și vom avea :

$$\begin{aligned} H(\alpha \times \beta) &= \sum \sum \pi_{kl} \cdot \log \pi_{kl} = \sum \sum p_k \cdot q_l \cdot \log (p_k \cdot q_l) = \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m p_k q_l (\log p_k + \log q_l) = \\ &= (\sum p_k \log p_k) + \left(\sum_{l=1}^m q_l \log q_l \right) = H(\alpha) + H(\beta). \end{aligned}$$

20.6. ENTROPIA EXPERIMENTULUI α CONDIȚIONAT DE] EXPERIMENTUL β

Dacă experimentul β este condiționat de experimentul α , pentru experimentul β fiecare realizare a unui eveniment al experimentului α pune în evidență în β o repartiție de probabilități și prin urmare o nedeterminare.

De exemplu, dacă în experimentul α s-a produs evenimentul A_k , atunci acesta pune în evidență în β schema :

$$(\beta/A_k) = \begin{pmatrix} B_1/A_k & \dots & B_m/A_k \\ q_{1k} & \dots & q_{mk} \end{pmatrix},$$

a cărei nedeterminare este :

$$H_k(\beta) = \sum_{l=1}^m q_{lk} \log q_{lk}$$

Fiecărui eveniment A_k , $1 \leq k \leq n$, îi corespunde o nedeterminare $H_k(\beta)$, $1 \leq k \leq n$.

Putem considera repartiția :

$$\begin{pmatrix} H_1(\beta) & H_2(\beta) & \dots & H_n(\beta) \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{pmatrix}$$

Nedeterminarea experimentului β condiționată de întregul experiment α va fi :

$$H_\alpha(\beta) = \sum_{k=1}^n p_k H_k(\beta).$$

Exemplul 1

Să considerăm experimentul (α) ce constă din extragerea unei bile dintr-o urnă ce conține 3 bile albe și 2 bile negre. Schema acestui experiment este :

$$(\alpha) = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix} \quad A_1 - \text{extragerea bilei albe}; A_2 - \text{extragerea}$$

bilei negre.

Fie acum experimentul (β) ce constă în aruncarea unei monede. Schema acestui experiment este :

$$(\beta) = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Experimentul produs $\alpha \times \beta$ este experimentul ce constă din extragerea unei bile și aruncarea unui zar căruia îi corespunde schema :

$$(\alpha \times \beta) = \begin{pmatrix} A_1 B_1 & A_1 B_2 & A_2 B_1 & A_2 B_2 \\ \frac{3}{10} & \frac{3}{10} & \frac{2}{10} & \frac{2}{10} \end{pmatrix}$$

Entropia experimentului (α) este :

$$\begin{aligned} H(\alpha) &= -\frac{3}{5} \log_2 \frac{3}{5} - \frac{2}{5} \log_2 \frac{2}{5} = -\frac{3}{5} (\log_2 3 - \log_2 5) - \\ &\quad - \frac{2}{5} (\log_2 2 - \log_2 5) = \log_2 5 - \frac{3}{5} \log_2 3 - \frac{2}{5}. \end{aligned}$$

Entropia experimentului β este : $H(\beta) = 1$

Entropia experimentului produs ($\alpha \times \beta$) este :

$$\begin{aligned} H(\alpha \times \beta) &= -\frac{6}{10} \log_2 \frac{3}{10} - \frac{4}{10} \log_2 \frac{2}{10} = -\frac{3}{5} \log_2 \frac{3}{10} - \\ &\quad - \frac{2}{5} \log_2 \frac{2}{10} = -\frac{3}{5} \log_2 3 + \frac{3}{5} \log_2 2 + \frac{3}{5} \log_2 5 - \\ &\quad - \frac{2}{5} + \frac{2}{5} \log_2 5 + \frac{2}{5} = \log_2 5 - \frac{3}{5} \log_2 3 + \frac{3}{5}. \end{aligned}$$

Se verifică imediat relația

$$H(\alpha) \cdot H(\beta) = H(\alpha \times \beta)$$

20.7. EXERCIIȚII ȘI PROBLEME

1. O urnă conține 10 bile albe și 10 bile negre. Să considerăm experimentul (α) ce constă din extragerea la întâmplare a unei bile din urnă. Să se determine entropia experimentului (α).

2. O urnă conține 10 bile albe, 10 bile negre și 10 bile roșii. Se consideră experimentul ce constă din extragerea la întâmplare a unei bile din urnă. Să se calculeze entropia acestui experiment.

3. După un șir suficient de observații asupra timpului într-o anumită localitate s-a ajuns la concluzia că la data de 1 iulie probabilitatea de a avea precipitații este 0,35 și probabilitatea de a fi timp uscat este 0,65, iar la data de 15 octombrie probabilitatea de a avea precipitații este 0,8, iar probabilitatea de a avea timp uscat este 0,2. La care din aceste date nedeterminarea este mai mare?

4. O țintă este formată din 3 cercuri concentrice.

De la distanța de unde se trage, un trăgător nimerește în interiorul cercului mai mic cu probabilitatea 0,05, în coroana dintre cel mai mic cerc și al doilea cu probabilitatea 0,3, în ultima coroană cu probabilitatea 0,4 și în afara țintei cu probabilitatea 0,85. Care este entropia experimentului ce constă din tragerea a două gloanțe în țintă?

5. Se dă un experiment caracterizat prin schema :

$$\begin{pmatrix} A & B & C \\ x-y & y+z & x-z \end{pmatrix}$$

Să se determine parametrii reali x, y, z , astfel încât entropia experimentului să fie maximă.

$$R: x = \frac{1}{2}; z = \frac{1}{6}; y = \frac{1}{6}$$

6. Se dă un experiment caracterizat prin schema :

$$\begin{pmatrix} A & B & C \\ y+z & z+x & x+y \end{pmatrix}$$

Să se determine condiția pe care trebuie să o satisfacă parametrii x, y, z astfel încât entropia experimentului să fie maximă.

7. Să se determine entropia experimentului căruia îi corespunde schema :

$$\begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ \frac{1}{4} & x & x & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

știind că parametrul x este una din soluțiile ecuației :

$$8x^3 - 25x^2 + 19x - 2 = 0.$$

8. Să se determine entropia experimentului căruia îi corespunde schema :

$$\begin{pmatrix} A & B & C & D & E \\ \frac{3}{24} & x & y & z & \frac{10}{24} \end{pmatrix}$$

Știind că parametrii x, y, z satisfac sistemul de ecuații

$$\begin{cases} 2x - y = \frac{5}{24} \\ \log x + 2 \log y + \log 384 = 0 \end{cases}$$

9. Doi muncitori au produs un lot de piese; primul 60, din care 2 rebuturi, și al doilea 72, din care 3 rebuturi. Din fiecare

lot se extrage, la întâmplare, câte o piesă. Notînd cu α și β experimentul ce constă din extragerea unei piese din primul, respectiv al doilea lot, se cere $H(\alpha)$ și $H(\beta)$.

10. În două linii automatizate s-au produs, în ordine, un număr de 600 și respectiv 750 de piese. Notînd cu α și β experimentele ce constau din extragerea la întâmplare a câte unei piese din producția primei și a celei de a doua linii, să se determine $H(\alpha)$ și $H(\beta)$ și $H(\alpha/\beta)$, dacă se știe că prima linie produce rebuturi în proporție de 5% și a doua în proporție de 5‰.

11. Să se determine entropia experimentului ce constă din aruncarea a 2 zaruri. Generalizare.

12. Trei vînători au văzut în același timp o vulpe și au tras simultan în ea. Notînd cu α , β și γ experimentele ce constau din tragerea unui singur foc de către primul, respectiv al doilea și al treilea vînător, să se calculeze $H(\alpha, \beta, \gamma)$ dacă se știe că, la distanța respectivă, oricare din cei trei vînători lovește mortal vulpea o dată la 3 focuri.

13. Dintr-un lot de 300 de cutii de mazăre, 100 de roșii și 100 cutii de ghiveci, s-a extras la întâmplare, pentru control, o cutie după care s-a mai scos încă o cutie (fără a se repune prima cutie la loc).

Notînd cu α experimentul ce constă din extracția primei cutii și cu β experimentul ce constă din extracția a încă unei cutii să se calculeze $H_\alpha(\beta)$.

14. Într-o cutie cu litere majuscule de rezervă, litera A apare de 6 ori, B de 4 ori și C de 8 ori.

Se extrag două litere oarecare (punîndu-se după fiecare extracție litera înapoi), după care se mai extrage încă o literă. Notînd cu α experimentul ce constă din extracția — în condițiile indicate — a două litere și cu β experimentul ce constă din extracția unei litere, să se calculeze :

$$H_\alpha(\beta) \text{ și } H_\beta(\alpha).$$

Indicație :

Din condițiile problemei rezultă că experimentele α și β sînt independente, deoarece după realizarea fiecărui experiment compoziția cutiei nu se mai modifică.

În aceste condiții :

$$H_\alpha(\beta) = H(\beta) \text{ și } H_\beta(\alpha) = H(\alpha)$$

15. Se dă un experiment caracterizat prin schema :

$$\alpha = \begin{pmatrix} A & B & C \\ y+z & z+x & x+y \end{pmatrix}$$

Să se determine parametrii reali x , y și z , încît energia informațională a acestui experiment să fie minimă.

16. Pe un segment OA de lungime l al axei numerice Ox se dau la întîmplare două puncte $B(x)$ și $C(y)$. Să se găsească probabilitatea ca din cele trei segmente obținute să se construiască un triunghi. (Problema triunghiului).

17. În interiorul unui cerc de rază R se alege la întîmplare un punct. Să se afle probabilitatea ca punctul ales la întîmplare să se găsească în interiorul :

- a) pătratului înscris în cerc ;
- b) triunghiului echilateral ;
- c) hexagonului regulat înscris în cerc.

18. Un disc este împărțit într-un număr par de sectoare egale, vopsite alternativ alb și negru. Discul se rotește rapid și se trage asupra lui cu o armă. Să se găsească probabilitatea ca glonțul să nimerească într-un sector alb.

19. Un plan este împărțit de mai multe drepte paralele care se găsesc la distanța a una de cealaltă. Pe plan se aruncă la întîmplare o monedă cu raza $r < a$.

Să se găsească probabilitatea ca moneda să nu intersecteze nici una dintre drepte.

20. Se consideră familia tuturor coardelor dintr-un cerc de rază R . Care este probabilitatea ca luînd la întîmplare o coardă, ea să fie mai mică decît latura triunghiului echilateral înscris în acel cerc? (Problema lui Bertrand)

21. Se consideră mulțimea tuturor coardelor care trec printr-un punct fix A . Se cere probabilitatea ca, luînd la întîmplare o coardă din familie, aceasta să fie mai mică decît latura triunghiului echilateral înscris în cerc.

22. Se consideră triunghiul oarecare ABC , de laturi a , b și c . Care este probabilitatea ca, luînd la întîmplare un punct de pe bisec-toarea vîrfului A , distanța de la acest punct la una din laturile AB

sau AC ale triunghiului să fie mai mică decât $\frac{S}{b+c}$ (S fiind aria triunghiului).

23. Într-un triunghi ABC se duce înălțimea AA' . Dintr-un punct oarecare al înălțimii se duce o paralelă la latura BC a triunghiului care taie laturile AC și AB în punctele M și N .

Se consideră mulțimea tuturor acestor paralele. Care este probabilitatea ca, luând la întâmplare o paralelă, să avem relația: $NB + MC < MN$.

24. Într-un triunghi isoscel ABC ($AB=AC=a$; $BC=2b$) se consideră mulțimea tuturor segmentelor de dreaptă de lungime $2l$ ($l < b$), paralele cu latura BC și care au mijloacele situate pe înălțimea triunghiului. Care este probabilitatea ca, luând la întâmplare un segment, acesta să intersecteze laturile triunghiului isoscel?

25. Se consideră dreptunghiul $ABCD$ ($AD=b$; $AB=a$; $a > b$). Care este probabilitatea ca, luând la întâmplare un punct M pe diagonala AC , distanța de la acest punct D să fie mai mare decât b ?

26. Să considerăm triunghiul dreptunghic ABC ($A=90^\circ$, $B=30^\circ$). Care este probabilitatea ca, luând la întâmplare un punct M pe ipotenuza triunghiului, distanța AM să fie mai mică decât jumătate din ipotenuză?

27. Se consideră triunghiul dreptunghic isoscel ABC ($A=90^\circ$). Care este probabilitatea ca, luând la întâmplare un punct D pe latura BC , diferența unghiurilor adiacente formate în punctul D de dreptele AD și BC să fie mai mare decât 30° ?

Capitolul 21

ELEMENTE DE TEORIA JOCURILOR

21.1. GENERALITĂȚI. DEFINIȚII

Teoria jocurilor are ca obiect analiza matematică a situațiilor de conflict, situații în care se ciocnesc interesele unor părți ce urmăresc scopuri opuse. Aceste situații sînt în mod formal conflictuale, deoarece ele s-ar putea referi la cazuri care în vorbirea curentă sau în uzanța obișnuită nu le putem considera conflicte.

Astfel în jocul de șah, raportul dintre cei doi jucători nu este practic „conflictual” în sensul în care ne-am referi de exemplu la conflictul dintre doi concurenți. Cele două situații, jocul de șah și conflictul dintre doi concurenți, au anumite trăsături care pot fi exprimate matematic prin același model.

În general o situație de conflict apare atunci cînd din mai multe ipoteze ce se pot realiza cu anumite probabilități urmează să se facă o alegere după un anumit criteriu de eficiență.

O situație conflictuală luată din practică cuprinde un număr mult mai mare de factori care în cazul modelului matematic al teoriei jocurilor nu pot fi luați în considerare.

Conceptul matematic de joc cuprinde prin urmare un model simplificat. Jocul se deosebește de situația conflictuală reală prin faptul că se desfășoară după reguli bine stabilite. Pentru înțelegerea teoriei jocurilor este necesar să precizăm cîteva din elementele conceptului matematic de joc. Persoanele care participă la un joc cu interese opuse se numesc jucători sau parteneri.

În raport cu numărul jucătorilor care participă la un joc, jocurile se împart în jocuri cu doi parteneri sau cu mai mulți parteneri.

Realizarea unui joc se numește o partidă. Acțiunile simple întreprinse de jucători în cadrul unei partide poartă denumirea de mutări. Prin joc vom înțelege un șir de mutări ale jucătorilor. Partida se încheie cu cîștigul unuia dintre jucători.

Jocurile cu mutări aleatoare sînt caracterizate prin alegerea la întîmplare a unei mutări de către jucători din mulțimea posibilităților care se oferă. Se numește strategie un ansamblu de reguli care definesc mutările în funcție de situațiile posibile, prin urmare, alegerea unei decizii de joc din cele pe care le are jucătorul la dispoziție.

Strategia determină, pentru fiecare jucător, modul în care el alege mișcările. Dacă pentru realizarea unui joc, un jucător are la dispoziție mai multe alternative și el alege una dintre ele, spunem că alegerea făcută reprezintă o strategie pură. Jocurile cu un număr finit de strategii pure se numesc jocuri finite.

Un joc finit între doi jucători astfel încît un jucător are m strategii pure și adversarul său are n strategii pure se numește joc de tipul $(m \times n)$.

Dacă strategiile sînt aleatoare cu probabilități date în cadrul unui anumit joc, atunci jocul se numește cu strategie mixtă. Prin urmare o strategie mixtă se obține atunci cînd jucătorii aleg strategiile pure, cu anumite frecvențe.

Strategiile mixte sînt prin urmare combinații de strategii pure cărora le asociem anumite probabilități cunoscute.

Într-un joc fiecare jucător caută să aleagă această strategie care-i aduce maximum de cîștig. Strategia care aduce unui jucător maximum de avantaje se numește strategie optimă.

Prin cîștigul realizat la sfîrșitul fiecărei partide se înțelege rezultatul confruntării a două strategii pure ale jucătorilor.

Pentru cunoașterea cîștigului ar trebui cunoscute plățile făcute de jucători, în favoarea altor jucători, la sfîrșitul unei partide. Din punct de vedere al cîștigului, jocurile pot fi de sumă nulă cînd la sfîrșitul unei anumite partide suma pierdută de o parte din jucători este cîștigată de ceilalți jucători, sau jocuri fără sumă nulă.

21.2. MATRICEA UNUI JOC

Jocurile finite cu sumă nulă, între doi jucători A și B , se caracterizează prin corespondența dintre mulțimea strategiilor pure ale unui jucător și mulțimea strategiilor pure ale celuilalt jucător.

Această corespondență poate fi reprezentată printr-o matrice în care liniile reprezintă strategiile pure ale unui jucător, iar coloanele strategiile pure ale celuilalt jucător. Dacă un joc se desfășoară într-o singură partidă, jucătorul A cîștigă de la jucătorul B suma x_i , în ipoteza că jucătorul A a ales strategia corespunzătoare liniei i , iar jucătorul B strategia corespunzătoare coloanei j .

Să presupunem că jucătorul A are m strategii pure și jucătorul B are n strategii pure.

Să notăm prin x_{ij} câștigul primului jucător în situația în care el a ales strategia A_i , iar adversarul strategia B_j . Aceste valori pentru fiecare pereche de strategii pot fi înscrise într-un tablou dreptunghiular în care liniile corespund strategiilor pure ale jucătorului A , iar coloanele strategiilor pure ale jucătorului B .

$A \backslash B$	B_1	B_2	B_3	\dots	B_n
A_1	x_{11}	x_{12}	x_{13}	\dots	x_{1n}
A_2	x_{21}	x_{22}	x_{23}	\dots	x_{2n}
\vdots					
A_m	x_{m1}	x_{m2}	x_{m3}	\dots	x_{mn}

Observație În cazul când partidele se repetă, atunci strategiile pure sînt folosite cu anumite frecvențe. Elementele x_{ij} ale matricei jocului sînt date direct sau se deduc din regulile jocului.

21.3. VALOAREA SUPERIOARĂ ȘI INFERIOARĂ A UNUI JOC

Dacă într-un joc un anumit adversar alege strategia A_i , atunci se înțelege că celălalt jucător va alege strategia B_j , astfel încît câștigul jucătorului A să fie minim. Această strategie a lui B corespunde numărului x_{ij} care are în linia i valoarea cea mai mică. Numărul \bar{x}_i reprezintă cel mai mic număr din linia i .

Deoarece jucătorul A are la dispoziție m strategii pure, el va căuta să aleagă pe aceea dintre ele pentru ca x_i să fie maxim.

Această valoare o vom nota cu x' și reprezintă valoarea inferioară a unui joc.

$$x = \max_i \bar{x}_i = \max_i \min_j x_{ij}$$

În mod analog se deduce că adversarul B dorește să minimizeze câștigul maximal al lui A .

Va alege aceeași strategie care-i va procura lui un minimum de pierdere. Aceasta se va întâmpla dacă câștigul lui A nu va fi mai mare decât : $\bar{x}_j = \max_i x_{ij}$.

Prin urmare \bar{x}_j reprezintă elementul cu cea mai mare valoare așezat în coloana j .

Jucătorul B are însă la dispoziție n strategii pure și va alege pe aceea pentru care \bar{x}_j este minim, adică câștigul jucătorului A să fie cel mai mic posibil.

Să notăm : $y = \min_j \max_i x_{ij}$

și reprezintă valoarea superioară a jocului.

Strategia care corespunde valorii x' se numește maximin și ea garantează jucătorului A un câștig egal cu valoarea inferioară a jocului. Strategia care corespunde valorii x'' se numește strategie minimax și asigură jucătorului B o pierdere egală cu valoarea superioară a jocului.

Dacă jucătorul A alege o strategie maximin atunci el se asigură de un câștig a cărei valoare nu este inferioară lui x' , indiferent de strategia aleasă de jucătorul B .

Dacă jucătorul B alege strategia minimax el se asigură că pierderea sa nu va fi mai mare decât x'' , indiferent de strategia jucătorului A .

Exemplul 1

Să presupunem că matricea jocului a doi jucători A și B este :

$A \backslash B$	B_1	B_2	B_3	x_i
A_1	-1	-4	-5	-5
A_2	0	-3	-2	-3
A_3	2	0	-1	-1
y_j	2	0	-1	

$$(A) \ x_i = \min_j x_{ij}, \quad (B) \ y_j = \max_i x_{ij}$$

x_i este valoarea minimă a tuturor câștigurilor lui A , pentru toate strategiile B_1, B_2, B_3 ale lui B .

$$x_1 = \min_j x_{1j}, \quad x_2 = \min_j x_{2j}, \quad x_3 = \min_j x_{3j}.$$

Pentru a afla pe x_1 , trebuie să alegem cea mai mică valoare din valorile înscrise în prima linie corespunzătoare lui A_1 . În mod asemănător se află x_2 , comparînd valorile înscrise pe linia lui A_2 ; x_3 comparînd valorile înscrise pe linia lui A_3 ; se găsește $x_1 = -5$, $x_2 = -3$, $x_3 = -1$. În mod asemănător se stabilesc valorile y_1, y_2, y_3 , comparînd valorile înscrise pe coloanele B_1, B_2, B_3 , $y_1 = \max_i x_{1i}$, $y_2 = \max_i x_{2i}$, $y_3 = \max_i x_{3i}$; $y_1 = 2$, $y_2 = 0$, $y_3 = -1$.

$$\text{Avem : } x = \max_i x_i = \max(-5, -3, -1) = -1,$$

$$y = \min_j y_j = \min(2, 0, -1) = -1.$$

Strategia *maximin* a jucătorului A este A_3 . Jucînd A_3 jucătorul A se asigură de o pierdere maximală, cel puțin egală cu 1.

Strategia *minimax* a jucătorului B este B_3 . Dacă de exemplu jucătorul A refuză să aleagă A_3 și alege de exemplu A_2 , atunci jucătorul B poate replica alegînd B_2 și în felul acesta pierderea jucătorului A este egală cu 3.

Exemplul 2

Matricea jocului a doi jucători A și B este :

A \ B	B		x
	B_1	B_2	
A_1	1	-1	-1
A_2	-1	1	-1
y	+1	+1	

$$x = -1, y = +1$$

Concluzia în acest joc este trivială de aceea orice strategie a jucătorului A este o strategie maximin, după cum orice strategie a jucătorului B este minimax.

21.4. JOCURI ECHILIBRATE

Să revenim la jocul din exemplul 1, caracterizat de matricea sa. Avem : $x = \max_i \min_j x_{ij} = -1$

$$y = \min_j \max_i x_{ij} = -1$$

Prin urmare în acest joc valoarea superioară este egală cu valoarea inferioară ($x = y$). Jocurile care se bucură de această proprietate se numesc *jocuri echilibrate*. Punctul de coordonate $x = y = -1$ se numește *punct de echilibru* al matricei jocului.

Perechea dublă de strategii (A_1, B_1) , corespunzătoare punctului de echilibru, se numește *soluția jocului*. În cazul exemplului nostru soluția jocului este perechea (A_3, B_3) .

Valoarea superioară care este egală cu valoarea inferioară a unui joc se numește *valoarea jocului*.

21.5. CAZURI PARTICULARE

În cazul jocurilor de forma 2×2 se poate stabili în mod direct existența unui punct de echilibru.

Un joc reprezentat printr-o matrice pătratică de ordinul doi e strict determinat dacă matricea sa conține un anumit termen U care este în același timp minim al liniei și maxim al coloanei în care se găsește. Dacă $U = 0$, jocul se numește echitabil.

Exemple

Să considerăm jocurile reprezentate de matricile :

0	1
-2	4

a)

4	3
-6	-2

b)

0	2
3	0

c)

1. Jocul (a) este strict determinat și echitabil, deoarece elementul 0 este maximum elementelor din coloana unde se găsește, $\max(-2, 0) = 0$, și minimum liniei în care el se află, $\min(0, 1) = 0$. Prin urmare valoarea jocului este $U = 0$. Primul jucător va trebui să aleagă prima linie, iar cel de al doilea jucător prima coloană.

2. Jocul reprezentat de matricea (b) este strict determinat, deoarece elementul 3 este minimum elementelor din linia unde se găsește, $\min(4, 3) = 3$, și maximum elementelor coloanei unde se găsește $\max(3, -2) = 3$. Jocul nu este echitabil deoarece $U = 3 \neq 0$.

3. Jocul reprezentat de matricea (c) nu este strict determinat. Pentru a afla valoarea acestui joc va trebui să cunoaștem probabilitățile cu care primul jucător alege liniile (1) sau (2), respectiv probabilitățile celui de al doilea jucător cu care va alege coloanele (1) sau (2).

Teoremă : Jocul de matrice :

$$J = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

nu este strict determinat dacă una din condițiile următoare nu este realizată :

- 1) $a < b, \quad a < c, \quad d < b \quad \text{și} \quad d < c;$
- 2) $a > b, \quad a > c, \quad d > b \quad \text{și} \quad d > c.$

21.6. RELAȚIA DE DOMINARE ÎNTR-UN JOC

Dacă un joc nu admite punct de echilibru, rezolvarea sa este în general mai complicată. Matricea unui joc poate fi în general simplificată (simplificarea se referă aici la reducerea numărului de linii sau a numărului de coloane) în două situații posibile :

a) Dacă o coloană sau o linie se repetă. În acest caz, repetarea unei anumite strategii este nulă.

b) Dacă elementele unei linii sau ale unei coloane sînt mai mici sau cel mult egale cu elementele altei linii sau ale altei coloane.

Dominarea este strictă dacă toate elementele unei linii sau ale unei coloane sînt mai mici sau cel mult egale cu elementele altei linii sau ale altei coloane.

Dacă elementele unei anumite linii k sînt mai mici sau cel mult egale cu elementele altei linii i , $x_{kj} < x_{ij}$, pentru orice j , atunci strategia A_k , corespunzătoare liniei k , este dominată de strategia A_i , corespunzătoare liniei i .

Relațiile de dominare într-un joc ne permit să simplificăm matricea unui joc eliminînd liniile sau coloanele dominate.

Exemplul 1

Să considerăm un joc caracterizat prin matricea :

$A \backslash B$	B_1	B_2	B_3
A_1	2	3	1
A_2	4	0	-1
A_3	2	3	1

Se observă că strategia A_3 reproduce întru totul strategia A_2 și prin urmare ea se poate simplifica și se obține matricea :

$A \backslash B$	B_1	B_2	B_3
A_1	2	3	4
A_2	4	0	-1

Exemplul 2

Să considerăm un joc caracterizat prin matricea :

$A \backslash B$	B_1	B_2	B_3
A_1	2	3	1
A_2	1	2	1
A_3	-4	5	7

În acest joc se observă că elementele liniei A_2 sînt mai mici sau cel mult egale cu elementele liniei A . Matricea acestui joc poate fi simplificată astfel :

$A \backslash B$	B_1	B_2	B_3
A_1	2	3	1
A_3	-4	5	7

21.7. STRATEGII MIXTE

Se numește strategie mixtă o combinație aleatoare a mai multor strategii pure cu probabilități cunoscute.

Să considerăm un joc caracterizat de matricea :

$$X = \begin{pmatrix} & B_1 & B_2 & \dots & B_n \\ A_1 & x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ A_2 & x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_m & x_{m1} & x_{m2} & \dots & x_{mn} \end{pmatrix}$$

Strategiile mixte ale celor doi jucători A și B sînt :

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & \dots & A_m \\ p_1 & \dots & p_m \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_1 & \dots & B_n \\ q_1 & \dots & q_n \end{pmatrix}$$

$$\sum_1^m p_i = 1, \quad \sum_1^n q_j = 1$$

Valoarea x_{ij} se realizează cu probabilitatea corespunzătoare strategiei A_i (corespunzătoare liniei i) și strategiei B_j (corespunzătoare coloanei j).

Expresia :

$$C(A, B) = \sum_i^m \sum_j^n x_{ij} p_i q_j \quad (1)$$

reprezintă cîștigul probabil care este așteptat de jucătorul A .

Dacă notăm cu p și q vectorii probabilităților de alegere a strategiilor S_A și S_B , atunci funcția $C(x, y)$ poate fi scrisă sub formă matricială astfel :

$$C(x, y) = p \times q.$$

Să revenim la jocul 2×2 avînd matricea :

$$\begin{matrix} & B_1 & B_2 \\ A_1 & x_{11} & x_{12} \\ A_2 & x_{21} & x_{22} \end{matrix}$$

Strategiile mixte ale celor doi jucători A și B sînt :

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ p_1 & p_2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ q_1 & q_2 \end{pmatrix}$$

$$p_1 + p_2 = 1, \quad (0 \leq p_1 \leq 1), \quad q_1 + q_2 = 1 \quad (0 \leq q_1 \leq 1).$$

Expresia $C(A, B)$ se mai scrie : $C(A, B) = x_{11}pq +$

$$+ x_{21}(1-p)q + x_{12}p(1-q) + x_{22}(1-p)(1-q). \quad (1)$$

Această expresie poate fi pusă sub forma :

$$C(A, B) = K(p - \alpha)(q - \beta) + V, \quad (2)$$

unde :

$$\alpha = \frac{x_{22} - x_{21}}{x_{11} - x_{21} + x_{22} - x_{12}}$$

$$\beta = \frac{x_{22} - x_{12}}{x_{11} - x_{21} + x_{22} - x_{12}}$$

$$V = \frac{x_{11}x_{22} - x_{12}x_{21}}{x_{11} - x_{21} + x_{22} - x_{12}}$$

Din relația (2) se vede că jucătorul A nu poate realiza un câștig mai mare decât V , iar jucătorul B nu poate realiza o pierdere mai mare decât V .

Câștigul V realizat poartă numele de valoarea jocului.

21.8. STRATEGII MIXTE OPTIME

În cazul unui joc $m \times n$ cu strategii mixte funcția $C(A, B)$ dată de relația : $C(A, B) = \sum_i^m \sum_j^n x_{ij} p_i q_j$ poate fi scrisă sub forma :

$$C(A, B) = q_1 \sum_{j=1}^m x_{j1} p_j + q_2 \sum_{j=1}^m x_{j2} p_j + \dots + q_n \sum_{j=1}^m x_{jn} p_j \text{ cu condiția } p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1.$$

Pentru ca această funcție să aibă o valoare maximă este necesar să avem :

$$\sum_{j=1}^m x_{j1} p_j = \sum_{j=1}^m x_{j2} p_j = \dots = \sum_{j=1}^m x_{jn} p_j = V, \quad (2)$$

unde prin V am notat valoarea comună a acestor expresii.

Să considerăm jocul caracterizat de matricea :

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}, \text{ avînd strategiile mixte.}$$

Condiția (2) se scrie :

$$\begin{cases} x_{11} p_1 + x_{21} p_2 = V \\ x_{12} p_1 + x_{22} p_2 = V \\ p_1 + p_2 = 1 \\ 0 \leq p_1 \leq 1; 0 \leq p_2 \leq 1. \end{cases}$$

Rezolvând acest sistem, obținem :

$$p_1 = \frac{x_{22} - x_{21}}{x_{11} + x_{22} - x_{21} - x_{12}}, \quad p_2 = 1 - p_1$$

Valoarea jocului V este dată de relația :

$$V = x_{11} p_1 + x_{21} p_2 = \frac{x_{11} x_{22} - x_{21} x_{12}}{x_{11} + x_{22} - x_{21} - x_{12}}.$$

Observație

Funcția $C(A, B)$ mai poate fi scrisă :

$$C(A, B) = p_1 \sum_{j=1}^n x_{1j} q_j + p_2 \sum_{j=1}^n x_{2j} q_j + \dots + p_n \sum_{j=1}^n x_{nj} q_j$$

$$p_1 + p_2 + \dots + p_m = 1.$$

Pentru ca această funcție să aibă o valoare maximă este necesar să avem :

$$\sum_{j=1}^n x_{1j} q_j = \sum_{j=1}^n x_{2j} q_j = \dots = \sum_{j=1}^n x_{mj} q_j = V,$$

în cazul jocului (2×2) se obțin condițiile :

$$\begin{cases} x_{11} q_1 + x_{21} q_2 = V' \\ x_{12} q_1 + x_{22} q_2 = V' \\ q_1 + q_2 = 1 \\ 0 \leq q_1 \leq 1; 0 \leq q_2 \leq 1. \end{cases}$$

Rezolvînd acest sistem se obține :

$$q_1 = \frac{x_{22} - x_{12}}{x_{11} - x_{21} + x_{22} - x_{12}} ; V' = \frac{x_{11}x_{22} - x_{21}x_{12}}{x_{11} - x_{21} + x_{22} - x_{12}}$$

Rezultă : $\boxed{V' = V}$.

Prin urmare obținem pentru valoarea jocului aceeași expresie.

Exemple :

Un joc este caracterizat prin matricea :

$A \backslash B$	B_1	B_2	x_i
A_1	1	2	1
A_2	-3	4	-3
y_j	1	4	

$\text{minimax } x_{ij} = 1$
 $\text{maximin } x_{ij} = 1$

Soluția jocului este (A_1, B_1) adică jucătorul A va alege strategia A_1 în timp ce jucătorul B strategia B_1 .

Un joc este caracterizat de matricea :

$A \backslash B$	B_1	B_2	x_i
A_1	$1(x_{11})$	$-1(x_{12})$	-1
A_2	$-2(x_{21})$	$1(x_{22})$	-2
y_j	1	1	

Soluția jocului este dată rezolvînd sistemul :

$$p_1 = \frac{x_{22} - x_{21}}{x_{11} + x_{22} - x_{12} - x_{21}} = \frac{1 + 2}{1 + 1 + 2 + 1} = \frac{3}{5},$$

valoarea jocului este :

$$V = x_{11}p_1 + x_{12}p_2 = \frac{3}{5} - \frac{2}{5} = \frac{1}{5}$$

21.9. INTERPRETAREA GEOMETRICĂ A SOLUȚIEI UNUI JOC DE DOUĂ PERSOANE

Să considerăm un joc de două persoane caracterizat de matricea :

A \ B	B	
	B_1	B_2
A_1	x_{11}	x_{12}
A_2	x_{21}	x_{22}

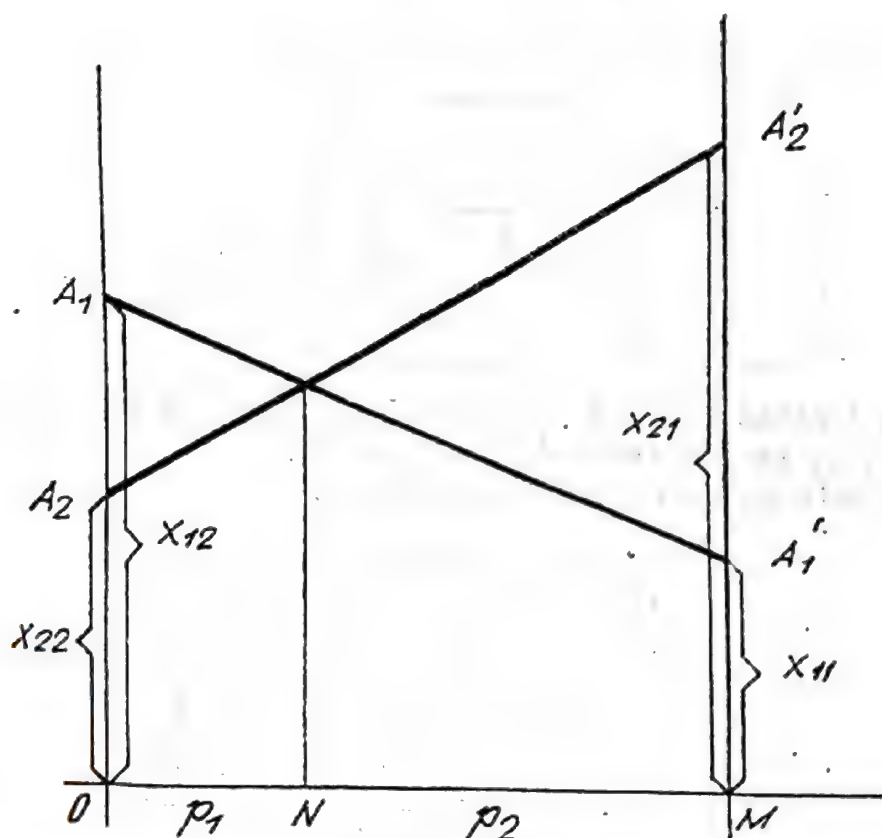


Fig. 21.1

Pe segmentul $OM = 1$, luăm două segmente de dreaptă $ON = p_1$ și $NM = p_2$. Avem evident relația : $ON + NM = OM$ sau $p_1 + p_2 = 1$.

Pe o dreaptă perpendiculară în punctul O pe OM luăm un segment $OA_1 = x_{12}$ și pe perpendiculara ridicată în punctul M , luăm un segment $MA'_1 = x_{11}$. Dreapta $A_1A'_1$ reprezintă strategia A_1 a jucătorului A . În mod analog pe dreapta perpendiculară pe OM în punctul O luăm segmentul $OA_2 = x_{22}$ și pe perpendiculara în punctul M luăm $MA'_2 = x_{21}$. Dreapta $A_2A'_2$ reprezintă strategia A_2 a jucătorului A .

Din ecuațiile :

$$\begin{cases} x_{11}p_1 + x_{12}p_2 = V \\ x_{21}p_1 + x_{22}p_2 = V \\ p_1 + p_2 = 1 \end{cases}$$

rezultă că punctul de intersecție al celor două drepte determină valoarea V a jocului cât și strategia mixtă optimă a jucătorului A .

21.10. EXERCIIU ȘI PROBLEME

1. Printre jocurile reprezentate de matricile următoare :

0	2
-1	4

(a)

5	0
0	2

(b)

3	1
-4	0

(c)

1	-1
-1	1

(d)

0	4
0	2

(e)

7	0
0	0

(f)

Să se determine acelea care sint strict determinate. În cazul în care jocul este strict determinat să se găsească strategiile optime ale fiecărui jucător.

Răspuns.

(a) este strict determinat și echitabil. Primul jucător va alege linia (1) iar cel de al doilea coloana (2);

(b) nu este strict determinat;

(c) este strict determinat dar nu este echitabil. Primul jucător va alege linia (1) iar jucătorul al doilea coloana (2);

2. Să se alcătuiască matricea unui joc care este strict determinat și echitabil; a unui joc care este strict determinat și neechitabil; a unui joc care nu este strict determinat.

3. Se consideră jocul reprezentat de matricea :

$$J = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -1 & a \end{bmatrix}$$

a) Să se arate că jocul este strict determinat, oricare ar fi valoarea lui a .

b) Să se găsească valoarea jocului.

Răspuns : $V = 2$.

4. Se consideră jocul reprezentat de matricea :

$$J = \begin{array}{|c|c|} \hline a & a \\ \hline c & d \\ \hline \end{array}$$

Să se arate că jocul este strict determinat oricare ar fi valorile lui a, c, d .

5. Se dau jocurile prin matricile :

1	2
3	4

(a)

1	0
-1	2

(b)

2	3
1	4

(c)

15	3
-1	2

(d)

7	-6
5	8

(e)

3	15
-1	10

(f)

Să se găsească valoarea jocului și strategiile optime.

6. Să se găsească condiția necesară și suficientă pentru ca jocul :

$$J = \begin{array}{|c|c|} \hline a & 0 \\ \hline 0 & b \\ \hline \end{array}$$

să fie strict determinat.

7. Să se găsească condițiile necesare și suficiente ca acest joc să nu fie strict determinat. Să se găsească strategiile optime pentru fiecare jucător și valoarea jocului dacă el nu este strict determinat.

Răspuns. a, b trebuie să fie amîndouă pozitive sau amîndouă negative :

$$p_1 = \frac{b}{a+b}; \quad p_2 = \frac{a}{a+b}$$

$$q_1 = \frac{b}{a+b}; \quad q_2 = \frac{a}{a+b}; \quad V = \frac{ab}{a+b};$$

8. Să se afle valoarea inferioară și valoarea superioară a jocului reprezentat în matricea :

$A \backslash B$	B_1	B_2
A_1	-1	1
A_2	1	8

9. Un joc caracterizat prin matricea :

$A \backslash B$	B_1	B_2	B_3
A_1	2	-3	4
A_2	-3	4	-5
A_3	4	-5	6

Să se afle valorile :

$$x = \max_i \min_j x_{ij}$$

$$y = \min_i \max_j x_{ij}$$

Să se compare aceste valori.

10. Să se afle strategiile minimax și maximin ale jocului reprezentat în matricea :

$A \backslash B$	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	0,4	0,5	0,9	0,3
A_2	0,8	0,4	0,3	0,7
A_3	0,7	0,6	0,8	0,9
A_4	0,7	0,2	0,4	0,6

11. Un joc este caracterizat prin matricea :

$A \backslash B$	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	1	2	-1	4
A_2	5	3	2	-1
A_3	3	2	2	-1
A_4	1	2	-1	4

Să se elimine în această matrice strategiile identice și cele dezavantajoase.

12. Să se determine soluția jocului caracterizat prin matricea :

$A \backslash B$	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	-1	3	2	-1
A_2	-2	-4	-1	-4
A_3	-5	3	2	-5
A_4	-1	3	2	0

13. Să se determine strategia optimală mixtă a jocului caracterizat de matricea :

$A \backslash B$	B_1	B_2
A_1	1	-1
A_2	-1	1

Determinați și câștigul mediu.

14. Să se determine strategia optimală mixtă și câștigul mediu al jocului caracterizat prin matricea :

$A \backslash B$	B_1	B_2
A_1	1	0
A_2	0	1/2

15. Să se reprezinte grafic strategiile jucătorilor A și B , ale jocului caracterizat de matrice și apoi să se determine grafic valorile aproximative ale probabilităților p_1, p_2 ale strategiilor jucătorului A .

$A \backslash B$	B_1	B_2
A_1	1	2
A_2	3	1/2

$$A \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ p_1 & p_2 \end{pmatrix}$$

16. Să se reprezinte grafic strategiile jucătorilor A și B din jocul caracterizat de matricea :

$A \backslash B$	B_1	B_2
A_1	1	8
A_2	5	3

și să se arate grafic că valoarea jocului este 3.

17. Să se reprezinte grafic strategiile jucătorilor A și B din jocul caracterizat de matricea dată și să se stabilească limita inferioară a câștigului.

$A \backslash B$	B_1	B_2
A_1	1	6
A_2	4	3

18. Să presupunem că o armată posedă trei tipuri de arme A_1, A_2, A_3 și că inamicul posedă trei tipuri de avioane B_1, B_2, B_3 . Scopul armatei este de a doborî avioanele B_1, B_2, B_3 , iar al adversarului de a feri avioanele de efectul acestor arme.

Probabilitățile de a atinge avioanele B_1, B_2, B_3 cu arma A_1 sînt respectiv 0,9 ; 0,4 ; 0,2. Probabilitatea de a atinge avioanele B_1, B_2, B_3 cu arma A_2 sînt 0,3 ; 0,6 ; 0,8 ; cu arma A_3 sînt 0,5 ; 0,7 ; 0,2. Se cere să se formuleze această problemă în termeni de teoria jocului și să se găsească strategia optimală.

19. Un aviator are două strategii posibile de zbor A_1 și A_2 . Strategia A_1 — zboară sus ; strategia A_2 — zboară jos. Artileria aeriană are două strategii posibile. Strategia B_1 — trage ; strategia B_2 — nu trage. Situația conflictuală dintre cei doi adversari este deschisă de matricea :

$Q \backslash p$	p_1	p_2
zboară sus Q_1	1	4
zboară jos Q_2	2	0

Să se afle valoarea jocului.

20. Un joc de două persoane A și B este caracterizat de matricea :

$A \backslash B$	B_1	B_2	B_3
A_1	2	-3	-1
A_2	-3	4	-3
A_3	4	-5	6

Să se determine strategiile optime ale jucătorilor A și B și valoarea jocului.

21. Două întreprinderi A și B fabrică trei feluri de produse, A_1 ; A_2 ; A_3 , respectiv B_1 ; B_2 ; B_3 . La un concurs de produse cele două întreprinderi schimbă produsele, astfel încât să obțină cel mai mare număr de puncte. Din situațiile anterioare se cunosc probabilitățile de a obține cel mai mare număr de puncte în concurs la toate produsele întreprinderii A față de întreprinderea B , date prin matricea :

$A \backslash B$	B_1	B_2	B_3
A_1	0,7	0,8	0,2
A_2	0,4	0,6	0,9
A_3	0,1	0,7	0,3

Să se determine frecvența cu care fiecare întreprindere trebuie să varieze exponatele, astfel încât să se asigure cel mai mare număr de puncte.

22. La o întrecere sportivă participă două școli. Școala A poate alinia echipele A_1 și A_2 , iar școala B poate alinia echipele B_1 și B_2 . Rezultatul întâlnirilor precedente a permis să se stabilească următoarea matrice de probabilități a victoriei școlii A .

$A \backslash B$	B_1	B_2
A_1	0,7	0,4
A_2	0,2	0,5

Să se determine frecvența cu care fiecare școală trebuie să varieze compoziția echipelor, astfel ca să asigure cel mai mare număr de victorii.

23. În figura alăturată sint reprezentate grafic strategiile a doi jucători. Să se determine aproximativ soluția optimală și valoarea jocului (fig. 21.2).

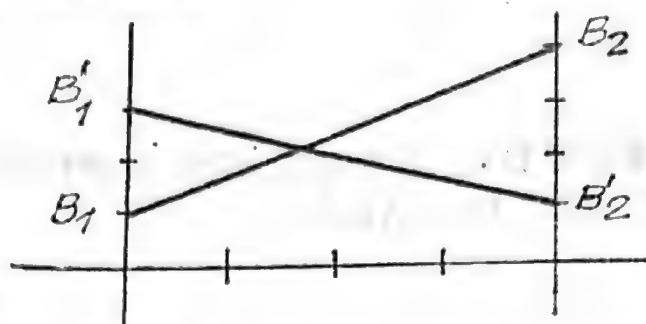


Fig. 21.2

24. În figura 21.2 sint reprezentate grafic strategiile a doi jucători. Să se determine valoarea jocului.

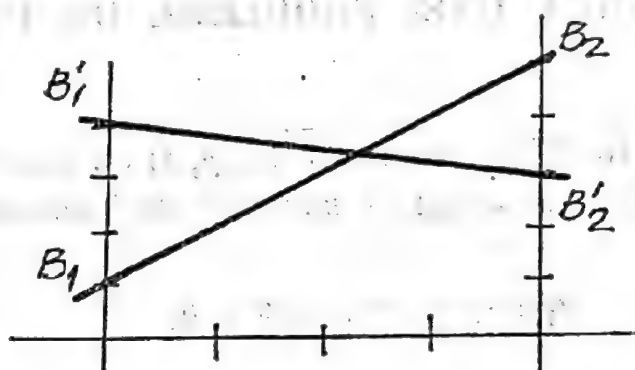


Fig. 21.3

25. Să se afle valorile strategiilor optimale ale jocurilor reprezentate prin graficele desenate în figura 21.4.

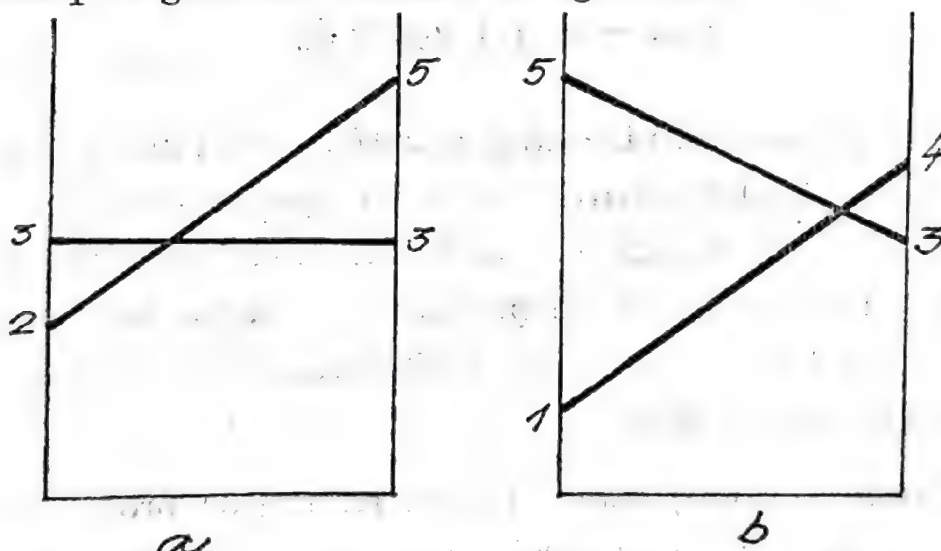


Fig. 21.4

26. Să se rezolve grafic jocurile caracterizate de matricile:

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Capitolul 22

METODE GRAFICE DE REZOLVARE A PROBLEMELOR DE PROGRAMARE LINIARĂ

22.1. FORMULAREA UNEI PROBLEME DE PROGRAMARE LINIARĂ

Se consideră în R^3 un vector $\vec{V}(x, y, z)$ cu coordonatele nenegative $x, y, z \geq 0$, care satisface sistemul de inecuații.

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z &\geq b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z &\geq b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z &\geq b_3 \end{aligned} \quad (1)$$

Se cere să se determine (x, y, z) astfel încât funcția $f = C_1x + C_2y + C_3z$ să aibă valoarea maximă, respectiv minimă.

Condițiile $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ împreună cu (1) formează restricțiile unei probleme de programare liniară, iar funcția $f = C_1x + C_2y + C_3z$ care trebuie maximizată, respectiv minimizată, se numește funcție obiectiv.

Vectorul $\vec{V}(x, y, z)$ care satisface restricțiile problemei se numește soluție posibilă a unei probleme de programare liniară. Dacă în plus soluția posibilă a unei probleme de programare liniară maximizează sau minimizează funcția obiectiv, se numește soluție optimă a problemei de programare liniară.

22.2. REZOLVAREA GRAFICĂ A PROBLEMELOR DE PROGRAMARE LINIARĂ CU DOUĂ NECUNOSCUTE

Problemele de programare liniară cu două necunoscute au următoarea formă :

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y \geq b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y \geq b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y \geq b_3 \\ \vdots \\ a_{i1}x + a_{i2}y \geq b_i \\ \vdots \\ a_{n1}x + a_{n2}y \geq b_n \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

Dintre necunoscutele x, y care verifică sistemul de restricții să se găsească acelea pentru care funcția obiectiv

$$f = c_1x + c_2y$$

are o valoare maximă, respectiv minimă.

Pentru rezolvare reprezentăm grafic dreptele de ecuații :

$$(D_i) \quad a_{i1}x + a_{i2}y - b_i = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Presupunem că a_{i1} și b_{i1} sînt luați în așa fel încît (D_i) taie axele de coordonate în partea lor pozitivă.

Fie Δ domeniul punctelor din plan ale căror coordonate (x, y) verifică simultan cele n inecuații la care se mai adaugă condițiile $x \geq 0$ și $y \geq 0$. Acest domeniu plan va fi poligonul convex al soluțiilor posibile ale problemei de programare liniară.

Fie $M(x_0, y_0)$ un punct din poligonul soluțiilor posibile ale problemei de programare liniară. Corespunzător punctului $M(x_0, y_0)$ obținem pentru funcția obiectiv f valoarea :

$$f_0 = c_1x_0 + c_2y_0.$$

Să considerăm dreapta (D_0) de ecuație :

$$c_1x + c_2y - f = 0.$$

Să notăm cu d distanța de la origine la dreapta (D) și atunci avem :

$$d = \frac{|-f|}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}} = \frac{f}{K},$$

unde

$$K = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}.$$

Prin urmare obținem : $f = Kd$.

Valoarea funcției obiectiv este direct proporțională cu distanța d . Rezultă că funcția f are o valoare maximă (sau minimă) dacă d are valoare maximă (sau minimă).

Să scriem funcția obiectiv sub forma :

$$y = -\frac{c_1}{c_2}x + \frac{f}{c_2}.$$

Deoarece f este variabil, ecuația :

$$y = -\frac{c_1}{c_2}x + \frac{f}{c_2}$$

reprezintă un fascicul de drepte paralele cu dreapta (D_0) de ecuație

$$y = -\frac{c_1}{c_2}x.$$

Aflarea soluției optime a unei probleme de programare liniară constă în a găsi punctul $M(x_0, y_0)$ care aparține domeniului soluțiilor posibile căruia îi corespunde ordonata la origine cea mai mare, respectiv cea mai mică.

Prin urmare rezolvarea grafică a unei probleme de programare liniară cu două necunoscute poate fi formulată astfel :

dintre toate punctele aparținând domeniului soluțiilor posibile să se găsească acelea ale căror coordonate (x, y) maximizează, respectiv minimizează, funcția liniară

$$f = c_1x + c_2y.$$

Pentru o valoare particulară d a funcției f , obținem ecuația $d = c_1x + c_2y$ al cărei grafic este o dreaptă în plan (fig. 22.1).

Cînd d variază în intervalul $(-\infty, +\infty)$, dreapta $c_1x + c_2y = d$ se deplasează rămînînd paralelă cu direcția dată.

Punînd condiția ca dreapta de ecuație $c_1x + c_2y = d$ să treacă prin vîrfurile A (fig. 22.2) obținem $d = d_1$ care este cea mai mică dintre toate distanțele de la origine la dreptele fasciculului care intersec-

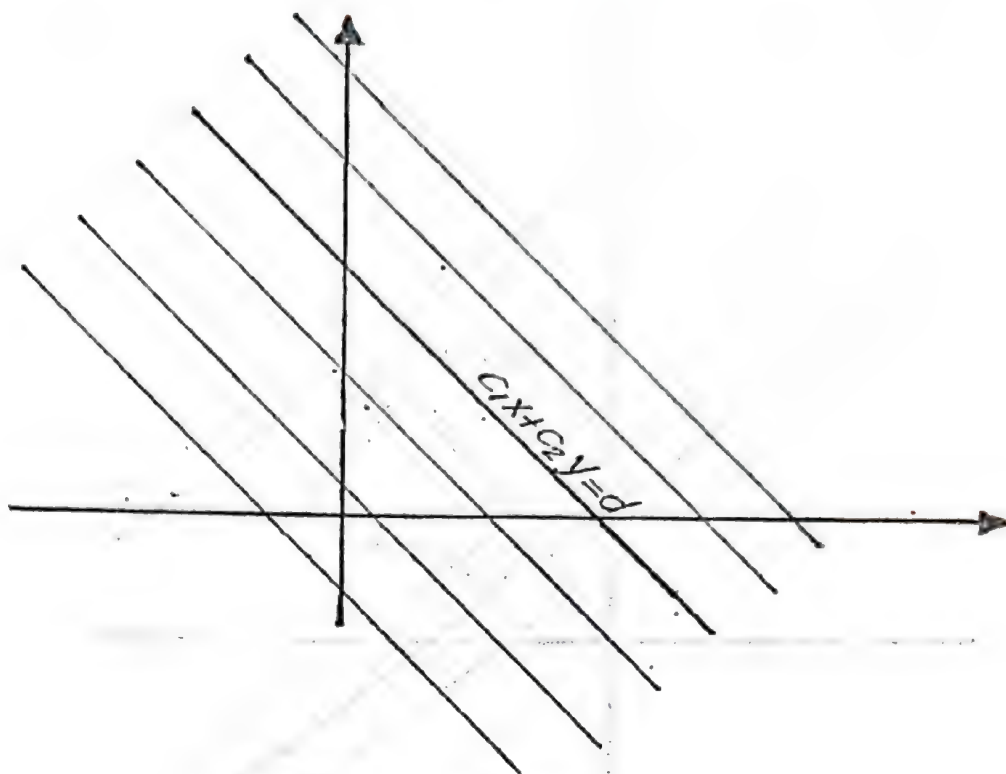


Fig. 22,1

tează domeniul soluțiilor. În mod asemănător dacă punem condiția ca punctul $B(x, y)$ să aparțină drepte de ecuație: $c_1x + c_2y = d$, obținem $d = d_2$, care este cea mai mare dintre distanțele de la originea O la dreptele fasciculului care intersectează poligonul soluțiilor posibile.

Este evident că cea mai mare valoare a funcției obiectiv $f = c_1x + c_2y$ este obținută pentru valorile (x, y) care satisfac restricțiile problemei de programare liniară și sînt coordonatele vîrfului B .

Prin urmare, pentru a rezolva grafic o problemă de programare liniară se construiește poligonul soluțiilor de bază, determinat de sistemul de inecuații (1) și apoi se rezolvă sistemul format din ecuațiile a două drepte la intersecția cărora se află vîrful cel mai apropiat și respectiv cel mai îndepărtat de dreapta de ecuație $c_1x + c_2y = 0$. Dacă una din laturile poligonului de bază este paralelă cu dreapta (D_0) a cărei ecuație este $c_1x + c_2y = 0$, (fig. 22.3), atunci problema admite o infinitate de soluții. Coordonatele tuturor punctelor segmentului AD minimizează valoarea funcției $f = c_1x + c_2y$ și coordonatele tuturor punctelor segmentului AB maximizează valoarea funcției $f = c_1x + c_2y$. În funcție de forma poligonului soluțiilor posibile sînt cazuri cînd funcția obiectiv nu are un maxim sau minim finit. În cazul unui domeniu deosebit (fig. 22.4) nu există puncte pentru care funcția obiectiv să atingă maximum.

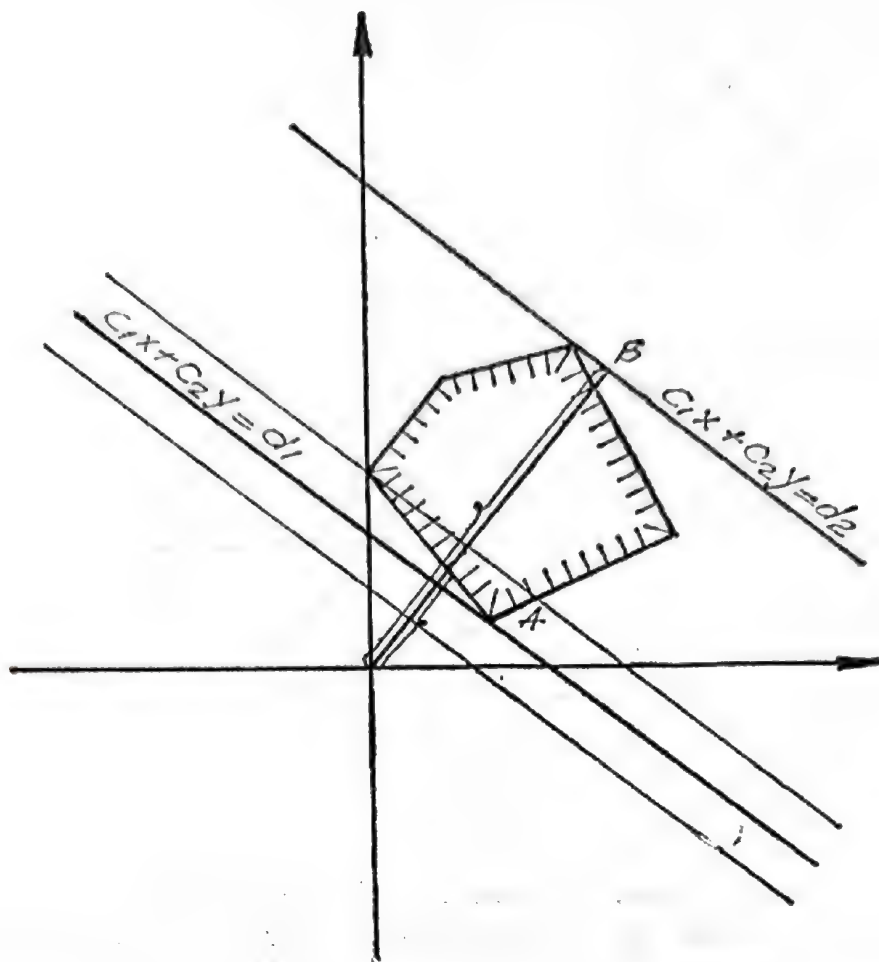


Fig. 22.2

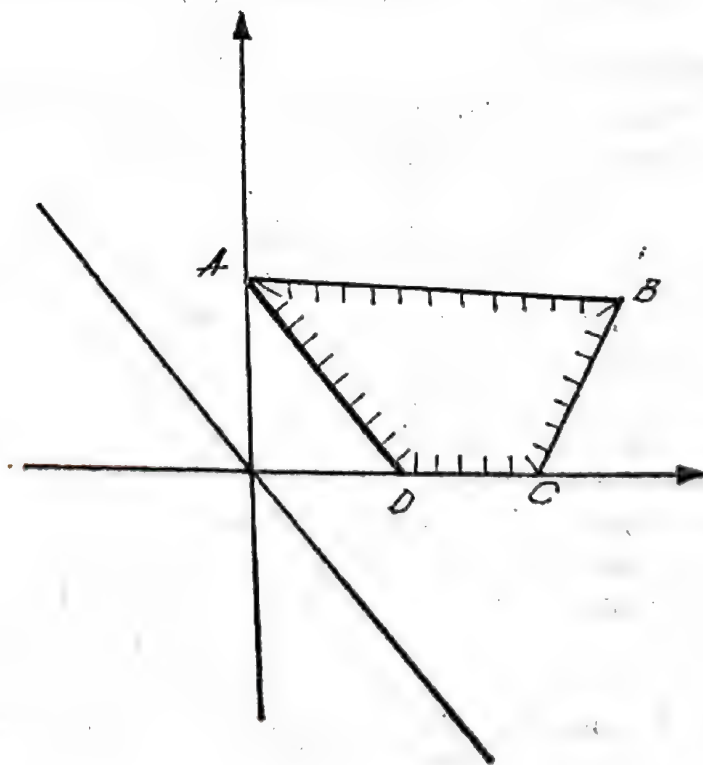


Fig. 22.3

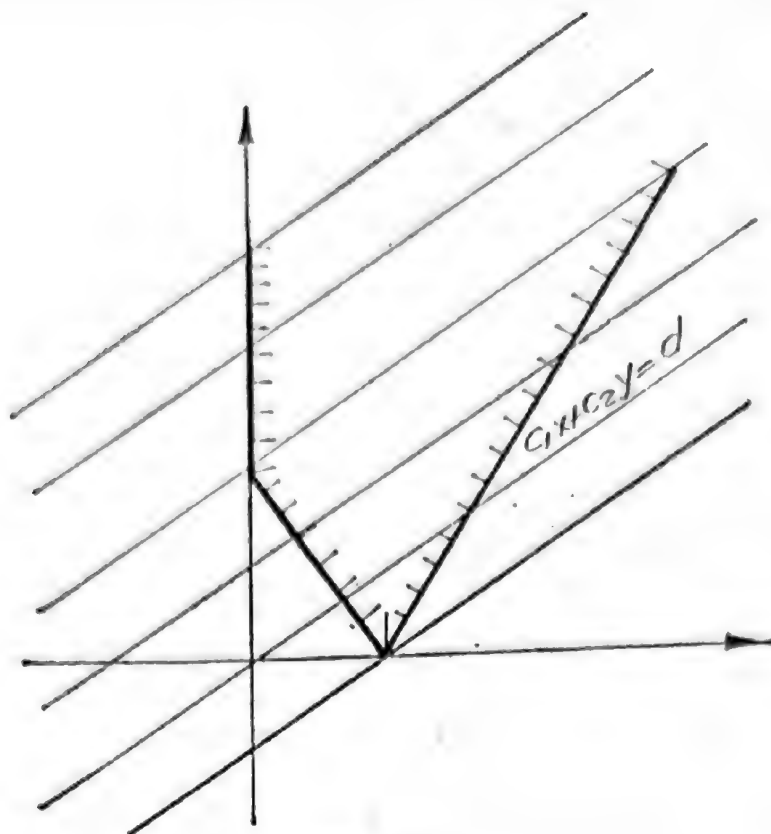


Fig. 22.4

22.3. EXERCITII ȘI PROBLEME

1. Să se reprezinte grafic mulțimile poligonale convexe care conțin soluțiile următoarelor inecuații simultane :

$$a) \begin{cases} 2x + 3y \leq 6 \\ x + y \leq 2 \\ x + y \leq 3 \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} y \geq 0 \\ x \geq 0 \\ x \leq 2 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 3x + 2y \geq 6 \\ 3x + 2y \leq 6 \end{cases}$$

$$e) \begin{cases} x - y \geq 0 \\ x + y \leq 0 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} 2x + y > 7 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

$$f) \begin{cases} 3x + 2y \geq 6 \\ 2x + 3y \geq 6 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

2. Se consideră mulțimile de puncte din plan ale căror coordonate verifică relațiile :

$$A = \{(x, y) / -4x + 5y \leq 3\}$$

$$B = \{(x, y) / -4x + 5y < 3\}$$

$$C = \{(x, y) / -4x + 5y = 3\}$$

$$D = \{(x, y) / -4x + 5y > 3\}$$

$$E = \{(x, y) / -4x + 5y \geq 3\}.$$

Să se arate că avem relațiile :

$$\overline{A} = D; \quad \overline{B} = E; \quad A = B \cup C; \quad E = D \cup C$$

$$A \cap B = \emptyset; \quad B \cap C = \emptyset; \quad C \cap D = \emptyset.$$

Mai puteți găsi și alte relații?

3. Să se găsească vîrfurile poligonului convex definit prin următoarele sisteme de inecuații:

$$a) \begin{cases} x \leq 3 \\ y \leq 2 \\ 2x + 3y \geq 0 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 2x + 3y \geq 6 \\ -x + y \leq 2 \\ x + y \leq 3 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} x \leq 2 \\ x \geq -2 \\ y \leq 3 \\ y \geq -3 \end{cases}$$

4. Să se arate că dreptele ale căror ecuații sînt :

$$2x + 3y + 9 = 0$$

$$-x + 3y + 6 = 0$$

$$x + 2y - 3 = 0$$

împart planul în șapte regiuni. Să se numereze aceste regiuni.

Pentru fiecare din aceste regiuni să se scrie cîte un sistem de inecuații pe care le verifică coordonatele punctelor din aceste regiuni.

5. Să se găsească maximul și minimul funcției :

$$f(x, y) = 2x + 5y - 17,$$

dacă (x, y) sînt coordonatele unui punct din poligonul convex determinat de inecuațiile simultane :

$$\begin{array}{ll} a) \begin{cases} x \leq 3 \\ y \leq 2 \\ 2x + 3y \geq 0 \end{cases} & b) \begin{cases} x \leq 2 \\ x \geq -2 \\ y \leq 3 \\ y \geq -3. \end{cases} \end{array}$$

6. Să se găsească vîrfurile poligonului convex dat de inecuațiile :

$$\begin{cases} 2x + y + 9 \geq 0 \\ -x + 3y + 6 \geq 0 \\ x + 2y - 3 \leq 0 \\ x + y \leq 0. \end{cases}$$

Să se găsească apoi valoarea maximă și valoarea minimă a funcției

$$f(x, y) = 7x + 5y - 3,$$

pentru coordonatele (x, y) ale punctelor M din interiorul acestui poligon.

7. Un poligon convex are vîrfurile punctele $(-1, 1)$; $(3, 6)$; $(0, -3)$ și $(1, 8)$. Să se găsească sistemul de inecuații care definesc acest poligon convex.

8. Într-o familie soțului nu-i plac preparatele culinare bogate în grăsimi, iar soției îi plac preparate cu grăsimi. Pentru prepararea unui meniu necesar hranei lor pentru cîteva zile, soțului îi trebuie cel puțin 0,300 kg carne fără grăsimi, iar soției 0,100 kg carne cu grăsimi. Cunoscînd că pentru prepararea acestui meniu se cumpără numai carne de porc care conține 40 % grăsimi și carne de vacă care conține 10 % grăsimi, să se construiască mulțimea convexă a punctelor din plan care reprezintă cumpărăturile (x greutatea carnei de porc; y greutatea carnei de vacă) ce satisfac nevoile alimentare minime ale celor doi soți.

Să se afle regimul cel mai economic știind că în kilogram de carne de porc costă 25 lei iar un kilogram de carne de vacă costă 28 lei.

9. Să se reprezinte grafic regiunea din plan în care inegalitățile liniare date mai jos sînt satisfăcute simultan și să se determine vîrfurile acestei regiuni:

$$\begin{cases} -2x_1 + 5x_2 - 10 \leq 0 \\ 2x_1 + x_2 - 6 \leq 0 \\ x_1 + 2x_2 - 2 \geq 0. \\ -x_1 + 3x_2 - 3 \leq 0. \end{cases}$$

10. Să se determine valoarea maximă a funcției $f = 2x + 5y$ cu condițiile:

$$x \leq 4(1 + m)$$

$$y \geq 3(1 + m)$$

$$x + y = 6$$

$$x \geq 0, \quad y \geq 0 \quad \text{unde } m \in R.$$

Ce valori poate lua m ?

11. O întreprindere dispune de 3 tipuri de minereuri: M_1 în cantitate de 800 t, M_2 în cantitate de 300 t, M_3 în cantitate de 400 t. Din aceste minereuri trebuie să se facă un amestec de cel puțin 500 t și care să conțină cel puțin 9 % aluminiu. Se știe că M_1 conține 5 % Al, M_2 10 %, iar M_3 15 %. Costul unitar (tonă) la M_1 este de 3 u. b., la M_2 de 2 u. b., iar la M_3 de 5 u. b. Cum trebuie făcut amestecul pentru a-l obține la un cost minim?

12. Unui oraș i s-au repartizat următoarele materiale pentru construcția de locuințe: 13 000 000 cărămizi, 150 000 saci cu ciment, 11 000 t plăci prefabricate. Se pot alege două tehnologii: prima, pentru o locuință sînt necesare 20 000 cărămizi, 100 saci cu ciment și 10 t prefabricate, la a doua 10 000 cărămizi, 300 saci cu ciment și 20 t de prefabricate. Cite locuințe urmează să se construiască cu fiecare tehnologie pentru a se obține un număr cît mai mare de locuințe? (Se cere modelul matematic și rezolvarea pe cale geometrică.)

13. Să se rezolve pe cale grafică :

$$[\min] f = 500x + 600y$$

$$\frac{x}{60} + \frac{y}{50} \geq 1$$

$$x + y \leq 60$$

$$x \geq 30, y \geq 20.$$

14. Să se rezolve pe cale grafică :

$$[\min] f = x_2 - x_1$$

$$-2x_1 + x_2 \leq 2$$

$$x_1 - 2x_2 \leq -8$$

$$x_1 + x_2 \leq 5$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

15. Să se rezolve pe cale geometrică :

$$[\min] f = x_2 - x_1$$

$$-2x_1 + x_2 \leq 2$$

$$x_1 - 2x_2 \leq 2$$

$$x_1 + x_2 \geq 5$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

16. Să se rezolve pe cale geometrică :

$$[\max] f = 3x_1 - 2x_2 + 4x_3$$

$$x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 3$$

$$3x_1 + 3x_2 + x_3 = 4$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

17. O întreprindere fabrică două tipuri de produse P_i ($i = 1; 2$) în cantitățile 30, respectiv 50 unități și dispune de trei resurse R_j ($j = 1, 2, 3$) în cantitățile de 50, 80, respectiv 40 unități.

Pentru realizarea produsului, P_1 , sînt necesare 10 unități din R_1 și 20 unități din R_2 , iar pentru realizarea lui P_2 sînt necesare cîte 10 unități din cele trei resurse.

Dacă beneficiul pe unitate de produs este de 300 lei respectiv 500 lei, să se determine numărul de unități de produse fabricate astfel încât beneficiul realizat să fie cât mai mare.

18. Pentru obținerea a două tipuri de produse $P_i (i = 1, 2)$, un atelier școală folosește patru resurse $R_j (j = 1, 2, 3, 4)$, avînd la dispoziție 20, 21, 10 respectiv 12 unități. O unitate din produsul P_1 , necesită 2 unități din R_1 , 3 unități din R_2 , 2 unități din R_3 , iar pentru realizarea unei unități din P_2 sînt necesare 5 unități din R_1 , 3 unități din R_2 și 4 unități din R_4 .

Știînd că fiecare unitate de produs P_i aduce un beneficiu de 200 lei, respectiv 400 lei, să se afle cîte unități din fiecare produs trebuie să se execute pentru obținerea unui beneficiu total maxim.

19. Să se afle cea mai mare valoare a funcției :

$$f = 3x_1 - 6x_2 + 2x_3,$$

cu condițiile : $3x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 6$

$$x_1 + 4x_2 + 3x_3 \leq 8.$$

20. Să se rezolve pe cale grafică :

$$(\max) \quad f = -x_1 + 2x_2$$

$$x_1 - 8x_2 \leq 10$$

$$x_1 + x_2 > 1$$

$$x_1 - 5x_2 \geq -5$$

$$3x_1 + 10x_2 \leq 30.$$

21. Să se afle cea mai mică valoare a funcției

$f = -2x_1 - x_2 + 3x_3$, ținînd seama de condițiile :

$$x_1 + x_2 \geq 2; \quad 3x_1 + x_2 \leq 6; \quad x_3 \leq 3.$$

22. Să se găsească cea mai mare valoare a funcției $f = 3x_1 + 3x_2$ ținînd seama de condițiile :

$$5x_1 + 3x_2 \leq 15; \quad 2x_1 + 6x_2 \leq 12; \quad 2x_1 \leq 6; \quad 2x_2 \leq 4; \quad x_1 \geq 4; \quad x_2 \geq 0.$$

23. Să se afle cea mai mică valoare a funcției

$$f = 10x_1 + 14x_2,$$

ținând seama de condițiile :

$$\begin{cases} 5x_1 + 7x_2 \geq 35 \\ 2x_1 \geq 4 \\ x_2 \geq 1. \end{cases}$$

24. Să se afle cea mai mare valoare a funcției

$$f = 8x_1 + 6x_2,$$

ținând seama de condițiile :

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \leq 12 \\ 7x_1 + 5x_2 \leq 35 \\ 0 \leq x_1 \leq 3 \\ 0 \leq x_2 \leq \frac{19}{3}. \end{cases}$$

Capitolul 23

EXERCII DE ANALIZĂ MATEMATICĂ

23.1. EXERCII REZOLVATE

Limite

1. Să se calculeze limita şirului :

$$S_n = \frac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n}}{1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{3^n}}.$$

Soluție

$$S_n = \frac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n}}{1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{3^n}} = \frac{\frac{1 - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}}}{\frac{1 - \frac{1}{3^{n+1}}}{1 - \frac{1}{3}}};$$

Prin urmare avem :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 - \frac{1}{3}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)}{\left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3^n}\right)} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{2}} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{3^n}} = \frac{4}{3}.$$

2. Să se calculeze :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + a + a^2 + \dots + a^n}{1 + b + b^2 + \dots + b^n}, \quad |a| < 1; |b| < 1.$$

Soluție

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + a + a^2 + \dots + a^n}{1 + b + b^2 + \dots + b^n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}}{\frac{1 - b^{n+1}}{1 - b}} = \\ &= \frac{1 - b}{1 - a} \cdot \frac{1 - \lim_{n \rightarrow \infty} a^{n+1}}{1 - \lim_{n \rightarrow \infty} b^{n+1}} = \frac{1 - b}{1 - a}. \end{aligned}$$

3. Se dă șirul cu termen general :

$$u_n = \frac{n(a-1) + 1}{n(a+2) - 1} \left(1 + \frac{1}{na}\right)^n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$.

Soluție

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(a-1) + \frac{1}{n}}{(a+2) - \frac{1}{n}} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{na}\right)^n \right]^{\frac{1}{a}} = \frac{a-1}{a+2} e^{\frac{1}{a}}.$$

4. Să se demonstreze că numărul e este irațional.

Demonstrație. Să presupunem că numărul e este rațional.

Fie $e = \frac{m}{n}$, unde m și n sînt două numere întregi.

Avem :

$$e = \frac{m}{n} = 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} + \frac{\theta_n}{n \cdot n!} \quad \text{unde } 0 < \theta_n < 1.$$

Înmulțind ambii membri ai acestei expresii cu $n!$, obținem :

$$m(n-1)! - n! \left(2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} \right) = \frac{\theta_n}{n}.$$

Aceasta ne duce la o contradicție, deoarece în membrul sting al acestei egalități avem un număr întreg, iar în partea dreaptă o fracție.

5. Să se calculeze :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \dots + \frac{2n-1}{2^n} \right)$$

Soluție. Să notăm :

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \dots + \frac{2n-1}{2^n}.$$

Atunci avem :

$$\begin{aligned} S_n - \frac{1}{2} S_n &= \frac{1}{2} + \left(\frac{3}{2^2} - \frac{1}{2^2} \right) + \left(\frac{5}{2^3} - \frac{3}{2^3} \right) + \dots + \\ &+ \left(\frac{2n-1}{2^n} - \frac{2n-3}{2^n} \right) - \frac{2n-1}{2^{n+1}} \end{aligned}$$

sau :

$$\begin{aligned} S_n &= 1 + 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^{n-2}} - \frac{2n-1}{2^n} = \\ &= 1 + \frac{1 - \frac{1}{2^{n-1}}}{1 - \frac{1}{2}} - \frac{2n-1}{2^n}. \end{aligned}$$

În felul acesta avem :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} S_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1 - \frac{1}{2^{n-1}}}{1 - \frac{1}{2}} - \frac{2n-1}{2^n} \right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + 2 - \frac{1}{2^{n-2}} - \frac{2n-1}{2^n} \right) = \end{aligned}$$

$$= 3 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^{n-2}} - 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2^n} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n}.$$

Se observă că :

$$\left| \frac{n}{2^n} \right| = \frac{n}{(1+1)^n} = \frac{n}{1 + n + \frac{n(n+1)}{2} + \dots + 1} < \frac{2n}{n(n-1)}.$$

Prin urmare : $0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2^n} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n-1}$, sau :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2^n} = 0. \text{ Deci } \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 3.$$

6. Să se calculeze : $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[8]{2} \dots \sqrt[2^n]{2})$.

Soluție. Expresia de sub semnul limitei se scrie astfel :

$$S_n = \sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[8]{2} \dots \sqrt[2^n]{2} = 2^{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n}} = 2^{1 - \frac{1}{2^n}} = \frac{2}{2^{\frac{1}{2^n}}}$$

Pentru $n > 2$ avem :

$$\begin{aligned} \left(2^{\frac{1}{2^n}}\right)^{2^n} &= \left[1 + \left(2^{\frac{1}{2^n}} - 1\right)\right]^{2^n} > \left[1 + \left(2^{\frac{1}{2^n}} - 1\right)\right]^n = 1 + n\left(2^{\frac{1}{2^n}} - 1\right) + \\ &+ \dots + \left(\frac{1}{2^{2^n}} - 1\right)^n > n\left(2^{\frac{1}{2^n}} - 1\right). \end{aligned}$$

Din relația : $0 < 2^{\frac{1}{2^n}} - 1 < \frac{2}{n}$, deducem că $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(2^{\frac{1}{2^n}} - 1\right) = 0$.

Prin urmare avem :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n}\right) = 2.$$

7. Să se arate că : $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0$

Soluție. Să demonstrăm mai întâi următoarea inegalitate : $n! > \left(\frac{n}{3}\right)^n$.

Vom folosi metoda inducției complete relativ la n .

Pentru $n = 1$, inegalitatea este evidentă. Să arătăm că dacă este adevărată pentru n , atunci va fi adevărată și pentru $n + 1$.

Pentru $n + 1$ vom avea :

$$(n + 1)! = n!(n + 1) > \left(\frac{n}{3}\right)^n (n + 1) = \left(\frac{n + 1}{3}\right)^{n+1} \frac{3}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}.$$

Avem :

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{n}{n} + \frac{n(n-1)}{2!} \cdot \frac{1}{n^2} + \dots + \frac{n(n-1) \dots (n-n+1)}{n!}.$$

$$\cdot \frac{1}{n^n} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \dots + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots$$

$$\dots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right) < 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \dots$$

$$+ \frac{1}{2^{n-1}} = 1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 3. \text{ Prin urmare avem :}$$

$$(n + 1)! > \left(\frac{n + 1}{3}\right)^{n+1}.$$

Din această relație deducem :

$$0 < \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} < \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\left(\frac{n}{3}\right)^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n} = 0 \text{ și deci } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0.$$

8. Fie $(a_n)_{n \geq 1}$, un șir de numere reale. Să se cerceteze legătura dintre convergența respectiv divergența șirurilor :

$$(a_n)_{n \geq 1}, ([a_n])_{n \geq 1} \text{ și } (a_n - [a_n])_{n \geq 1}.$$

Soluție. Șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ cu $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$, $(\forall) n \geq 1$ este convergent în timp ce șirurile $([a_n])_{n \geq 1}$ și $(a_n - [a_n])_{n \geq 1}$ sînt divergente.

Într-adevăr este suficient să observăm că :

$$\left[\frac{(-1)^n}{n} \right] = \begin{cases} 0, & \text{dacă } n \text{ par} \\ -1, & \text{dacă } n \text{ impar} \end{cases}$$

$$\frac{(-1)^n}{n} - \left[\frac{(-1)^n}{n} \right] = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{dacă } n \text{ par} \\ -\frac{1}{n} + 1, & \text{dacă } n \text{ impar.} \end{cases}$$

Șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ cu $a_n = \begin{cases} 1, & \text{dacă } n \text{ par} \\ \frac{3}{2}, & \text{dacă } n \text{ impar,} \end{cases}$ este divergent în timp ce șirul $([a_n])_{n \geq 1}$ este convergent deci $(a_n - [a_n])_{n \geq 1}$ este divergent.

Într-adevăr avem : $[a_n] = 1$, $(\forall) n \geq 1$.

Șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ cu $a_n = n + \frac{1}{n}$ $(\forall) n \geq 1$ este divergent, șirul $([a_n])_{n \geq 1}$ este divergent în timp ce șirul $(a_n - [a_n])_{n \geq 1}$ este convergent.

Într-adevăr $[a_n] = n$ și $a_n - [a_n] = \frac{1}{n}$ $(\forall) n \geq 1$.

Prin urmare nu există nici o legătură între convergența respectiv divergența șirurilor considerate.

9. Fie $(a_n)_{n \geq 1}$ un șir convergent de numere reale care are limita a și $(b_n)_{n \geq 1}$ un șir definit astfel : $b_n = b + (-1)^n \sin a_n$, $\forall n \geq 1$ cu $b \in \mathbb{R}$ fixat. Pentru ce valori ale lui a șirul $(b_n)_{n \geq 1}$ este convergent și care este în acest caz limita sa.

Indicație. Evident $b_{2n} \rightarrow b + \sin a$; $b_{2n+1} \rightarrow b - \sin a$, deci $(b_n)_{n \geq 1}$ este convergent $\Leftrightarrow \sin a = 0 \Leftrightarrow a = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$.

Limite. Continuitate.

Funcții.

1. Să se calculeze :

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - \sqrt[3]{\sin x}}{\cos^2 x}.$$

Soluție.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 x - \sin x}{\cos^2 x (\sqrt[3]{\sin^2 x + \sin x} \sqrt[3]{\sin x + \sin^2 x})} =$$

$$= \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x (\sin^2 x - 1)}{\cos^2 x} = \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} - \frac{\sin x \cos^2 x}{\cos^2 x} = -\frac{1}{3}.$$

2. Să se calculeze :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 3x}{x^2}.$$

Soluție.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1 + \cos x - \cos 3x + 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-(1 - \cos x) + (1 - \cos 3x)}{x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin^2 \frac{x}{2} + 2 \sin^2 \frac{3x}{2}}{x^2} = 2 \left[\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin^2 \frac{x}{2}}{\frac{x^2}{4}} \cdot \frac{1}{4} + \right.$$

$$\left. + \frac{9}{4} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \frac{3x}{2}}{\frac{9x^2}{4}} \right] = 2 \left(-\frac{1}{4} + \frac{9}{4} \right) = 4.$$

3. Să se calculeze :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{x - 1}.$$

Soluție.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt[3]{x} - 1)(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1)}{(x - 1)(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)}{(x - 1)(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1} = \frac{1}{3}$$

4. Să se calculeze : $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt[4]{x^4 + 1} - x)$.

Soluție. Avem :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[4]{x^4 + 1} - x &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt[4]{x^4 + 1} - x)(\sqrt[4]{x^4 + 1} + x)(\sqrt[4]{x^4 + 1} + x^2)}{(\sqrt[4]{x^4 + 1} + x)(\sqrt[4]{x^4 + 1} + x^2)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{(\sqrt[4]{x^4 + 1} + x)(\sqrt[4]{x^4 + 1} + x^2)} = 0. \end{aligned}$$

5. Să se studieze limita funcției :

$$f(x) = \frac{2x - \sin x}{\sqrt{1 - \cos x}}, \text{ în punctul } x = 0.$$

Soluție. Avem $f(x) = \frac{2x - 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{\sqrt{2 \sin^2 \frac{x}{2}}} = \frac{2x - 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{\sqrt{2} \left| \sin \frac{x}{2} \right|}$

$$\left| \sin \frac{x}{2} \right| = \begin{cases} -\sin \frac{x}{2}, & \text{dacă } x < 0 \\ \sin \frac{x}{2}, & \text{dacă } x > 0. \end{cases}$$

Prin urmare obținem :

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) &= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{2x - 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{\sqrt{2} \sin \frac{x}{2}} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{4 \frac{x}{2}}{\sqrt{2} \sin \frac{x}{2}} - \\ &- \frac{2}{\sqrt{2}} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \cos \frac{x}{2} = \frac{4}{\sqrt{2}} - \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}. \end{aligned}$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{2x - 2\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{-\sqrt{2} \sin \frac{x}{2}} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{4 \frac{x}{2}}{-\sqrt{2} \sin \frac{x}{2}} +$$

$$+ \frac{2}{\sqrt{2}} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \cos \frac{x}{2} = -\frac{4}{\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}.$$

6. Să se calculeze : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[m]{1 + \alpha x} \cdot \sqrt[n]{1 + \beta x} - 1}{x}$.

Soluție. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[m]{1 + \alpha x} \cdot \sqrt[n]{1 + \beta x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1 + \beta x} [\sqrt[m]{1 + \alpha x} - 1]}{x} +$

$$+ \frac{\sqrt[n]{1 + \beta x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[n]{1 + \beta x} \alpha \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[m]{1 + \alpha x} - 1}{\alpha x} +$$

$$+ \beta \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1 + \beta x} - 1}{\beta x} = \frac{\alpha}{m} + \frac{\beta}{n}.$$

7. Să se calculeze :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}{\sqrt{x + 1}}$$

Soluție.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}{\sqrt{x + 1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1 + \sqrt{\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^3}}}}}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}}} = 1$$

8. Să se calculeze :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^m - 1}{x^n - 1}$$

Soluție. Punind $x=1+t$ ($t \rightarrow 0$ pentru $x \rightarrow 1$), avem

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^m - 1}{x^n - 1} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(1+t)^m - 1}{(1+t)^n - 1} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 + C_m^1 t + C_m^2 t^2 + \dots + C_m^m t^m - 1}{1 + C_n^1 t + C_n^2 t^2 + \dots + C_n^n t^n - 1} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t(C_m^1 + C_m^2 t + \dots + C_m^m t^{m-1})}{t(C_n^1 + C_n^2 t + \dots + C_n^n t^{n-1})} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{C_m^1 + \theta(t)}{C_n^1 + \theta'(t)} = \\ &= \frac{m}{n}; \quad \theta(t) \rightarrow 0, \quad \theta'(t) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

9. Să se calculeze :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1+x} - 1}{x}, \quad (x \in R).$$

Soluție. Punind $\sqrt[n]{1+x} - 1 = t$, atunci $x = (1+t)^n - 1$.

Pentru $|x| < 1$, avem : $1 - |x| < \sqrt[n]{1+x} < 1 + |x|$, de unde rezultă că $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[n]{1+x} = 1$

Prin urmare avem : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1+x} - 1}{x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{(1+t)^n - 1}$.

Ținând seama de exercițiul precedent vom avea :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1+x} - 1}{x} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{(1+t)^n - 1} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{nt + \theta(t)} = \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

10. Să se calculeze : $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin mx}{\sin nx}$

Soluție. Să notăm $x = \pi + t$ ($t \rightarrow 0$) și atunci vom avea :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin mx}{\sin nx} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin (m\pi + mt)}{\sin (n\pi + nt)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(-1)^m \cdot \sin mt}{(-1)^n \cdot \sin nt} = \\ &= (-1)^{m-n} \cdot \frac{m}{n} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin mt}{mt} \cdot \frac{nt}{\sin nt} = (-1)^{m-n} \frac{m}{n}. \end{aligned}$$

11. Să se calculeze : $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{2x+1} \right)^{x^2}$.

Soluție. Aplicând formula : $\lim_{x \rightarrow x_0} u(x)^{v(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} e^{v(x) \ln u(x)}$, obținem :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{2x+1} \right)^{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{x^2 \ln \frac{x+2}{2x+1}}$$

cum însă $\ln \frac{(x+2)}{2x+1} < 0$, pentru $x \rightarrow \infty$ vom avea :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{2x+1} \right)^{x^2} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \frac{1 + \frac{2}{x}}{2 + \frac{1}{x}}} = e^{-\ln 2 \lim_{x \rightarrow \infty} x^2} = 0.$$

12. Să se calculeze : $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 + \sin x} \right)^{\frac{1}{\sin x}}$.

Soluție. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 + \sin x} \right)^{\frac{1}{\sin x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{1 + \sin x} \cdot \frac{1}{\sin x}} =$

$$= e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^3 \frac{x}{2}}{\cos x (1 + \sin x)}} = e^0 = 1.$$

13. Să se calculeze : $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 + \sin x} \right)^{\frac{1}{\sin^3 x}}$.

Soluție. Să notăm $u = \frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 + \sin x}$, $v = \frac{1}{\sin^2 x}$ și atunci avem:

$$(u - 1)v = \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{1 + \sin x} \cdot \frac{1}{\sin^2 x}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (u - 1)v = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\cos x(1 + \sin x)} \cdot \frac{1}{\sin^2 x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^2}{2} + \theta(x^2)}{\left[1 - \frac{x^2}{2} + \theta(x^2)\right](1 + x + \theta(x)) \cdot (x^2 + \theta(x^2))} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^2}{2} + \theta(x^2)}{x^2 + \theta'(x)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}; \quad (\theta(x^2); \theta'(x^2) \rightarrow 0).$$

Dar $\lim_{x \rightarrow 0} u^v = \lim_{x \rightarrow 0} \{[1 + (u - 1)]^{\frac{1}{u-1}}\}^{\lim_{x \rightarrow 0} (u-1)v} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} (u-1)v}.$

Prin urmare avem:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 + \sin x} \right)^{\frac{1}{\sin^2 x}} = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}.$$

14. Să se calculeze:

a) $\lim_{x \rightarrow 1-0} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{1-x}$; b) $\lim_{x \rightarrow 1+0} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{1-x}$

Soluție.

a) Să notăm $\frac{1}{1-x} = \operatorname{tg} t$. Atunci $\operatorname{tg} t \rightarrow +\infty$ pentru

$x \rightarrow 1-0$, astfel încât dacă $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$, atunci $t =$

$$= \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{1-x} \rightarrow \frac{\pi}{2}, \text{ pentru } x \rightarrow 1-0.$$

15. Să se determine a astfel încît funcția :

$$f(x) = \begin{cases} \cos x, & x > 0 \\ a(1 + \cos x), & x < 0 \end{cases}, \text{ să aibă limită în punctul } x = 0.$$

Soluție. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \cos x = 1.$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} a(1 + \cos x) = 2a$$

Din definiție rezultă că $f(x)$ are o limită dacă $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x)$

sau $2a = 1; a = \frac{1}{2}.$

16. Se dă funcția : $f(x) = \begin{cases} x + \frac{\sqrt{x^2}}{x} & \text{dacă } x \neq 0 \\ 1, & \text{dacă } x = 0 \end{cases}.$

Să se studieze continuitatea funcției în punctul $x = 0$.

Soluție.

$$\sqrt{x^2} = \begin{cases} x, & x > 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \left(x + \frac{x}{x} \right) = 1.$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \left(x - \frac{x}{x} \right) = -1.$$

Funcția nu este deci continuă în punctul $x = 0$.

DERIVATE

1. Se dă funcția : $f(x) = \sqrt{1 - \cos(2\pi \sin x)}.$

Să se studieze derivabilitatea funcției în punctul $x = 0$

Soluție.

$$\begin{aligned}\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \frac{f(x)}{x} = \frac{\sqrt{1 - \cos(2\pi \sin x)}}{x} = \frac{\sqrt{2 \sin^2(\pi \sin x)}}{x} = \\ &= \frac{\sqrt{2} |\sin(\pi \sin x)|}{x}.\end{aligned}$$

$$|\sin(2\pi \sin x)| = \begin{cases} \sin(\pi \sin x), & x > 0 \\ -\sin(\pi \sin x), & x < 0 \end{cases}$$

Prin urmare vom avea :

$$\begin{aligned}1) f'_d(0) &= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\sqrt{2} \sin(\pi \sin x)}{x} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\sqrt{2} \pi \sin(\pi \sin x)}{\pi \sin x} \cdot \frac{\sin x}{x} = \\ &= \pi \sqrt{2} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\sin(\pi \sin x)}{\pi \sin x} \cdot \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\sin x}{x} = \pi \sqrt{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f'_s(0) &= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{f(x)}{x} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \left[-\pi \sqrt{2} \cdot \frac{\sin(\pi \sin x)}{\pi \sin x} \cdot \frac{\sin x}{x} \right] = \\ &= -\pi \sqrt{2} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{\sin(\pi \sin x)}{\pi \sin x} \cdot \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{\sin x}{x} = -\pi \sqrt{2}\end{aligned}$$

Prin urmare funcția nu este derivabilă în punctul $x = 0$.

$$2. \text{ Se consideră funcția } f(x) = \begin{cases} \sin^3 \pi |x|, & \text{pentru } x \neq 0 \\ 0, & \text{pentru } x = 0 \end{cases}$$

Să se studieze continuitatea și derivabilitatea funcției în punctul $x = 0$.

Soluție. Studiem mai întâi continuitatea.

$$1) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\sin^3 \pi x}{\pi^3 x^3} \cdot \pi^3 x^3 = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \left(\frac{\sin \pi x}{x} \right)^3 \cdot \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \pi^3 x^3 = 0$$

$$2) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} - \frac{\sin^3 \pi x}{\pi^3 x^3} \cdot \pi^3 x^3 = - \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \left(\frac{\sin \pi x}{\pi x} \right)^3 \cdot \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} (\pi^3 x) = 0.$$

Funcția este prin urmare continuă.

Derivabilitatea :

$$f'_d(0) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{f(0) - f(x)}{0 - x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^3(\pi x)}{\pi^3 x^3} \cdot \pi^3 x^2 = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\sin(\pi x)}{\pi x} \right]^3 \cdot \pi^3 x^2 = 0.$$

$$f'_s(0) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{f(0) - f(x)}{0 - x} = - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^3(\pi x)}{\pi^3 x^3} \cdot \pi^3 x^2 = - \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\sin \pi x}{\pi x} \right]^3 \cdot \pi^3 x^2 = 0.$$

Funcția este derivabilă în punctul $x = 0$.

3. Să se determine valorile a și b pentru ca funcția :

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 + b, & \text{dacă } x \in (-2, 2] \\ 2ax^3 + 11a, & \text{dacă } x \in (2, +\infty) \end{cases}, \text{ să fie continuă și deriva-}$$

bilă pe intervalul $(-2, +\infty)$.

Soluție.

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (2x^2 + b) = 8 + b.$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (2ax^3 + 11a) = 16a + 11a = 27a.$$

Pentru ca funcția să fie continuă în punctul $x = 2$ este necesar și suficient să fie satisfăcută relația :

$$8 + b = 27a.$$

$$f'_s(2) = \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} \frac{2x^2 - 8}{x - 2} = \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} 2(x + 2) = 8.$$

$$\begin{aligned} f'_d(2) &= \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} \frac{2ax^3 - 16a}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2a(x^3 - 8)}{x - 2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} 2a(x^2 + 2x + 4) = 24a. \end{aligned}$$

Pentru ca funcția să admită o derivată în punctul $x = 2$, trebuie să fie satisfăcută egalitatea :

$$f'_d(2) = f'_s(2),$$

sau $24a = 8 \Leftrightarrow a = \frac{1}{3}$ și din relația $b + 8 = 27a$, rezultă $b = 1$.

4. Să se calculeze derivata funcției :

$$f(x) = \begin{cases} 1-x, & \text{pentru } -\infty < x < 1 \\ (1-x)(2-x), & \text{pentru } 1 \leq x \leq 2 \\ -(2-x), & \text{pentru } 2 < x < \infty \end{cases}$$

Soluție.

Funcțiile $1-x$; $(1-x)(2-x)$ și $-(2-x)$ sînt derivabile pe domeniile corespunzătoare $-\infty < x < 1$; $1 < x < 2$ și $2 < x < \infty$.

Prin urmare avem :

$$f'(x) = \begin{cases} -1, & \text{pentru } -\infty < x < 1 \\ 2x - 3, & \text{pentru } 1 < x < 2 \\ 1, & \text{pentru } 2 < x < +\infty \end{cases}$$

Să calculăm acum derivatele la dreapta și la stînga în punctele $x = 1$, $x = 2$.

Din definiție avem :

$$f'_d(1) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{(1-x)(2-x)}{x-1} = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} (x-2) = -1$$

$$f'_s(2) = \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} \frac{(1-x)(2-x)}{x-2} = \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} (x-1) = 1.$$

$$f'_d(2) = \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} \frac{-(2-x)}{x-2} = 1$$

Prin urmare avem :

$$f'_s(1) = f'_d(1) = f'(1)$$

$$f'_s(2) = f'_d(2) = f'(2)$$

Derivata poate fi scrisă sub forma :

$$f'(x) = \begin{cases} -1, & \text{pentru } -\infty < x < 1 \\ 2x - 3, & \text{pentru } 1 \leq x \leq 2 \\ 1, & \text{pentru } 2 < x < \infty \end{cases}$$

5. Fie funcția : $f(x) = \begin{cases} \frac{3-x^2}{2}, & \text{pentru } 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{x}, & \text{pentru } 1 < x < \infty \end{cases}$

Să se determine valoarea lui c , din formula creșterilor finite $f(x+h) - f(x) = hf'(c)$, aplicată funcției $f(x)$ pe intervalul $[0,2]$.

Soluție.

Va trebui să studiem la început derivabilitatea funcției $f(x)$ în punctul $x = 1$.

Din definiția derivatei avem :

$$f'_s(1) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{\frac{3-x^2}{2} - 1}{x-1} = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{1-x^2}{2(x-1)} = - \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{x^2-1}{2(x-1)} = -1$$

$$f'_a(1) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{\frac{1}{x} - 1}{x - 1} = - \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{x(x - 1)} = -1.$$

Prin urmare funcția f este derivabilă pe intervalul $[0, 2]$.
Aplicînd formula creșterilor finite funcției f pe intervalul $[0, 2]$,
obținem :

$$f(2) - f(0) = 2f'(c); \quad 0 < c < 2$$

$$\text{Dar } f(2) = \frac{1}{2}, \quad f(0) = \frac{3}{2}$$

$$f'(x) = \begin{cases} -x & \text{pentru } 0 \leq x \leq 1 \\ -\frac{1}{x^2} & \text{pentru } 1 < x < 2 \end{cases}$$

$$\text{Atunci obținem : } f'(c) = \begin{cases} -2c, & \text{pentru } 0 < c \leq 1 \\ -\frac{2}{c^2}, & \text{pentru } 1 < c < 2 \end{cases}$$

$$\text{de unde rezultă că : } c_1 = \frac{1}{2}; \quad c_2 = \sqrt{2}.$$

6. Se consideră o funcție continuă $f(x)$, avînd proprietatea că

$$f(a) = 0; \quad f(b) = 0.$$

$$\text{Să notăm } \varphi(x) = (x - a)(x - b) \frac{f(c)}{(c - a)(c - b)}.$$

Aplicînd teorema lui Rolle, funcțiilor $f(x) - \varphi(x)$ și $f'(x)$, arătați că
există o valoare γ pe intervalul (a, b) astfel ca să fie satisfăcută
relația :

$$f'(c) = (c - a)(c - b) \frac{f''(\gamma)}{2}.$$

Soluție. Să notăm : $F(x) = f(x) - \varphi(x) = f(x) - (x - a)(x - b)$

$$\frac{f(c)}{(c - a)(c - b)}$$

Avem :

$$F'(x) = f'(x) - (2x - a - b) \cdot \frac{f(c)}{(c-a)(c-b)}$$

$$F''(x) = f''(x) - \frac{2f(c)}{(c-a)(c-b)}.$$

Deoarece $F(a) = F(c) = F(b) = 0$; după teorema lui Rolle există un număr α ($a < \alpha < c$) și un număr β ($c < \beta < b$) astfel încât să avem :

$$F'(\alpha) = 0; \quad F'(\beta) = 0; \quad F''(\gamma) = 0, \quad \alpha < \gamma < \beta.$$

Prin urmare : $f''(\gamma) - \frac{2f'(c)}{(c-a)(c-b)} = 0.$

7. Să se calculeze : $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^x - 1}{\ln x - x + 1}.$

Soluție. Avem cazul de excepție $\frac{0}{0}$. Aplicând regula lui l'Hospital obținem :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^x - 1}{\ln x - x + 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^x(\ln x + 1)}{\frac{1}{x} - 1} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{x+1} (\ln x + 1)}{1 - x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \left[1 - x^{x+1}(\ln x + 1) \left(1 + \frac{1}{x} + \ln x \right) - x^2 \right] = -2$$

8. Să se calculeze : $Z = \lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{1-x}}.$

Soluție. Avem cazul de excepție 1^∞ .

Folosind formula $u^v = e^{v \ln u}$ ($u > 0, v > 0$),

Obținem :

$$u = e^{\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{1-x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 1} \left(-\frac{1}{x}\right)} = e^{-1}.$$

9. Să se afle intervalul de monotonie al funcției :

$$f(x) = x + |\sin 2x|.$$

Soluție. Ținând seama de definiția funcției modul, avem :

$$f(x) = \begin{cases} x + \sin 2x, & \text{pentru } k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x - \sin 2x, & \text{pentru } \pi\left(k + \frac{1}{2}\right) < x < \pi + k\pi \\ \frac{k\pi}{2}, & \text{pentru } x = \frac{k\pi}{2}, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{cases}$$

Derivata funcției $f(x)$ este :

$$f'(x) = \begin{cases} 1 + 2\cos 2x, & \text{dacă } k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi \\ 1 - 2\cos 2x, & \text{dacă } \frac{\pi}{2} + k < x < \pi + k\pi. \end{cases}$$

Rezolvând sistemul de inecuații :

$$\begin{cases} 1 + 2\cos 2x > 0 \\ k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases} \quad \begin{cases} 1 - 2\cos 2x > 0 \\ \frac{\pi}{2} + k\pi < x < \pi + k\pi, \end{cases} \quad (1)$$

se deduce că $f'(x) > 0$, pentru $k\pi < x < \frac{\pi}{3} + k\pi$ și pentru

$$\begin{aligned} \pi\left(k + \frac{1}{2}\right) < x < \frac{\pi}{2} + \pi\left(k + \frac{1}{2}\right) \text{ sau } x \in \left(k\pi, k\pi + \frac{\pi}{3}\right) \cup \\ \cup \left(\pi k + \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + k\pi + \frac{k}{2}\right) \end{aligned}$$

Soluțiile sistemului de inecuații (1) pot fi reprezentate pe cercul trigonometric.

Soluția celor două sisteme este : $x \in \left(\frac{k\pi}{2}, \frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2} \right)$

Prin urmare funcția $f(x)$ este crescătoare pe intervalul :

$$\left(\frac{k\pi}{2}, \frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2} \right) \quad (k = 0, \pm 1, \dots)$$

Pe intervalul $\left(\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{3}, \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right)$ funcția $f(x)$ este descrescătoare deoarece pe aceste intervale $f(x) < 0$.

10. Să se stabilească asimptotele funcției

$$f(x) = \frac{x^{1+x}}{(1+x)^x}, \quad (x > 0).$$

Soluție. Ecuația asimptotei oblice are forma $y = kx + b$. Trebuie să aflăm pe k .

$$\text{Avem } k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^x}{(x+1)^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x} = \frac{1}{e}.$$

Pentru determinarea lui b , avem

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow \infty} (y - kx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{x^{x+1}}{(1+x)^x} - \frac{x}{e} \right] = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} x \left[\frac{1}{\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x} - \frac{1}{e} \right] = \frac{1}{e^2} \lim_{x \rightarrow \infty} x \left[e - \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \right] = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{e^2} \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t > 0}} \left[\frac{e - (1+t)^{\frac{1}{t}}}{t} \right] = \frac{1}{e^2} \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t > 0}} (1+t)^{\frac{1}{t}} \left[\frac{1}{t(1+t)} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{t^2} \ln(1+t) \right] = - \frac{1}{e^2} \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t > 0}} \frac{t - (1+t) \ln(1+t)}{t^2(1+t)} =$$

$$= - \frac{1}{e^2} \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t > 0}} \frac{-\ln(1+t)}{2t + 3t^2} = \frac{1}{2e}.$$

Ecuatia asimptotei este $y = \frac{1}{e} x + \frac{1}{2e}$.

11. Să se construiască graficul funcției

$$y = \sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x^2 + 1}.$$

Soluție.

1) Funcția dată este continuă, definită și negativă, pentru orice x .

Funcția este simetrică față de axa Oy pentru că $f(x) = f(-x)$.

$$2) \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \frac{-1}{\sqrt[3]{x^4} + \sqrt[3]{x^2(x^2 + 1)} + \sqrt[3]{(x^2 + 1)^4}} = 0.$$

Funcția dată nu are alte asimptote.

$$3) f'(x) = \frac{2[(x^2 + 1)^{2/3} - x^{4/3}]}{3x^{1/3} (x^2 + 1)^{2/3}}$$

Pentru $x = 0$, $f(0) = -1$ (minim).

$$4) f''(x) = -\frac{2}{9} x^{-\frac{4}{3}} (x^2 + 1)^{-\frac{5}{3}} [(x^2 + 1)^{\frac{5}{3}} + 3x^{\frac{4}{3}} - x^{\frac{10}{3}}] < 0$$

5) Tabelul de variație

x	$-\infty$	0					$+\infty$				
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	0	\searrow		-1		\nearrow		0			

6) Graficul funcției (Lăsăm în seama cititorului reprezentarea grafică).

Calculul integral

1. Să se demonstreze că dacă $\int f(x) dx = F(x) + C$,

atunci $\int f(ax+b) dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C$ ($a \neq 0$).

Demonstrație. În mod evident $f(ax+b)dx = \frac{1}{a} f(ax+b) d(ax+b)$.

($a \neq 0$)

Aplicând metoda schimbării de variabile obținem:

$$\begin{aligned} \int f(ax+b) dx &= \frac{1}{a} \int f(ax+b) d(ax+b) = \frac{1}{a} \int f(u) du = \\ &= \frac{1}{a} F(u) + C, \text{ unde } u = ax+b. \end{aligned}$$

2. Să se calculeze integrala:

$$I = \int \sqrt[3]{1-4x} dx$$

Soluție. Folosind rezultatul precedent avem:

$$\int u^{\frac{1}{3}} = \frac{3}{4} u^{\frac{4}{3}} + C.$$

$$\begin{aligned} \text{Prin urmare: } \int (1-4x)^{\frac{1}{3}} dx &= -4 \cdot \frac{3}{4} (1-4x)^{\frac{4}{3}} + C = - \\ &= -3(1-4x)^{\frac{4}{3}} + C = -3(1-4x) \sqrt[3]{1-4x} + C. \end{aligned}$$

3. Să se calculeze integrala:

$$\int \frac{dx}{1 + \sin x}.$$

Soluție.

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} &= \int \frac{d\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{2 \cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)} = - \int \frac{d\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)} = \\ &= -\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) + C \left(x \neq -\frac{\pi}{4} + 2k\right) \end{aligned}$$

4. Să se calculeze integrala: $\int \frac{dx}{x \sqrt{x^2 + 1}}.$

Soluție. Pentru $x \neq 0$, avem
$$\int \frac{dx}{x \sqrt{n^2 + 1}} = \int \frac{dx}{x |x| \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} =$$
$$= \int - \frac{d\left(\frac{1}{|x|}\right)}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{|x|}\right)^2}} = -\ln\left(\frac{1}{|x|} + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}\right) +$$
$$+ C = -\ln\left|\frac{1 + \sqrt{x^2 + 1}}{x}\right| + C.$$

5. Să se calculeze integrala $\int \frac{x^2 - 1}{x^4 + 1} dx$.

Soluție. Din egalitatea

$$\frac{x^2 - 1}{x^4 + 1} dx = \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{x^2 + \frac{1}{x^2}} dx = \frac{d\left(x + \frac{1}{x}\right)}{\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2},$$

avem

$$\int \frac{x^2 - 1}{x^4 + 1} dx = \int \frac{d\left(x + \frac{1}{x}\right)}{\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2} =$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{x + \frac{1}{x} - \sqrt{2}}{x + \frac{1}{x} + \sqrt{2}} \right| + C =$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \frac{x^2 - x\sqrt{2} + 1}{x^2 + x\sqrt{2} + 1} + C.$$

23.2. EXERCIIU PROPUSE

ȘIRURI

1. Folosind metoda inducției, să se demonstreze inegalitățile :

$$\frac{1}{n+1} < \ln \frac{n+1}{n} < \frac{1}{n} \text{ și apoi considerînd șirurile :}$$

$$a) a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n$$

$$b) b_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n},$$

să se arate că sînt convergente și $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \ln 2$

2. Să se demonstreze inegalitățile :

$$\sqrt[n]{a^{n-m}} < \frac{m}{n} \frac{b-a}{\sqrt[n]{b^m} - \sqrt[n]{a^m}} < \sqrt[n]{b^{n-m}},$$

unde $a, b, m, n \in \mathbb{R}_+$; $a < b, m < n$.

3. Să considerăm : $U_1 = a, U_2 = b, U_3 = \frac{1}{2}(U_1 + U_2) \dots$

$$U_n = \frac{1}{2}(U_{n-1} + U_{n-2}) \dots$$

a) Să se arate că termenii $V_n = U_n - U_{n-1}$ formează o progresie geometrică.

b) Să se afle U_n în funcție de a, b, n și apoi $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n$.

4. Șirul de numere reale : $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$ satisface condiția :

$$1 \leq a_0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_n \leq \dots$$

Șirul $b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$ este definit prin

$$b_n = \sum_{k=1}^n \left(1 - \frac{a_{k-1}}{a_k}\right) \frac{1}{\sqrt[n]{a_k}}$$

Să se arate că $0 \leq b_n \leq 2$ pentru orice n natural.

Fără a se aplica regula lui l'Hospital, să se calculeze limitele :

$$5. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2} - (a+b)} \frac{\cos(a+b)\sin(a+x) - \cos b \sin x}{\cos(a+b+x)};$$

$$6. \lim_{x \rightarrow b} \frac{\sin(a+x) \cos x - \sin(a+b) \cos b}{\sin(x-b)};$$

$$7. \lim_{a \rightarrow 1} \frac{(a^n - 1)(a^{n-1} - 1) \dots (a^{n-p+1} - 1)}{(a-1)(a^2 - 1) \dots (a^n - 1)}$$

$$8. \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{2x^2 - 3x + 5} - \sqrt[3]{2x^2 + 3x + 1})$$

$$9. \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a} + \sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2 - a^2}}$$

$$10. \lim_{x \rightarrow \infty} [\sqrt[3]{(x+m)(x+n)(x+p)} - x]$$

$$11. \lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{3}{2}} (\sqrt{x^3 + 1} - \sqrt{x^3 - 1});$$

$$12. \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x});$$

$$13. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \sqrt{\cos 2x} \sqrt[3]{\cos 3x}}{x^2};$$

14. Să se determine constantele a, b , astfel încît :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x + 1} - ax - b \right) = 0;$$

15. Să se determine λ și μ astfel încît :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{1 - x^3} - \lambda x - \mu) = 0;$$

$$16. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{nx^{n+2} - (n+2)x^{n+1} + (n+2)x - n}{(x-1)^3};$$

$$17. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg}(a+x) - \operatorname{arctg}(a-x)}{\operatorname{tg}(a+x) - \operatorname{tg}(a-x)};$$

$$18. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x-2)e^x + x + 2}{x(1 - \cos x)};$$

$$19. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \sin x + \ln(1-x) + x - 1}{x(x - \sin x)};$$

$$20. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(\cos \pi x + 2) + a(x-1)^2}{\ln(2 - 2x^n + x^{2n})};$$

$$21. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + a}{x^2 + b} \right)^{x^2 + c}; \quad a \neq b$$

$$22. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{nx}{n^2 - 1} \right)^n;$$

$$23. \lim_{x \rightarrow 0} (e^x + x)^{\frac{1}{x}};$$

$$24. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos x}{\cos 2x} \right)^{\frac{1}{x^2}};$$

$$25. \lim_{x \rightarrow a} \left(2 - \frac{x}{a} \right)^{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2a}}; \quad 26. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1 - \sin \frac{\pi}{x}}{1 + \sin \frac{\pi}{x}} \right)^x$$

$$27. \lim_{x \rightarrow 1} (1 + \sin \pi x)^{\operatorname{ctg} \pi x}; \quad 28. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1 + e^{-x}}{1 - e^{-x}} \right) e^x;$$

$$29. \lim_{x \rightarrow 0} (\ln x)^{\frac{1}{x-e}}; \quad 30. \lim_{x \rightarrow 0} \left[\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - x \right) \right]^{\operatorname{ctg} \pi x}$$

$$31. \lim_{x \rightarrow \infty} [x(e^{\frac{1}{x}} - 1)]; \quad 32. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg} \frac{x}{x+1} \right)^{\frac{1}{x}};$$

$$33. \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\ln(1+x)^{1+x}}{x^2} - \frac{1}{x} \right]; \quad 34. \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e} \right]^{\frac{1}{x}}$$

35. a) Să se demonstreze identitatea:

$$\operatorname{tg}^2 a \operatorname{tg} 2a = \operatorname{tg} 2a - 2 \operatorname{tga}$$

b) Să se calculeze cu ajutorul ei, suma:

$$S_n = \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} \operatorname{tg} x + 2 \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2^2} \operatorname{tg} \frac{x}{2} + \dots + 2^{n-1} \operatorname{tg} \frac{x}{2^n} \operatorname{tg} \frac{x}{2^{n-1}}$$

c) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 0} S_n$;

Să se calculeze limitele șirurilor:

$$36. u_n = \frac{1}{2^n} + \frac{2n}{3n+1};$$

$$37. u_n = \frac{1}{n} \cos n^3 - \frac{3n}{6n+1};$$

$$38. u_n = \frac{3n^2 + 2}{5n^2 - 1};$$

$$39. u_n = \frac{n^2 + 1}{(n+1)^2}; \quad u_n = \frac{1 + 2 + \dots + n}{n^2};$$

$$40. u_n = \frac{1 + a + a^2 + \dots + a^n}{1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{4^n}};$$

Să se găsească limitele :

$$41. \lim_{n \rightarrow 0} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n ; \quad 42. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)}{\frac{1}{n}} ;$$

$$43. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{\frac{n}{5}} ; \quad 44. \lim_{n \rightarrow \infty} [\ln(n+1) - \ln n]^n$$

Să se calculeze limitele șirurilor avînd termenul general

$$45. u_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} ; \quad 46. u_n = \frac{C_n^k}{n^k} ;$$

$$47. u_n = \frac{(n+1)(n+2) \dots 2n}{n^n} ;$$

Să se calculeze limitele șirurilor avînd termenul general

$$48. u_n = \frac{1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n-1)^2}{n^3} ;$$

$$49. u_n = \frac{1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + \dots + n(n+2)}{n^3}$$

$$50. u_n = \frac{2^2 + 4^2 + \dots + (2n)^2}{1^2 + 3^2 + \dots + (2n-1)^2} .$$

Să se calculeze limita șirului avînd termen general :

$$51. S_n = U_1 + U_2 + \dots + U_n, \text{ dacă } U_n = \ln \frac{(n+1)(n+3)}{n(n+4)}$$

Să se demonstreze următoarele egalități :

$$52. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{n!} = 0; \quad 53. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{a^n} = 0, \quad (a > 1);$$

$$54. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0; \quad 55. \lim_{n \rightarrow \infty} nq^n = 0, \text{ dacă } |q| < 1.$$

$$56. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_a n}{n} = 0, \quad a > 1.$$

$$57. \text{ Să se calculeze : } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^3 - 1}{2^3 + 1} \cdot \frac{3^3 - 1}{3^3 + 1} \cdots \frac{n^3 - 1}{n^3 + 1}$$

Funcții

Să se calculeze :

$$58. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x-1)^3}{2x^3 + 3x - 1}; \quad 59. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{10x^2 + 3x + 1}{x^3 - x^2 - x}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln^2 x}{x}.$$

$$60. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln^\alpha x}{x^\beta} \quad (\alpha > 0, \beta > 0); \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x - 1} - \sqrt{x^2 - x + 1}).$$

$$61. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^x; \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \operatorname{tg} x)^{\operatorname{ctg} x};$$

$$62. \text{ Să se afle : } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x^2}; \quad 63. \lim_{x \rightarrow \infty} x \ln \frac{2a+x}{a+x};$$

$$64. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1+x+x^2} - 1}{\sin 2x}; \quad 65. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{1 - \cos x};$$

Să se studieze limitele laterale ale funcțiilor :

$$66. f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{pentru } -\infty < x < 1 \\ 2x - 1, & \text{pentru } 1 \leq x < \infty \end{cases}, \text{ în punctul } x = 1.$$

$$67. f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{pentru } 0 < x < 1 \\ x, & \text{pentru } 1 \leq x < 2, \text{ în punctul } x = 1 \text{ și } x = 2. \\ 3, & \text{pentru } 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

Să se calculeze limitele :

$$68. \lim_{x \rightarrow 0} (\cos \sqrt{x} - \cos \sqrt{x+1}); \quad 69. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - \sqrt[3]{\sin x}}{\cos^2 x}$$

$$70. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sqrt{1 + k \sin x} - \cos x}; \quad 71. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \operatorname{tg} x - \operatorname{tg} 2x}{x(1 - \cos 3x)};$$

$$72. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{x^2};$$

73. Să se calculeze limitele :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x - 1} - ax) \text{ și să se discute după valorile lui } a.$$

74. Să se calculeze :

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (\sqrt[3]{x^3 + 1} - x);$$

Să se calculeze limitele :

$$75. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\pi - 2x) \operatorname{tg} 2x; \quad 76. \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{2}{\sin^2 x} - \frac{1}{1 - \cos x} \right];$$

$$77. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - \sin x}{\sqrt{1 - \cos x}}; \quad 78. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos \alpha x}{\ln \cos \beta x};$$

$$79. \lim_{x \rightarrow a} \frac{a^x - x^a}{x - a} (a > 0); \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} (\cos x)^{\sqrt{2}}}{x^2};$$

$$80. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax^2} \cos^2 x - 1}{x^2}; \quad 81. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} (a \neq 0);$$

82. Să se determine a astfel încât să avem :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{1+x^2} - ax}{x} = 0$$

83. Se dă funcția :

$$f(x) = \begin{cases} \sin x + \frac{\sqrt{1 - \cos^2 x}}{\sin x}, & x \neq 0; \\ \sqrt{2}, & x = 0 \end{cases}$$

Să se studieze continuitatea în punctul $x = 0$.

84. Să se determine parametrul a , astfel ca funcția :

$$f(x) = \begin{cases} a \ln(x+2), & x \geq 0, \\ (1 + \operatorname{tg} x)^{\frac{1}{\sin x}}, & x < 0, \end{cases}$$

să fie continuă în punctul $x = 0$.

85. Să se afle domeniile maxime de definiție al funcțiilor :

$$a) f(x) = \sqrt{2^{2x+4} - 4^x - 30}$$

$$b) f(x) = \sqrt{\frac{\cos 2x - 3 \cos x + 2}{1 - \cos x}};$$

$$c) f(x) = \arccos \sqrt{\ln(x^2 - 1)};$$

86. Se consideră funcția : $f(x) = \ln [mx^2 + 2(m+2)x + 9]$.

a) Să se determine m astfel încât funcția dată să fie definită pe toată axa reală.

b) Să se arate că pentru valorile găsite ale lui m , funcția are un minim.

87. Se dau funcțiile : $f(x) = \ln(-2x^2 - x + 1), g(x) = -4x^2 - x$

Se cere : a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)}$

b) Domeniul maxim de definiție al funcției $F(x) = \sqrt{\frac{f(x)}{g(x)}}$

88. Să se reprezinte grafic funcția :

$$f(x) = \min[|x - 4|, 2].$$

89. Să se reprezinte grafic funcția :

$$f(x) = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} x \frac{1-x}{1+x}$$

90. Să se calculeze domeniul de definiție și asimptota oblică pentru funcția $f(x) = x \ln \left(e + \frac{1}{x} \right)$.

91. Fie funcția $f(x) = \frac{x^2 + 2x - 4}{x^2 + 2x + 4}$. Să se construiască graficul funcției $f(x)$, determinându-se și punctele de inflexiune.

92. Să se reprezinte grafic funcțiile :

$$a) y = \frac{x^2 + 1}{(x - 1)^2}; \quad b) y = \frac{x(x - 4)}{x^2 + 2};$$

$$c) y = \frac{x(x^2 - 9)}{x^2 - 1}; \quad d) y = \frac{(x + 2)^2(x - 3)}{(x + 3)^2};$$

$$e) y = \frac{\sqrt{x^2 - 7x + 10}}{x + 1}; \quad f) y = \sqrt{\frac{x(2 - x)}{x^2 - 4x + 3}};$$

$$g) y = \sqrt{\frac{2x^2 - 5x + 3}{3x^2 + x - 4}}.$$

93. Să se reprezinte grafic funcțiile :

$$a) f(x) = \frac{|x^3 - x|}{x^2 - 1}$$

$$b) f(x) = \sqrt{\frac{|x^3 - x|}{x^2 - 1}}$$

$$c) y = \sqrt{x(x-1)} + \sqrt{x(x+1)}$$

$$d) y = |x^2 - 4x| + 4$$

94. Să se reprezinte grafic funcțiile :

$$a) y = \ln \frac{|x^2 - 7x + 10|}{x - 1}$$

$$b) y = \ln \left| \frac{x^2 - 7x + 10}{x - 1} \right|$$

$$c) y = \frac{\sin x - \cos x}{\cos^2 x}$$

$$d) y = \frac{2 \sin 2x - 2(\sin x + \cos x) + 1}{\sin x + \cos x}$$

95. Se dă funcția $y = (1 + \cos x)e^x$, $x \in [0, 2\pi]$

a) Să se determine pantele tangentelor în punctele de inflexiune.

b) Să se reprezinte grafic și să se calculeze aria cuprinsă între grafic, axa Ox și dreptele $x = \pi$, $x = 2\pi$.

96. Să se reprezinte grafic funcția $f(x) = e^x - 1 - x$.

Să se calculeze aria domeniului limitat de graficul funcției pentru $0 \leq x \leq 1$, segmentul $[0, 1]$ de pe axa Ox și paralela $x = 1$ la Oy .

97. Se consideră funcția :

$$f(x) = \begin{cases} x \ln a, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} (a > 0).$$

Să se reprezinte grafic și să se calculeze aria cuprinsă între grafic, axa Ox și punctele de intersecție a graficului cu această axă. Fie x_1 rădăcina nenulă a ecuației $f(x) = 0$ și x_2 abscisa punctului de extrem.

Considerând x_1, x_2 termenii consecutivi ai unei progresii geometrice infinite, să se calculeze suma S a acestei progresii.

Să se calculeze $\lim_{a \rightarrow 0} (e^a - 1)S$.

98. Să se reprezinte grafic funcția $f(x) = \frac{x^3 - 3x + 1}{x^2 - x}$

și să se arate că punctul de intersecție al curbei cu asimptota oblică, este centru de simetrie al curbei.

99. Se dă funcția : $y = \frac{x + 2}{(x + 1)^2}$

a) Să se reprezinte grafic și să se arate că tangenta la grafic în punctul de intersecție cu axa Ox , intersectează din nou graficul în punctul de intersecție cu axa Oy .

b) Să se calculeze suma :

$$S = y(0) + y'(0) + y''(0) + \dots + y^{(2^n)}(0) - 1$$

c) Notînd cu $F(\lambda)$ aria limitată de grafic și axa Ox pentru $0 \leq x \leq \lambda$, să se calculeze $F'(0)$.

d) Să se determine valorile $y \in N$, pentru care x este rațional și să se afle suma inverselor tuturor acestor valori.

100. Se dă funcția $f(x) = mx + x^2 \ln x$. Să se afle locul geometric al punctelor de extrem cînd m este un parametru variabil și să se reprezinte grafic acest loc geometric.

101. Să se afle conul de axă totală minimă circumscris unei sfere date de rază R .

102. Dintre toate triunghiurile dreptunghice care au suma unei catete cu ipotenuza constantă și egală cu k să se afle cel de arie maximă.

103. Dintre toți cilindrii de arie totală dată $2a^2$, să se determine cilindru de volum maxim.

104. Să se înscrie într-o sferă de rază R , un trunchi de con avînd ca bază un cerc mare, a cărei arie laterală să fie maximă (se va alege ca variabilă x , raza mică a trunchiului de con).

105. Se dă triunghiul ABC dreptunghic în A . Notînd cu a, b, c laturile și $y = \frac{a+b+c}{2}$, să se exprime y în funcție de $\operatorname{tg} \frac{B}{2} = x^2$. Din studiul funcției obținute să se afle între ce limite poate varia y .

106. Pe segmentul AB se ia punctul O și se descrie un cerc cu centrul în O , de rază OB . Din A se duce tangenta AD la cerc. Să se afle maximul ariei triunghiului ACD cînd O parcurge segmentul AB ($AB = a$).

107. Să se aplice formula creșterilor finite funcțiilor:

a) $f(x) = \operatorname{arctg}(2x - \sqrt{3})$, în intervalul $(0, \sqrt{3})$;

b) $f(x) = \ln(x^2 + x + 1/4)$, în intervalul $(0, 3)$.

Calcul integral

108. Să se calculeze următoarele integrale de funcții reale:

a) $\int \frac{2dx}{x^2 - 4x + 3}$; b) $\int \frac{dx}{3x^2 - 10x + 3}$; c) $\int \frac{dx}{x^2 - (a+b)x + ab}$;

109. a) $\int \frac{dx}{2x^2 + 5ax - 3a^2}$; b) $\int \frac{dx}{x(x-1)(x-2)}$;

c) $\int \frac{dx}{x^2(x+2)}$; d) $\int \frac{dx}{x^2 + 6x + 10}$;

e) $\int \frac{dx}{a^2x^2 + 2abx + a^2 + b^2}$; f) $\int \frac{(x+1)dx}{(x-1)(x^2 + x + 1)}$;

110. $\int \frac{(x^3 + 2x - 1)dx}{(x^2 - 2x + 3)x^2 + 4}$; $\int (2x + a) \left[1 + \frac{1}{x^2 + a^2} \right] dx$;

111. Să se calculeze cu ajutorul unor substituții convenabile, integralele :

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+2e^x}}; \quad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x(3+x)}}, \quad \int \frac{dx}{2x-3\sqrt{x+1}};$$

$$112. \int \frac{dx}{(x+a^2)\sqrt{x-2a^3}}; \quad \int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx; \quad \int \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1} dx;$$

113. Să se calculeze cu ajutorul integrării prin părți integralele :

$$a) \int (x^2+x)e^x dx; \quad \int (ax^2+2x+2a^3)e^{ax} dx;$$

$$\int \frac{xe^{ax} dx}{(1+ax)^2}; \quad \int \left[\frac{x^2+x+2}{2} + (2x+1)\ln x \right] dx;$$

$$b) \int \left[\frac{2x^2-a}{x^2+a^2} + \ln(x^2+a^2) \right] dx;$$

$$\int \left[1 + \frac{x}{1+x^2} + (2x+1)\operatorname{arctg} x \right] dx;$$

$$\int [(x^2+2x-1)\cos x - (x-1)^2\sin x] dx;$$

$$c) \int [(1-a^2+ax)\cos ax + (1-a^2-ax)\sin ax] dx;$$

$$\int x^3 \sin x dx; \quad \int x^3 \cos x dx; \quad \int \sin(\ln x) dx; \quad \int \cos(\ln x) dx;$$

114. Să se calculeze integralele :

$$I_1 = \int \frac{\sin x dx}{\sin x + \cos x}; \quad I_2 = \int \frac{\cos x dx}{\sin x + \cos x};$$

115. Să se calculeze următoarele integrale definite :

$$a) \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{5+4\cos x}; \quad \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{5-3\sin x};$$

$$b) \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sin x}; \quad \int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\cos x}; \quad \int_0^{\pi/3} \frac{dx}{3\sin x + \cos x};$$

$$c) \int_0^e \frac{dx}{x + a^2 - x^2}; \quad \int_1^e \frac{dx}{x \sqrt{1 - (\ln x)^2}}; \quad \int_1^e \frac{\ln x dx}{(1 + x)^2};$$

$$d) \int_0^1 \frac{dx}{e^x + 2e^{-x} + 2}; \quad \int_{-a}^{a\sqrt{3}-2a} \frac{dx}{x^2 + 4ax + 5a^2};$$

$$\int_{-1}^{\sqrt{3}} \frac{1 + |x|}{1 + x^2} dx - 2 \int_1^2 \left| \frac{x-1}{x^2 - 2x - 15} \right| dx;$$

116. Să se demonstreze egalitatea :

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{m^2 + 2m \cos x + 1} = \frac{2}{m^2 - 1} \left(\operatorname{arctg} x - \frac{\pi}{4} \right) (m > 1).$$

117. Să se arate că :

$$\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x} = \frac{1}{ab} \operatorname{arctg} \frac{a}{b};$$

118. Se consideră funcțiile :

$$x = a(1 + \cos \theta) \cos \theta;$$

$$y = a(1 + \cos \theta) \sin \theta;$$

Să se calculeze integrala :

$$\int_0^{\pi} \sqrt{x'^2(\theta) + y'^2(\theta)} d\theta;$$

119. Să se calculeze integrala :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2^{n+1}}} \sin x \cos x \cos 2x \dots \cos 2^{n-1} x dx; \quad (n \in \mathbb{N})$$

120. Se dau funcțiile :

$$x = 2 \cos t - \cos 2t$$

$$y = 2 \sin t - \sin 2t$$

a) Să se elimine parametrul t între cele două funcții;

b) Să se explice relația obținută în raport cu y ;

121. Să se calculeze integrala :

$$I = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)dx}{1+x^2}$$

Aplicații ale calculului diferențial și integral

122. Se consideră funcția: $f(x) = ax(x-b)(x-c)$

a) Să se determine constantele a, b, c , știind că funcția admite un minim egal cu -6 în $x = 6$ și un maxim în $x = \frac{4}{3}$.

b) Să se reprezinte graficul funcției în condițiile de la punctul a.

c) Să se determine constanta d , astfel ca ecuația $f(x) - d = 0$, să aibă o rădăcină reală și apoi să se rezolve.

d) Să se calculeze aria mărginită de graficul funcției $f(x)$, determinată la punctul a , axele Ox, Oy și dreapta $x = 3$.

123. Se dă funcția: $f(x) = \frac{1}{2} (x + \sqrt{3 - 3x^2})$

Se cere :

a) Să se reprezinte grafic;

b) Să se calculeze aria limitată de curbele: $y = f(x)$ și $y = \frac{x}{2}$.

124. Se dă ecuația: $2x^3 - (5m - 3)x^2 + (4m - 1)x - m = 0$

Determinând $m(x)$ din ecuația dată ca raport de polinoame (coeficientul termenului de grad maxim din $P(x)$ fiind luat pozi-

tiv) și notînd: $m(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, $f(x) = \frac{5}{2} \frac{P(x) + x(1-x)}{Q(x) + 4(x+1)}$, să

se calculeze :

$$a) \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{f(x)}{x} \right]^x; \quad b) \int_0^1 f(x) dx;$$

c) Să se determine parametrul m , întreg, în așa fel încît rădăcinile ecuației să fie în progresie geometrică.

125. Să se afle aria limitată de curba $y = \ln x$, axa Oy , axa Ox și dreapta $y = 2$.

126. Să se calculeze aria limitată de curbele $y = e^{-x} \sin x$, $y = 0$, $x \geq 0$.

127. Să se afle raportul k în care parabola $y^2 = 2x$, împarte aria cercului $x^2 + y^2 = 8$.

128. Să se afle volumul obținut prin rotirea în jurul axei Ox a curbei $(x - 4a)y^2 = ax(x - 3a)$ pentru $0 \leq x \leq 3a$.

129. Se consideră funcția: $y = \frac{a}{2} (e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}})$.

Să se calculeze:

a) Aria cuprinsă între arcul de curbă, axa Ox și dreptele $x = -a$; $x = a$.

b) Volumul corpului obținut prin rotirea curbei în jurul axei Ox între dreptele $x = -a$, $x = a$.

c) Lungimea arcului de curbă cuprins între dreptele $x = -a$; $x = a$.

d) Coordonatele centrului de greutate a ariei plane cuprinsă între arcul $y = y(x)$, axa Ox și dreptele $x = -a$; $x = a$.

130. Se dă funcția: $y = 4\sqrt{ex} + 2e \ln \frac{\sqrt{x} - \sqrt{e}}{\sqrt{x} + \sqrt{e}}$,

a) Să se calculeze aria cuprinsă între curbă, axa Ox și dreptele $x = 2e$, $x = 3e$.

b) Să se calculeze lungimea arcului de curbă $y = y(x)$, cuprins între aceleași drepte.

Capitolul 24

PROBLEME CU CONȚINUT PRACTIC

1. Un bazin metalic cu masa de 20 kg conține 120 l apă la o temperatură de $t = 15^{\circ}\text{C}$. Ce cantitate de apă la temperatura de 80°C trebuie adăugată în bazin, pentru ca temperatura apei să fie între 30°C și 40°C ?

2. Suprafața pardoselii dintr-o locuință este în general mai mare decât suprafața ferestrelor, raportul dintre ele fiind mai mare de 100%. După acest raport se apreciază și igiena unei locuințe. Aprecierea este cu atât mai bună, cu cât acest raport este mai mic, existînd o normă după care suprafața ferestrelor unei locuințe nu are voie să depășească suprafața pardoselii. Raportul igienic al unei locuințe se îmbunătățește sau nu, dacă mărim proporțional suprafața pardoselii și a ferestrelor. Care este variația acestui raport, dacă atît la numărător cît și la numitor adăugăm același număr?

3. Distanța focală a unei oglinzi sferice concave este egală cu f . La ce distanță de focarul oglinzii trebuie așezat un obiect, pentru ca mărimea liniară a imaginii să fie cel mult de două ori mai mare, și cel puțin mai mică de trei ori decât obiectul?

4. Un sul de hîrtie are masa m (kg) și diametrul d (cm). Din acest sul se folosește o parte astfel încît hîrtia luată să nu fie mai puțină de m_1 (kg) și nu mai mare de m_2 (kg), ($m_1 \leq m \leq m_2$). Pînă la ce diametru trebuie desfășurată hîrtia de pe sul?

5. La o rezistență specifică a pămîntului de $f = 8 \text{ N/cm}^2$ aratul unui hectar de pămînt se face în mai puțin de o oră și la o rezistență specifică $f_1 = 12 \text{ N/cm}^2$ nu depășește 1,4 ore. Adîncimile la arat sînt admise în limitele 0,1 m pînă la 0,85 m. Determinați puterea utilă a tractorului și adîncimea arăturii pentru ca datele din problemă să fie respectate?

6. O barcă cu motor transportă o încărcătură de la portul A la portul B (distanța între A și B este 24 km în sensul râului). La întoarcere cu o nouă încărcătură, din cauza curentului apei, care este 6 km/h, barca merge mai repede. Cît de mare trebuie să fie viteza bărcii cu motor în apa liniștită, astfel încît cursa de la A la B să nu dureze mai mult de 3 ore, neținînd seama de timpul afectat încărcării și descărcării?

7. Arătați că rezistența totală la o legare în serie a n conductori, este mai mare de n^2 ori decît rezistența la o legare în paralel cu același număr n de conductori?

8. La construcția locuințelor și construcțiilor industriale se folosesc ferestre pătrate. Proiectul unei asemenea construcții prevede un tablou de tîmplărie cuprinzînd n ferestre, cu o suprafață totală de A m². Calculați cheltuielile maxime posibile pentru tocurele acestor n ferestre, știind că 1 m³ de lemn pentru tocure costă d lei.

9. Prin simulare în laborator se face testul asupra unei bărci cu ajutorul unui model într-un bazin de experimentare. La simulări pot varia atît vitezele cît și curenții apei, astfel ca barca model să parcurgă o distanță de 60 m, în sensul de curgere al apei într-un timp mai mic de 5,4 s. Aceeași distanță trebuie parcursă acum însă împotriva curentului apei într-un timp care să nu depășească 7,2 s. Care sînt valorile vitezei pentru model și pentru apă, pentru a obține o mișcare uniformă?

10. Lămpile de iluminat se prevăd de obicei cu un abajur pentru protecția ochilor, care atenuează efectul sursei de lumină. Efectul de protejare este cu atît mai mare cu cît unghiul \widehat{DAC} este mai mare (fig. 24.1), unghi format de orizontală

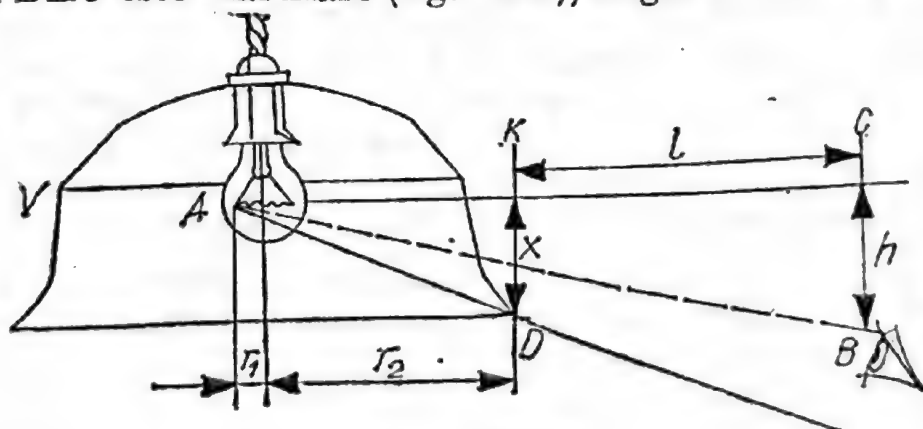


Fig. 24.1

și dreapta AD (dusă prin punctul extern al sursei de lumină și marginea opusă a abajurului). Unghiul astfel format se numește

unghi de protejare al ochiului. Notăm cu r raza cercului de bază și r_1 raza spiralei filamentului, distanța pe orizontală care trece prin filament, ochi și un punct de pe cercul cu rază r_2 să nu fie mai mică de l , iar distanța pe verticală dintre ochi și orizontală să fie maximum h . Determinați la ce distanță de nivelul filamentului trebuie să fie marginea de jos a abajurului, pentru ca ochiul să nu vadă filamentul.

11. Într-o mină din galeria principală se vor deschide alte două galerii laterale (fig. 24.2), astfel că galeria AC să fie perpendiculară pe peretele galeriei principale și să aibă 200 m lungime, iar cealaltă galerie BD , să facă un unghi de 120° cu peretele galeriei principale

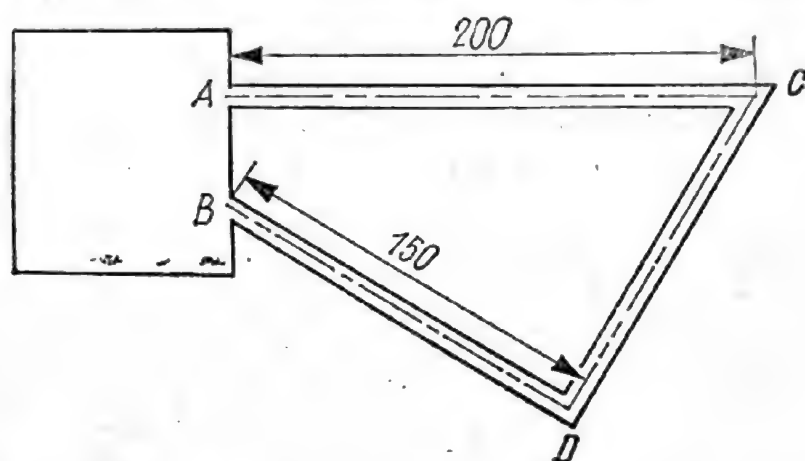


Fig. 24.2

și un unghi de 30° față de direcția primei galerii laterale, măsurând o lungime de 150 m. Galerile laterale vor fi legate printr-o altă galerie de legătură CD . Care este distanța AB dintre intrările galeriilor laterale, pentru ca lungimea galeriei de legătură să nu depășească 130 m?

12. Prin distanța orizontului vizibil, se înțelege distanța de la observator la punctul cel mai îndepărtat al suprafeței Pământului care poate fi văzut (aceasta cel puțin teoretic). Până la ce înălțime trebuie lansată o rachetă geofizică, pentru ca observatorul ce se află înăuntru (sau un aparat fotografic) să obțină un orizont vizibil a cărui distanță să nu fie mai mică de 2000 km (raza Pământului se consideră 6370 km)?

13. La proiectarea unei mașini de smuls plante din pământ, trebuie să cunoaștem distanța S_c pe care o parcurge punctul C al ghearei mașinii (fig. 24.3). Punctul C , care se mișcă cu o viteză uniformă, se depărtează de punctul O , unde este rădăcina plantei și în acest timp are loc smulgerea din pământ. Dacă a este lungimea rădăcinii, l_0 — lungimea plantei de la pământ pînă la gheară, atunci smulgerea este efectuată dacă punctul C , avînd distanța inițială de la punctul O , $CO = l_0$, se mișcă pînă în punctul

C_1 , aflat la distanța $C_1O = l_0 + a$. Găsiți distanța S_c , cunoscând a , l_0 și unghiurile γ și δ (unghiul γ precizează direcția deplasării, iar unghiul θ poziția inițială a plantei).

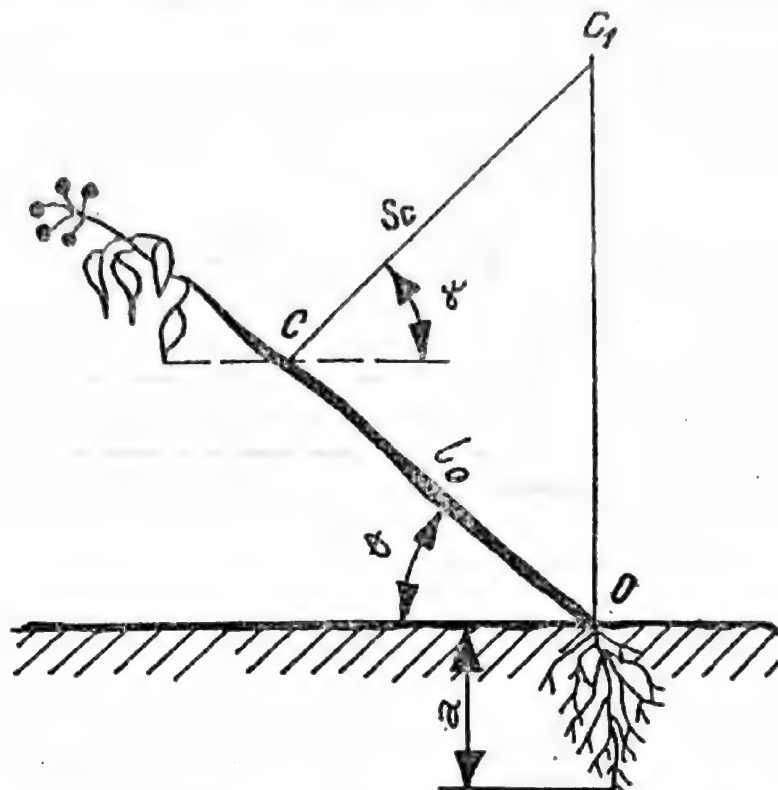


Fig. 24.3

14. Din trei scînduri egale cu lățimea a (cm) se confecționează un jgheab a cărei secțiune are forma unui trapez $ABCD$, unde

$AB + BC + CD = 3a$ (fig. 24.4). La ce valoare a unghiului \widehat{BAD} , suprafața secțiunii jgheabului este maximă?

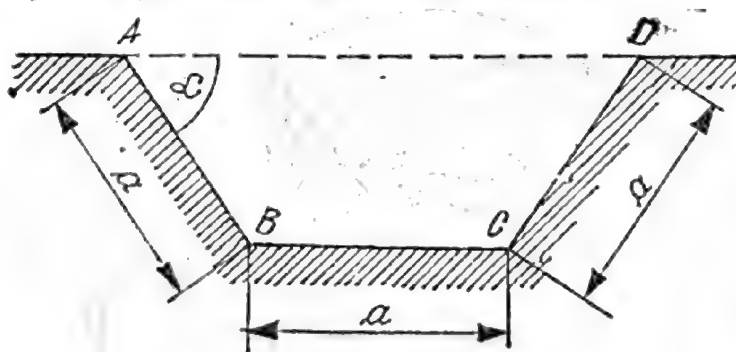


Fig. 24.4

15. Dintr-o bară rotundă cu diametrul d , se taie o bară pătrată. Stabiliți mărimile tăieturilor astfel încît deșeurile să fie minime.

16. Dintr-o foaie de tablă din oțel, de formă dreptunghiulară, avînd suprafața A (m^2), se confecționează o cisternă cilindrică. Ce rază și ce înălțime trebuie să aibă cisterna astfel încît volumul ei să fie maxim?

17. Prin transportul neglijent al sulurilor de hirtie, la suprafață aceasta se strică. Aceste deșeurisînt cu atît mai mici cu cît suprafața rolei este mai mică. Determinați la ce proporții între diametrul și înălțimea rolei deșeurile de hirtie sînt cele mai mici?

18. O piesă formată din doi cilindri cu un ax comun, are diametrele $D = 180$ mm și $d = 100$ mm (fig. 24.5). Piesa are masa de 85 kg, distanța de la fața frontală a piesei cilindrice cu diametrul

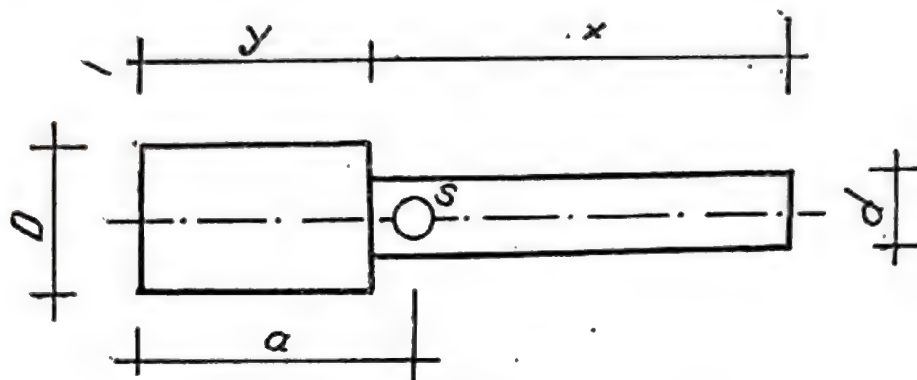


Fig. 24.5

D pînă la centrul de greutate S este de 280 mm, iar densitatea materialului din care este confecționată este $\rho = 7,85$ g/cm³. Stabiliți lungimile părților cilindrice.

19. Dintr-un copac care are forma unui cilindru, se confecționează o grindă de forma unui paralelipiped. Să se afle ce dimensiuni trebuie să aibă grinda, astfel încît la confecționarea ei să avem pierderi tehnologice minime din materialul lemnos (fig. 24.6).

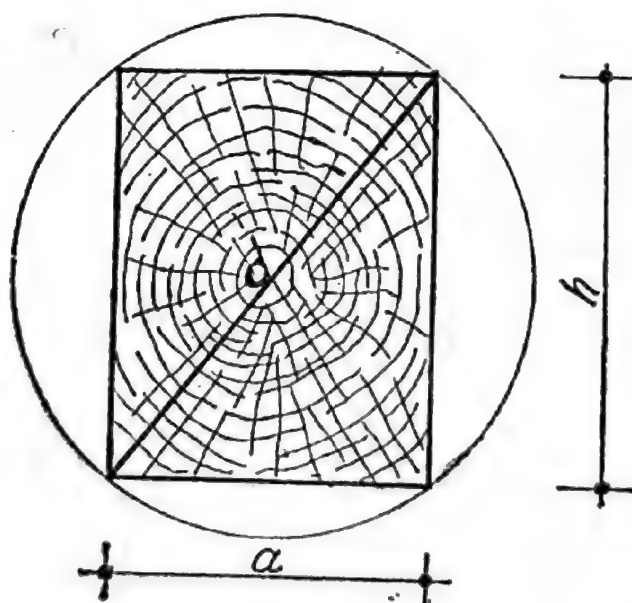


Fig. 24.6

20. O bară cu lungimea l (cm) se taie în trei părți. Aceste părți trebuie îmbinate în unghiuri drepte, astfel încât să formeze un schelet al unui chioșc de formă piramidală. Ce lungime trebuie să aibă fiecare parte, pentru ca acesta să aibă volumul cât mai mare?

21. Să se rezolve ecuația (Kepler)

$$x = a + e \sin x,$$

în cazul $a = 2$ și $e = 0,1$ și pentru $0 \leq x \leq 2$.

22. Viteza apei unui râu este V (m/s), iar viteza unui înotător în apă stătătoare este V_1 (m/s). Sub ce unghi x format cu direcția perpendiculară pe cursul apei trebuie să înoate înotătorul ca să ajungă în punctul B al malului celălalt la o distanță l (m) de punctul C (C fiind în dreptul punctului de plecare A).

23. Cunosând viteza inițială a unui proiectil $V_0 = 300$ m/s și distanța orizontală $d = 1200$ m, la care trebuie să ajungă proiectilul, să se calculeze unghiul de tragere și timpul în care ajunge la țintă.

24. Piesa AB se mișcă (culisează) în ghidajul $K'K$ și $L'L$ (fig. 24.7). În interiorul ei există un canal în care se mișcă o piesă M legată printr-o articulație de bară OM cu lungimea $a = 10$ cm, care se rotește în jurul unui punct fix O , făcând 6 ture pe minut.

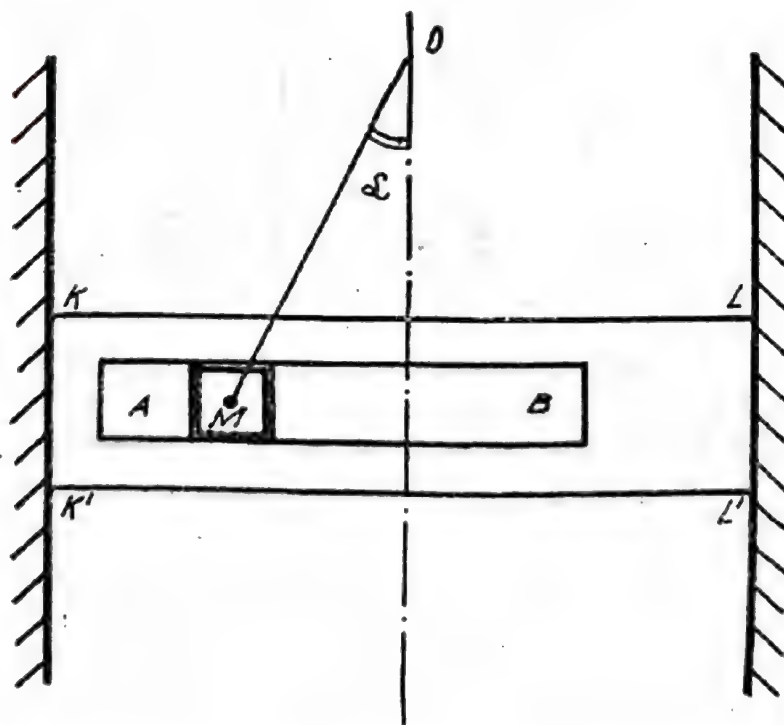


Fig. 24.7

Să se determine viteza V de deplasare a culisei AB în momentul când pistonul formează cu verticala unghiul α (caz particular $\alpha = 30^\circ$).

25. Pământul unei gospodării cu mărimea de 5000 ha, trebuie să fie arat în mai puțin de 200 ore.

Pentru arat se dă adâncimea de 35 cm și se întrebuintează un plug cu 5 brazde, la care fiecare cuțit are lățimea de 40 cm. Câte tractoare cu puterea de 60 CP sînt necesare pentru arat, dacă rezistența pământului are în medie 12 N/cm^2 .

26. Un balon staționar se află la o înălțime de 1400 m. În regiunea balonului (C), sar în același timp doi parașutiști cu parașute care se deschid automat, și anume parașutistul A de la o înălțime de 1900 m, iar parașutistul B de la o înălțime de 1580 m (fig. 24.8).

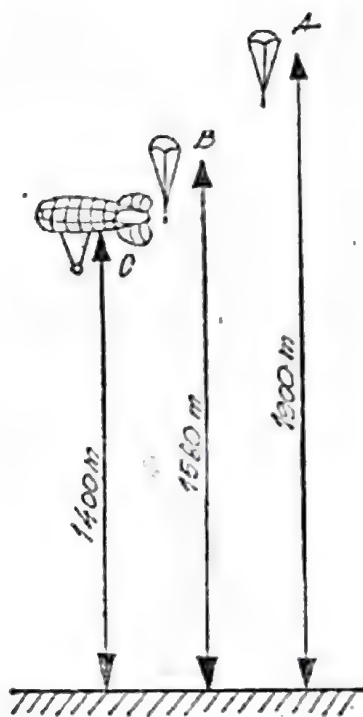


Fig. 24.8

Parașutistul A are o viteză de cădere de 4 m/s , iar parașutistul B , o viteză de $4,5 \text{ m/s}$. În ce timp (de la începutul săriturii) parașutistul A se află deasupra balonului, iar parașutistul B sub balon, cunoscând că viteza parașutistului B întrece pe cea a parașutistului A ?

27. Un compresor pentru consolidarea drumurilor) are lățimea $0,85 \text{ m}$ (fișia vâlțuită la o rotație este de $0,85 \text{ m}$ lățime). Fiecare fișie trebuie să se suprapună pe cea anterioară cu $1/4$ din lățime. Cu ce viteză trebuie să meargă compresorul, pentru ca strada de

750 m lungime și 6,50 m lățime, să nu fie vâlțuită de două ori în mai puțin de 5 h și nu mai mult de 6 h ?

28. La o frână cu doi saboți, aceștia acționează cu forțe egale \vec{F} printr-un sistem de pîrghii pe un ax (fig. 24.9). Momentul de frî-

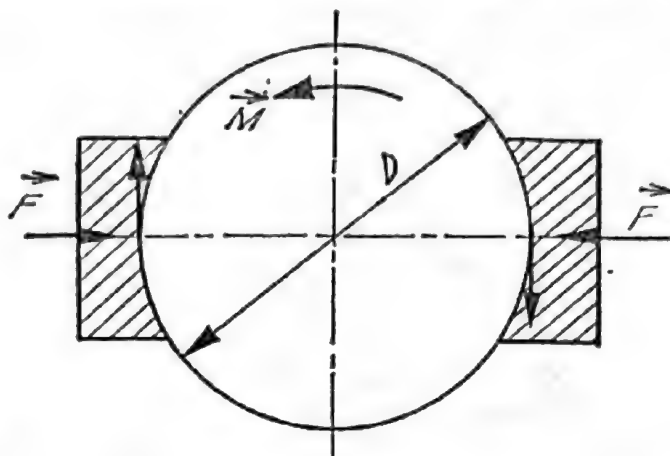


Fig. 24.9.

nare calculat, \vec{M}_f , trebuie să fie de β ori mai mare decît momentul de rotire \vec{M} al axului. Aceasta se exprimă $M_{frînare} \geq \beta M$, unde $\beta = 1,75$ este un factor de siguranță pentru frînă. Să se stabilească forța \vec{F} , dacă $M = 34000 \text{ N}$, diametrul axului frînei $D = 50 \text{ cm}$, iar coeficientul de frecare între sabotul frînei din fontă și a axului de oțel este $\mu = 0,15$.

29. Cabina unui ascensor cîntărește $m \text{ kg}$ și se deplasează cu viteza accelerată uniformă $a \text{ (m.s}^{-2}\text{)}$. Să se calculeze secțiunea X a cablului, dacă materialul din care este confecționat are limita de rupere $\sigma \text{ (N/cm}^2\text{)}$ și potrivit normelor de securitate, nu este voie să se depășească de n ori valoarea calculată.

30. Printr-o conductă A (fig. 24.10), curge apă cu debitul $q = 25 \text{ l/s}$. Conducta B are lungimea $l_1 = 30 \text{ m}$, diametrul $d_1 = 50 \text{ mm}$ și coeficientul hidraulic de rezistență $\lambda_1 = 0,04$.

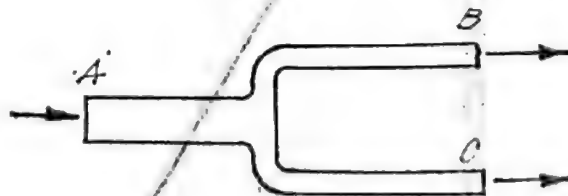


Fig. 24.10

Pentru conducta C avem $l_2 = 50 \text{ m}$, $d_2 = 100 \text{ mm}$, $\lambda_2 = 0,03$. Căderea de presiune h într-o conductă se stabilește după formula :

$h = 0,83 \text{ kg cm}^{-3} \lambda_1 \frac{5}{d^2}$. Să se determine cantitatea de apă care curge în conductele paralele B și C în unitatea de timp. Se consideră că, în conducte drepte cu secțiunea uniformă, căderea de presiune este constantă.

31. În figura 24.11, este reprezentată secțiunea unui acoperiș

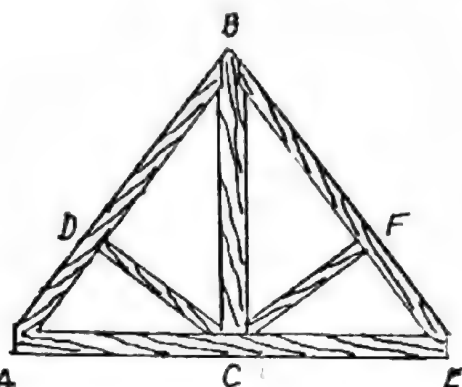


Fig. 24.11

cu două pante. Dreapta CD este perpendiculară pe AB . Să se arate că avem relația : $CD \leq \frac{AC + BC}{2\sqrt{2}}$.

32. Circulația trenurilor între două orașe A și B se face printr-o stație intermediară C astfel încât direcțiile AC și CB sînt perpendiculare (fig. 24.12). Să se arate că lungimea liniei ferate,

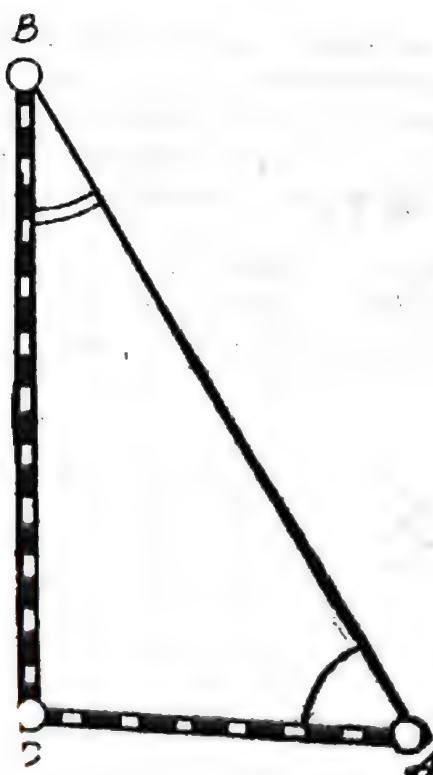


Fig. 24.12

care unește direct orașele A și B reprezintă $0,293$ din lungimea drumului vechi: $\overline{AB} = 0,293 (\overline{AC} + \overline{CB})$.

33. Într-o întreprindere sînt două instalații de stropire artificială. La prima orificiile se găsesc pe suprafața curbată a unui sector de sferă, iar la a doua pe suprafața bazei conului.

Suprafața de bază și înălțimea conului corespund suprafeței de bază și înălțimii sectorului de sferă. Diametrul găurilor, densitatea așezării lor și presiunea apei sînt la ambele instalații la fel.

Pentru ce mărimi ale unghiului sferic, productivitatea primei instalații este mai mare, față de cea de a doua instalație (prin productivitate se înțelege cantitatea de apă, care se împrășteie în unitatea de timp).

34. Un corp coboară pe un plan înclinat, parcurgînd 20 m în 5 s. Să se afle înclinarea planului față de orizontală și viteza la care ajunge mobilul (neglijîndu-se frecarea).

35. Modulul de rezistență polar w_p este dat de formula: $w_p = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{16 D}$ și reprezintă raportul dintre cuplul care solicită axul la răsucire și rezistența admisibilă a materialului din care este confecționat axul. Se cere să se calculeze diametrul exterior al unui ax prevăzut cu un canal central cu $d = 20$ mm, pentru care $w_p = 2,71$ cm³.

36. Figura 24.13 reprezintă modul cum se efectuează frezarea suprafeței unei piese cu ajutorul frezei frontale. La ce distanță x trebuie să iasă freza peste muchia $b = 80$ mm, a cărei lungime este egală cu lățimea suprafeței dreptunghiulare frezate, dacă diametrul frezei este de $d = 100$ mm?

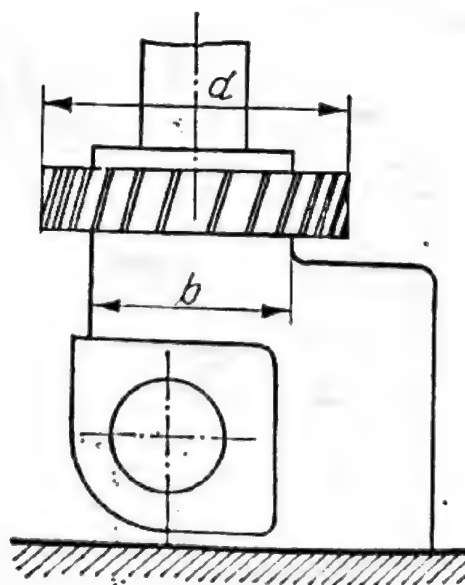


Fig. 24.13

37. Distanța mijlocie între Pământ și Lună este de $3,84 \cdot 10^5$ km. Masa Lunii reprezintă a 81,5-a parte din masa Pământului. La ce distanță de centrul Pământului forțele de atracție ale Lunii și Pământului sînt egale?

38. În cadrul unor sistematizări, se proiectează un parc a cărei suprafață totală este A (m^2). Suprafața de bază are forma unui dreptunghi terminat la capete cu cîte un semicerc (fig. 24.14). Toată suprafața parcului trebuie îngrădită. Ce lungime și ce

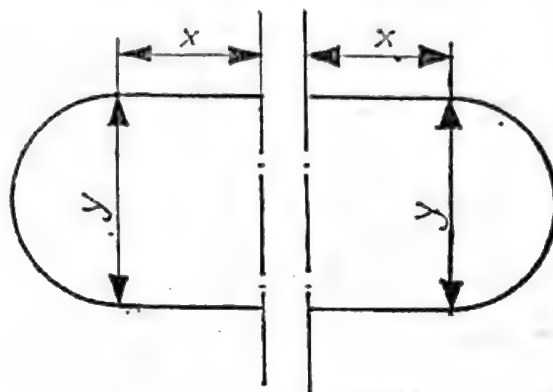


Fig. 24.14

lățime trebuie să aibă partea dreptunghiulară a acestei suprafețe, pentru ca îngrădirea ei să aibă lungime minimă?

39. Un cornier, ale cărui laturi sînt fiecare $\phi = 75$ mm și de grosime $t = 8$ mm, este sudat prin două cusături în puncte nodale de un schelet metalic. Stabiliți lungimea cea mai mică admisă l a acestor cusături, dacă forța de întindere $F = 150$ N atacă în așa fel aripa verticală cum este arătat în figura 24.15. Tensiunea permisă în secțiunea cusăturilor este egală cu 10.000 N.

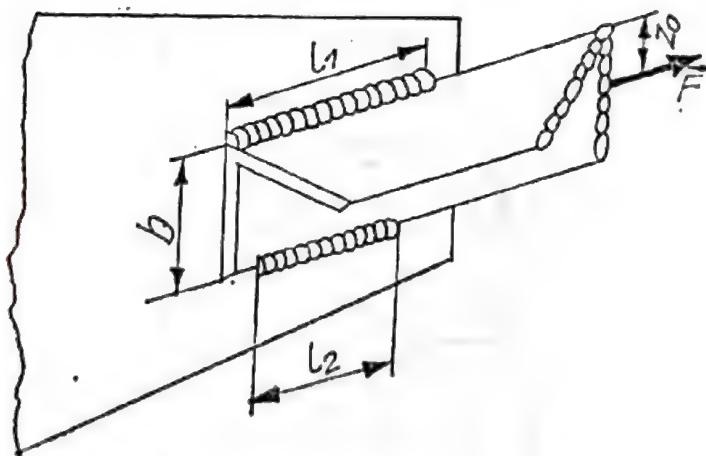


Fig. 24.15

40. Două arcuri elicoidale cilindrice (fig. 24.16) cu diametre diferite și înălțimi egale sînt așezate unul în altul și sînt compri-

mate cu forța \vec{F} . Stabiliți cât din forța \vec{F} acționează pe arcul interior și cât pe arcul exterior, dacă constanta arcului, la primul arc este C_1 și la al doilea C_2 ?

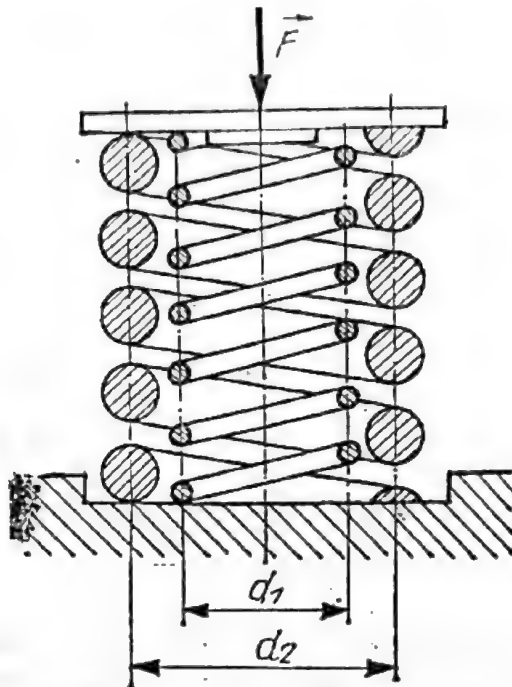


Fig. 24.16

41. Tracțiunea și puterea elicei unui elicopter (fig. 24.17) se calculează după formulele $F = \alpha \rho n_B^2 D^4$ și $P = \beta \rho n_B^3 D^5$, unde α este coeficientul de tracțiune, β coeficientul puterii, n_B numărul de rotații ale elicii pe secundă, D diametrul elicii și ρ densitatea aerului. Să se calculeze tracțiunea și puterea elicii pentru : $\alpha = 0,18$; $n_B = 25 \text{ rot/s}$; $\beta = 0,28$; $D = 2,1 \text{ m}$; $\rho = 0,125 \text{ kg/m}^3$.

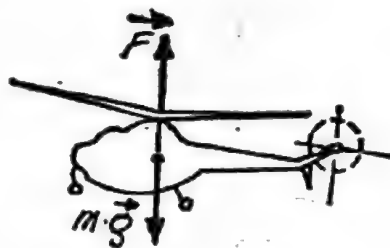


Fig. 24.17

42. Să se stabilească viteza de tăiere optimă la prelucrarea fontei pe un strung, dacă adâncimea șpanului este $S = 2 \text{ mm}$, avansul $\lambda = 0,4 \text{ mm}$ pe rotație. Formula pentru stabilirea vitezei de tăiere optimă în acest caz, este :

$$v_{0p} = \frac{32,6}{8^{0,16} \lambda^{0,38}} \text{ m/min.}$$

43. O barcă de încercare este trasă din port cu două șlepurii. Cablurile șlepurilor formează cu direcția de mișcare unghiuri ascuțite (fig. 24.18). Ce valori trebuie să ia unghiurile, pentru ca la o

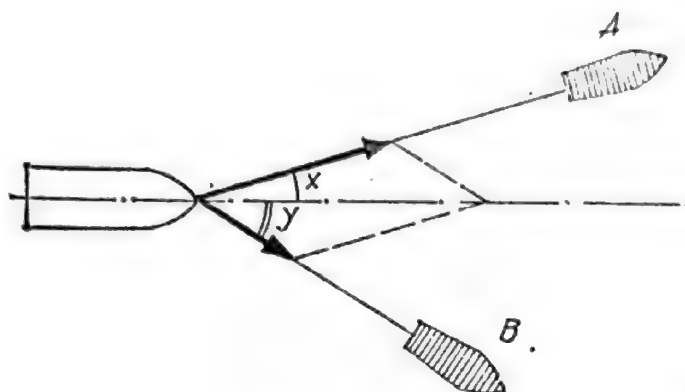


Fig. 24.18

tracțiune a șlepului A de 6 CP și a șlepului B de 4 CP să acționeze pe barcă o forță care să fie mai mare de 5 N. În cazul că tracțiunea șlepului A este 10 CP și a șlepului B este 5 CP tracțiunea bărcii să nu fie mai mică de 8 CP.

44. În figura 24.19 este reprezentat schematic un plan înclinat cu transportor. Planul înclinat este realizat din două șine. Pe

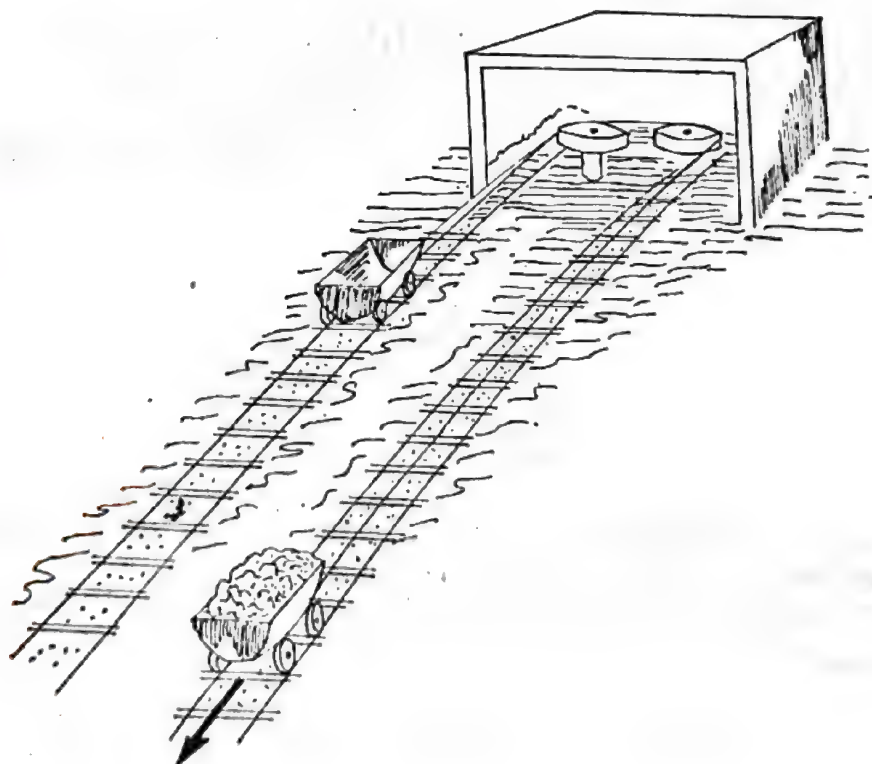


Fig. 24.19

o șină coboară vagonetii goi cu ajutorul unor cabluri care trec printr-o rolă. Acest utilaj este folosit în mine. Știind că un vagonet încărcat are masa $m_1(t)$, vagonetul gol are masa $m_2(t)$ (m_1 mai mare decât m_2), iar coeficientul de frecare între roțile vagonetului și șine este μ . Determinați ce unghi de înclinare φ trebuie să aibă planul înclinat, pentru ca un vagonet plin să tragă cel puțin n vagoneti descărcați (nu se ține seama de frecarea rulmenților).

45. În laboratoarele chimice, se folosesc filtre din hîrtie de formă conică. Sectorul de cerc b_2 se împăturește, astfel încît restul sectorului cu arcul b_1 să formeze mantaua conului. La ce mărime a arcului α (corespunzător sectorului b_2) filtrul conic care se obține din cercul de rază r are volumul cel mai mare.

46. Să se exprime aria secțiunii unei țevi laminate, în funcție de diametrul exterior D și de raportul a dintre diametrul interior și cel exterior (în afară de diametrul exterior D și cel interior d în calculele tehnice, intervine și raportul $a = \frac{d}{D}$).

Determinați diametrul exterior D și diametrul interior d pe care trebuie să le aibă o coloană cilindrică de secțiune circulară știind că :

- aria secțiunii $A = 132,63 \text{ cm}^2$;
- grosimea peretelui $S = 24 \text{ mm}$.

47. Un ax tubular din oțel trebuie să aibă secțiunea $A = 37,68 \text{ cm}^2$, iar raportul dintre diametre $a = 0,5$. Să se determine diametrele axului.

48. Pentru măsurarea diametrului d al bazei unei găuri conice, (avînd cunoscut unghiul de la vîrf α), se introduce o sferă de rază cunoscută r și se măsoară distanța h dintre punctul cel mai de sus al sferei și planul bazei. Să se afle d .

49. Diametrele mari se pot calcula prin metoda măsurării coardei și înălțimii segmentului. Pentru această măsurare, se folosește un instrument care este arătat în figura 24.20. Deduceți o formulă pentru determinarea diametrului, dacă distanța dintre role este l , înălțimea segmentului H și raza rolei r .

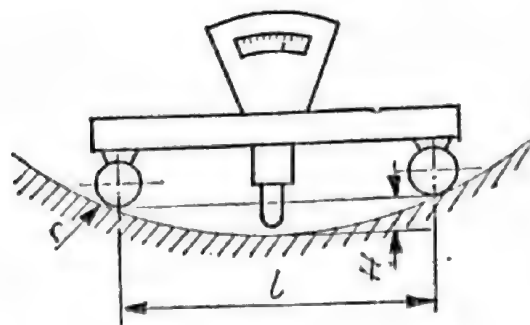


Fig. 24.20

50. Într-o fabrică se confecționează piese ca acelea din figura 24.21. Este o piesă interioară a unui cuplaj electro-

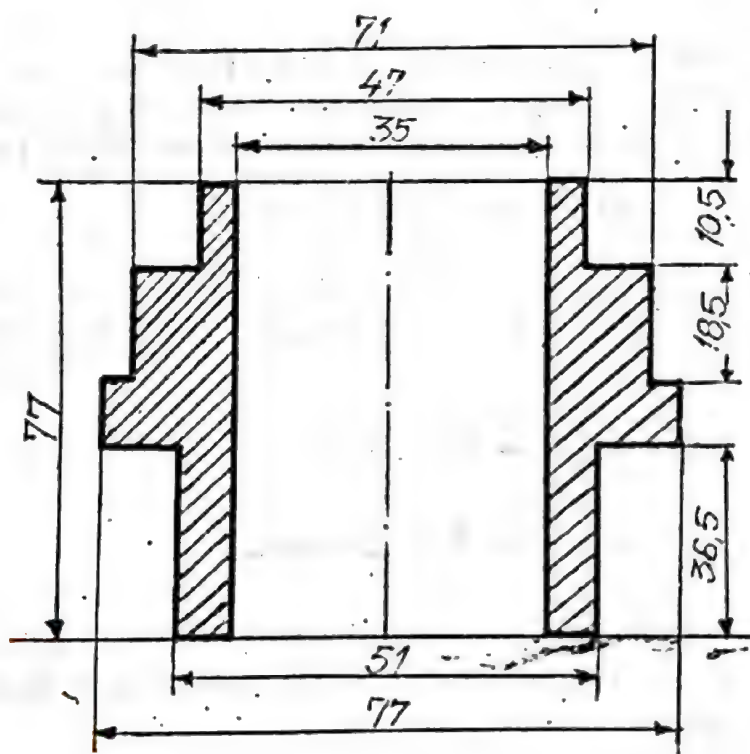


Fig. 24.21

magnetic, confecționată dintr-un aliaj crom-nichel ($\rho = 7,7 \text{ kg/dm}^3$).

Desenul reprezintă secțiunea axială a corpului care se obține prin strunjirea unei piese brute cilindrice cu $D = 85 \text{ mm}$, $d = 30 \text{ mm}$ și $h = 85 \text{ mm}$.

Determinați masa pierderilor tehnologice care se obțin pentru a aduce piesa brută la forma finisată din figură.

51. Un fund de cazan bombat se execută prin matrițare dintr-o tablă circulară cu diametrul D și grosimea S .

Determinați diametrul D , cunoscând următoarele date :
 $d = 800$ mm, $R_1 = 700$ mm, $R_2 = 120$ mm, $h = 80$ mm,
 $S = 20$ mm (fig. 24.22).

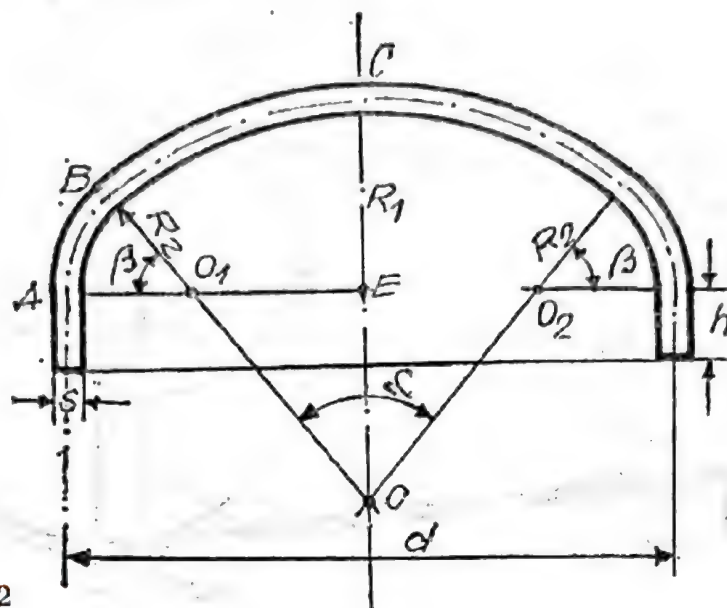


Fig. 24.22

52. Secțiunea unui bac are forma unui trapez cu laturi egale (fig. 24.23). Masa bacului cu încărcătură este de $m = 3,8$ t, lungi-

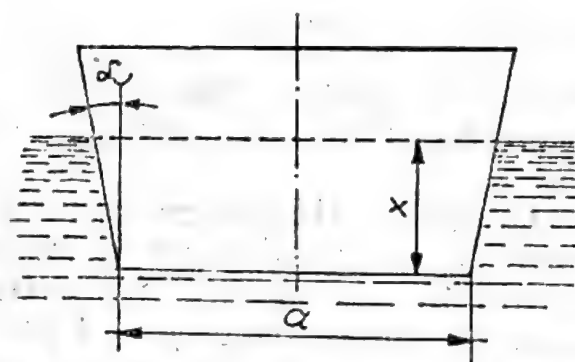


Fig. 24.23

mea de $l = 6$ m, lățimea fundului $a = 1,5$ m, unghiul de înclinare al pereților laterali față de verticală este $\alpha = 8^\circ$ și densitatea apei este $\rho = 1$ g/cm³.

Să se calculeze adâncimea de scufundare a bacului considerând că secțiunea bacului este constantă.

53. Forța periferică admisă F la o transmisie prin curele este, la o viteză de lucru mică, egală cu diferența forțelor de întindere \vec{S}_1 și \vec{S}_2 în partea de curea acționată și cea care acționează

(fig. 24.24) $\vec{F} = \vec{S}_1 - \vec{S}_2$. Forța de întindere inițială a curelei în stare liberă S_0 , se poate calcula din S_1 și S_2 cu ajutorul formulei

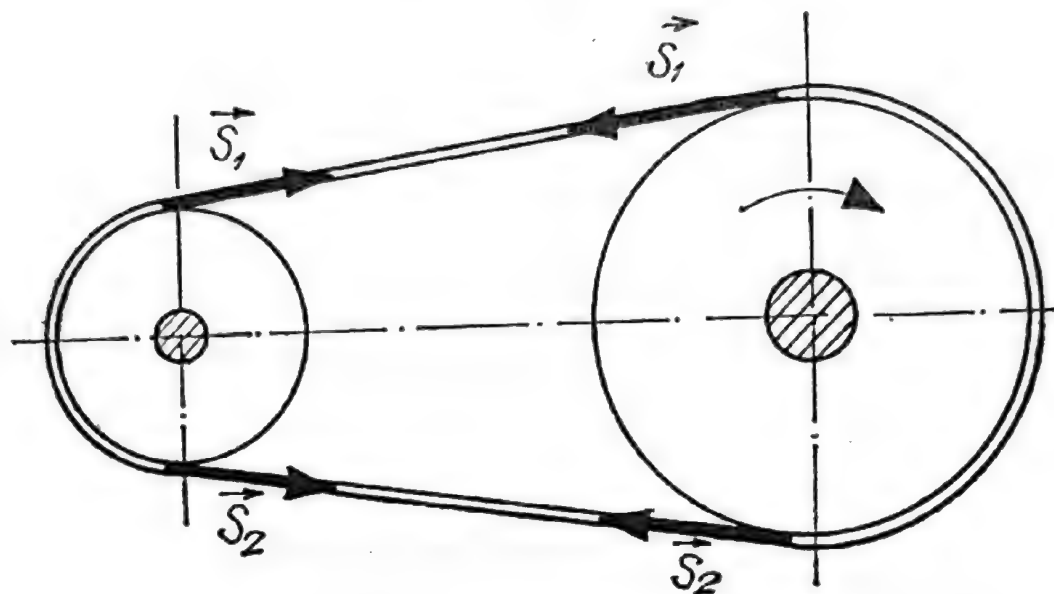


Fig. 24.24

$S_0 = \frac{S_1 + S_2}{2}$. Să se stabilească forțele de întindere S_1 și S_2 , dacă

$F = 200 \text{ N}$ și S_0 este egală cu 250 N ?

54. Un compresor cu piston (fig. 24.25) (mașină pentru comprimarea și transportul de gaz) pornește cu $n = 150 \text{ rot/min}$.

La fiecare rotire compresorul împinge volumul $V = 0,5 \text{ dm}^3$ de gaz în rezervor (rezervor intermediar pentru reglarea presiunilor), care are un volum de $V_r = 100 \text{ dm}^3$. Să se stabilească timpul care se scurge pînă ce presiunea atinge $p = 4 \text{ at}$. Se presupune că aerul nu se încălzește. La început presiunea din cazan a fost aceeași cu presiunea aerului de afară.

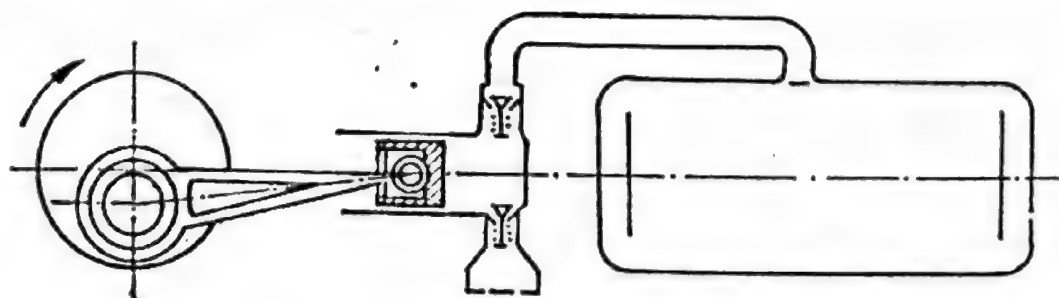


Fig. 24.25

55. Zgomotul produs la căderea unei pietre pe fundul unui puț, ajunge după timpul t , din momentul începerii căderii, la observatorul care se află la gura puțului. Să se determine adâncimea H a puțului și timpul de cădere a pietrei τ , dacă v este viteza sunetului iar g este accelerația căderii libere. Se consideră că piatra nu avea viteza inițială și rezistența aerului este neglijabilă.

56. Să se determine presiunea în picioarele mesei metalice prezentată în (fig. 24.26), pe care se va așeza o placă turnată

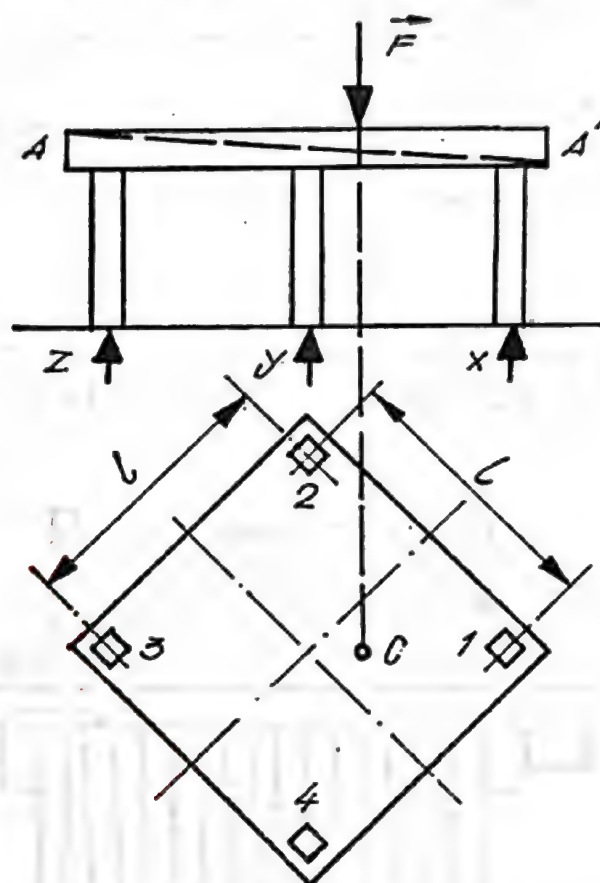


Fig. 24.26

ce apasă cu forța $F = 3000$ N. Distanța dintre picioarele mesei este $l = 1$ m și greutatea rezultantă acționează în punctul C , la distanța $t = 10$ cm de la fiecare axă de simetrie a mesei.

57. Două camioane merg cu vitezele \vec{v}_A și \vec{v}_B (fig. 24.27), unde $v_A > v_B$, iar camionul A îl ajunge pe B . La distanța a_1 de camionul B , șoferul camionului A începe depășirea și o termină, după ce a depășit camionul B cu distanța a_2 . Lungimea camionului A este de l_A , iar cea a camionului B , este l_B . Să se stabilească distanța pe care trebuie s-o aprecieze șoferul camionului A , pentru ca din motive de securitate să fie considerată dublu cît distanța l , pe care el o depășește; depășirea se face pe o distanță cu circulație în ambele

sensuri, distanță unde viteza fiecărui camion care vine din sens opus poate avea aceeași viteză cu camionul care depășește.

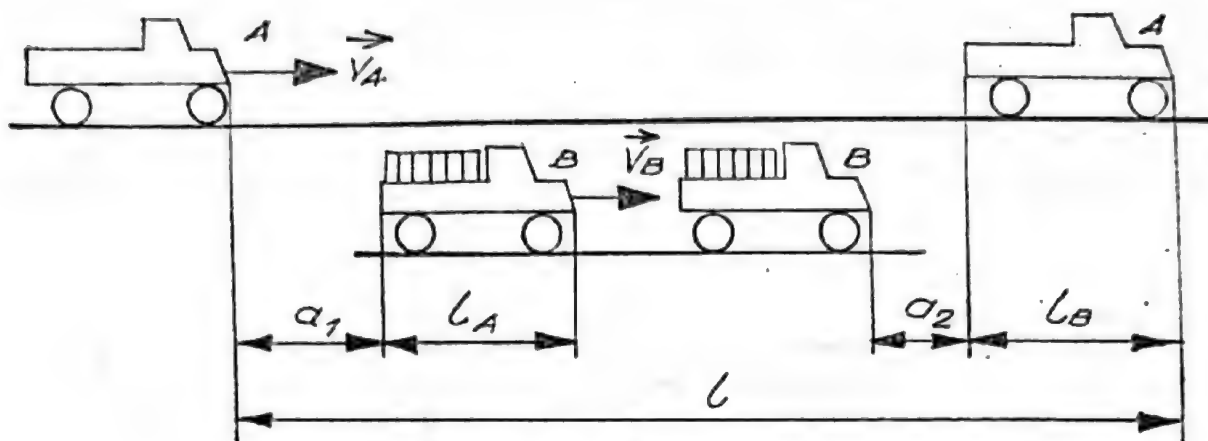


Fig. 24.27

58. Pe o tobă sînt înfășurate n spire ale cablului (fig. 24.28). Diametrul tobei este egal cu D , iar diametrul cablului cu d . Pe o

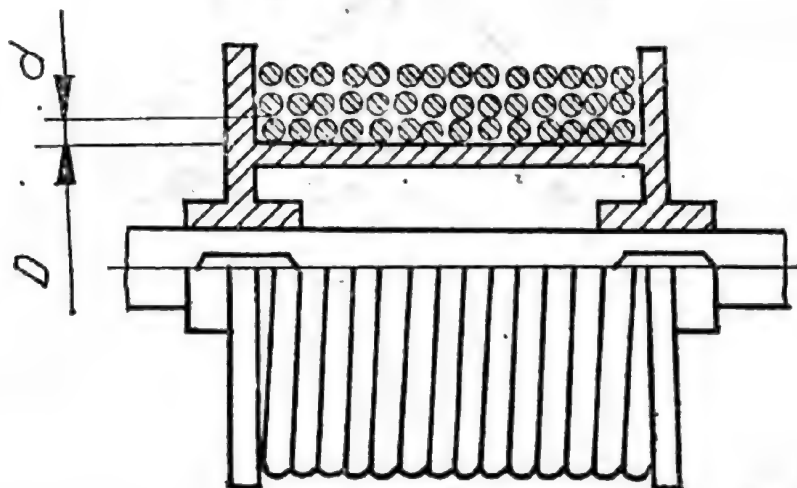


Fig. 24.28

lungime a tobei sînt m înfășurări. Să se stabilească o formulă pentru determinarea lungimii cablului înfășurat pe tobă. (Se va neglija faptul că acesta este deformat).

59. Pentru controlul prelucrării corecte a părților conice se măsoară diametrul în unele secțiuni transversale în lungul piesei. Să se stabilească diametrul d într-o secțiune la distanța λ de la diametrul cel mai mare al conului, dacă se cunoaște că partea conică are lungimea l , diametrul cel mai mare este d_1 și diametrul cel mai mic d_2 (fig. 24.29).

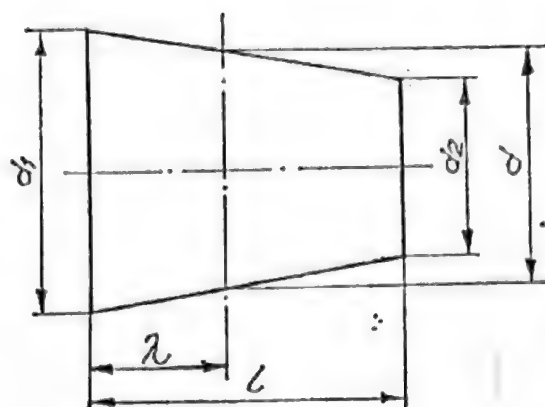


Fig. 24.29

60. Să se găsească centrul de greutate al unei piese (fig. 24.30) care în punctul A este așezată pe o prismă triunghiulară fixă.

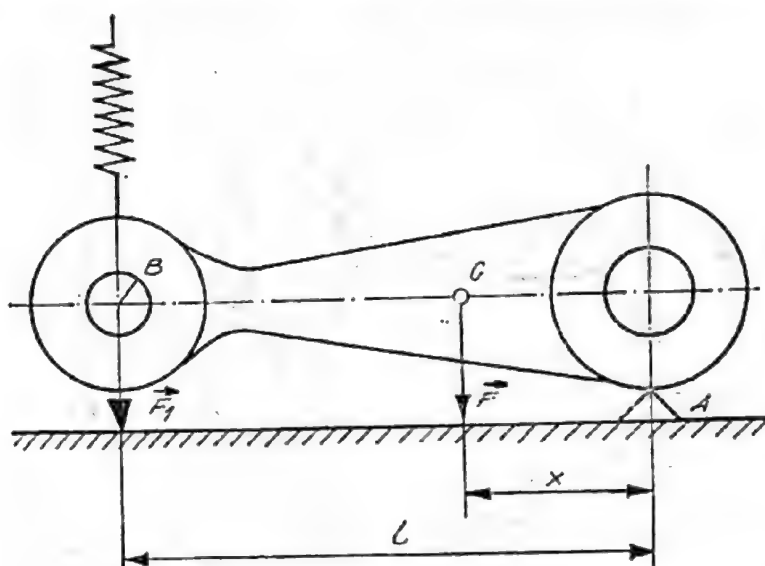


Fig. 24.30

În punctul B se măsoară forța de atracție universală cu ajutorul dinamometrului. Instrumentul arată $\vec{F}_1 = 12 \text{ kg}$. Masa piesei este 27 kg și, deci, forța cu care acționează piesa pe suprafața de așezare, este circa 270 N . Distanța între prisma A și punctul central al dinamometrului B este $l = 45 \text{ cm}$.

61. Într-un rezervor (fig. 24.31) s-a introdus un lichid. La o adâncime de $h = 1,5 \text{ m}$, s-a măsurat presiunea $p = 11,5 \cdot 10^4 \text{ Pa}$. Cît de mare este densitatea lichidului, dacă pe suprafața lichidului acționează numai presiunea normală a aerului?

Observații : — la rezolvarea problemei, se va ține cont de ecuația de bază din hidrostatică $p = p_0 + \rho gh$, unde p este presiunea în punctul dat al lichidului, p_0 presiunea la suprafață, ρ este densitatea lichidului, iar h este înălțimea coloanei de lichid peste punctul dat, unde s-a măsurat presiunea și $g = 9,81 \text{ m/s}^2$.

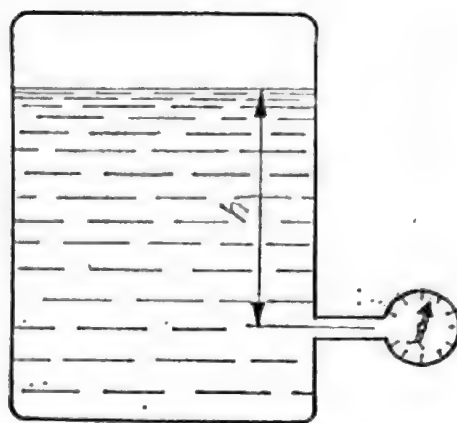


Fig. 24.31

62. La trecerea unei linii de înaltă tensiune peste un râu (fig. 24.32), punctul de prindere A pe stîlpul stîng, are înălțimea $h_1 = 15$ m, distanța între stîlpi este $l = 200$ m, săgeata datorată

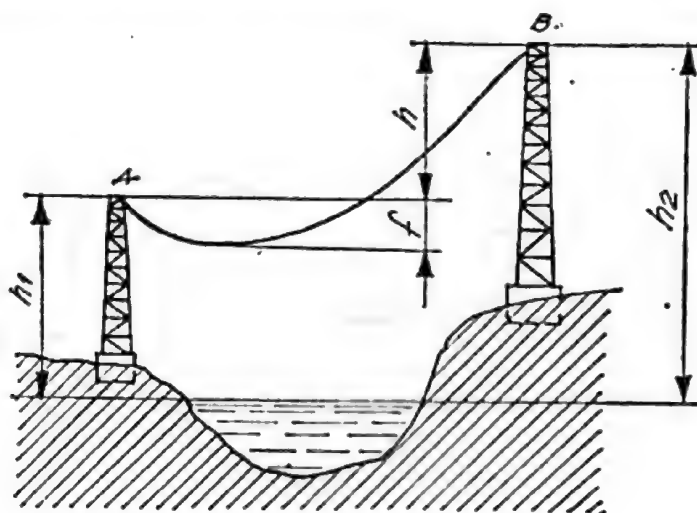


Fig. 24.32

greutății proprii a cablului referitoare la stîlpul stîng, este $f = 5$ m și forța care acționează vertical în cablu (se stabilește cu ajutorul condițiilor de durabilitate — rezistență) $F = 100\,000$ N, masa unui metru de cablu este $q = 2$ kg. Să se stabilească înălțimea necesară pentru stîlpul drept deci înălțimea punctului B . *Observație* : — la rezolvarea problemei, se folosește formula :

$$f = \frac{qgl^2}{8F} + \frac{Fh^2}{2qgl} - \frac{h}{2}, \text{ unde } h \text{ este diferența de înălțime}$$

între cele două puncte de fixare.

63. La executarea unei arături, flancul de brazdă trebuie să ia o formă stabilă (fig. 24.33 a). Poziția lui este stabilă dacă diagonală \overline{BD} este înclinată înspre partea opusă arăturii. Dacă diagonală

flancului brazdei este verticală (fig. 24.33 b) sau dacă este înclinată înspre partea arăturii, atunci poziția este labilă, deoarece flancul de brazdă poate să cadă înapoi în arătură. Să se găsească relația

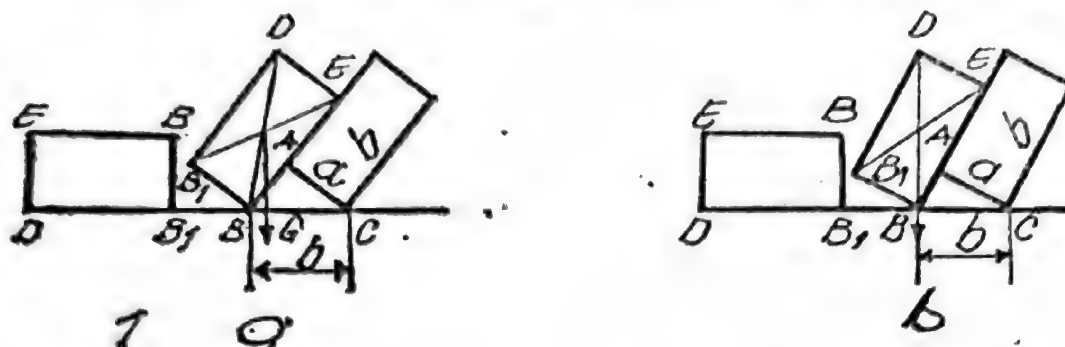


Fig. 24.33

dintre lățimea flancului brazdei, b , și adâncimea arăturii, a , la care flancurile brazdei să aibă o poziție stabilă.

64. Pe mijlocul (centrul) unei scînduri de lemn, așezată pe doi suporti (fig. 24.34), cade un corp de masă $m = 20 \text{ kg}$

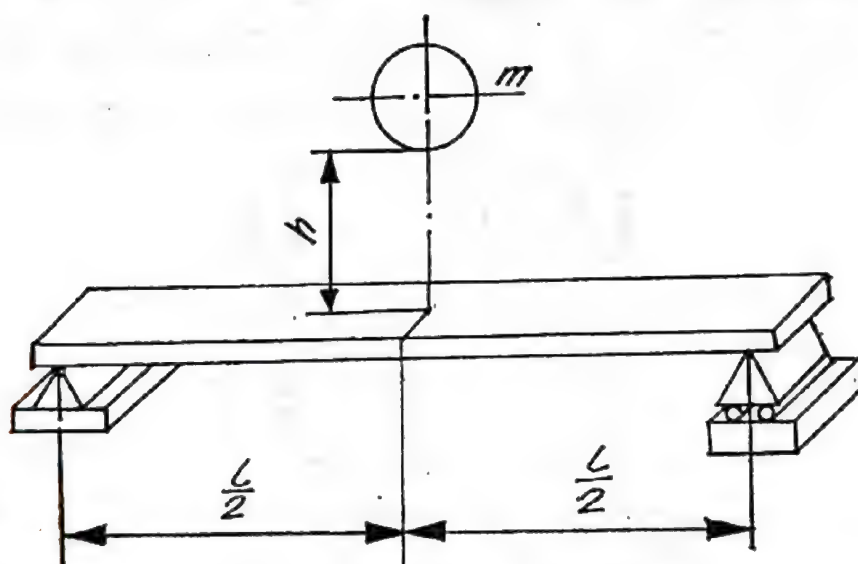


Fig. 24.34

de la înălțimea $h = 0,5 \text{ m}$, iar scîndura are rigiditatea $c = 5000 \text{ N/cm}^2$.

Să se determine forța rezultată, \vec{F} , care, aplicată pe mijlocul scîndurii, determină o săgeată echivalentă cu cea produsă prin șoc.

Observații: La rezolvarea problemei, se va deduce, că energia potențială, care o are scîndura în timpul săgeții, este

$$W_p = \frac{F^2}{2c}.$$

Greutatea scîndurii este neglijabilă în comparație cu greutatea corpului care cade.

65. Dintr-un rezervor, umplut pînă la înălțimea h (fig. 24.35), curge păcură printr-un mic orificiu. Relația dintre canti-

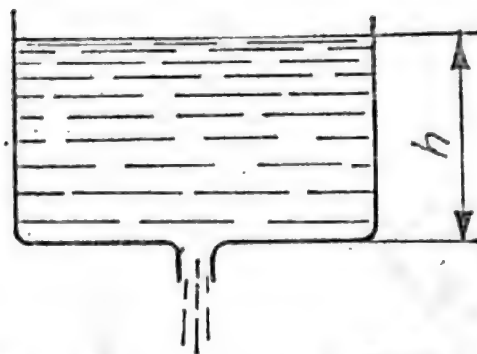


Fig. 24.35

tatea care se scurge pe secundă, q , și înălțimea h a coloanei de lichid, se poate exprima prin funcția liniară $q = ah$, unde a este un factor de proporționalitate, care depinde de felul lichidului și de diametrul orificiului. Să se stabilească o relație, cu ajutorul căreia se poate calcula cantitatea lichidului care curge în timpul t , dacă suprafața lichidului din rezervor are aria A . Mai departe se admite, prin aproximație, că presiunea rămâne constantă în timp.

66. La calculul stabilității unei macarale (fig. 24.36) coeficientul de rezistență statică este raportul dintre momentul de inerție și momentul de răsturnare. Pentru momentul de inerție este valabilă relația: $M = F_k(l_k + b) - F_R(l - b)$, unde \vec{F}_k este forța cu

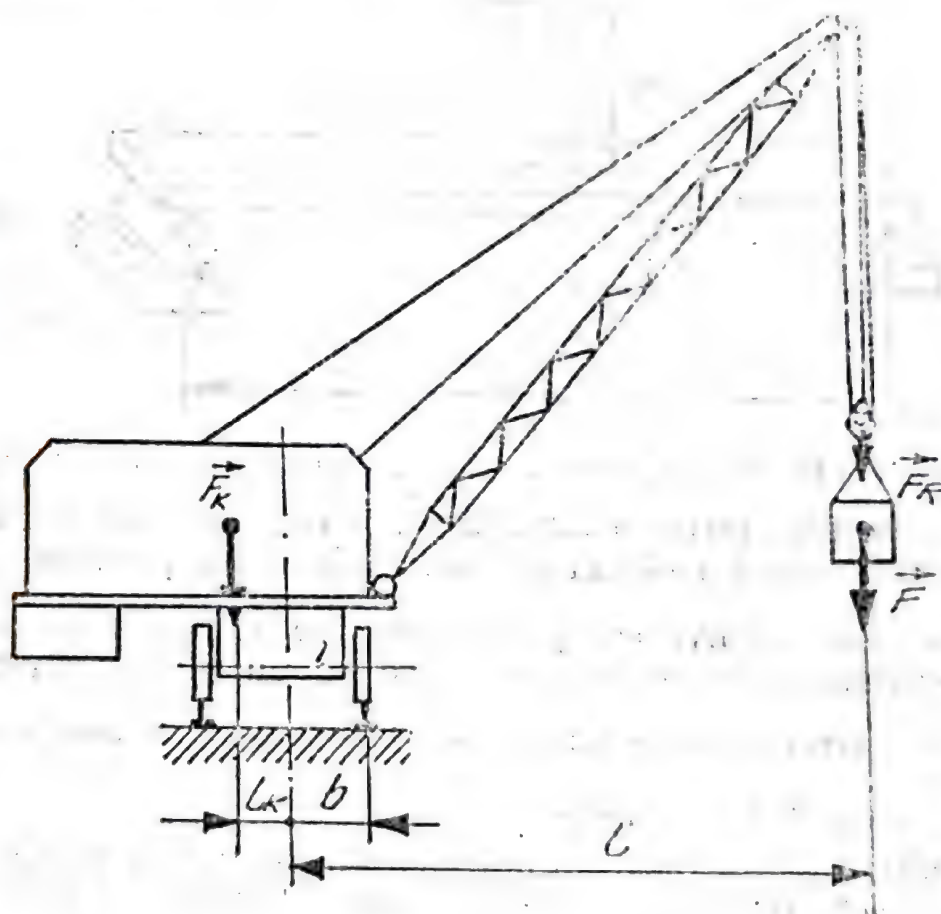


Fig. 24.36

care macaraua acționează pe suportul ei, \vec{F}_R forța cu care rola și cîrligul trag cablul, l_k distanța dintre centrul de greutate al macaralei și a axei ei de rotație, l distanța dintre centrul de greutate a sarcinii și axa de rotire a macaralei, iar b jumătate din ecartamentul șinelor. Pentru momentul de răsturnare avem relația :

$M_r = F(l-b)$, unde F este capacitatea de ridicare a macaralei. După normele în vigoare, coeficientul de stabilitate statică nu este mai mic de 1,5:

$$K = \frac{M_t}{M_r} = \frac{F_k(l_R + b) - F_R(l - b)}{F(l - b)} \geq 1,4$$

Admițînd că sînt dați toți parametrii macaralei, să se stabilească limita stabilității macaralei.

67. Un dinamometru D este intercalat în cablul fix al unui scripete (fig. 24.37). Numărul cablurilor (fără capătul liber) este

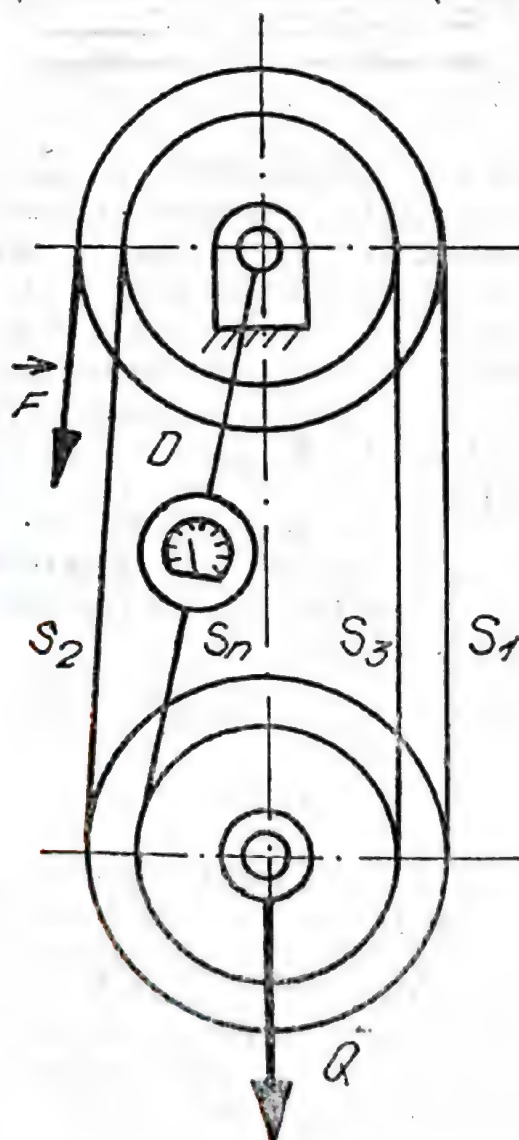


Fig. 24.37

$n = 4$. Dinamometrul indică sarcina $Q = 2430 \text{ N}$. Să se stabilească mărimea sarcinei \vec{Q} și forța \vec{F} , cunoscând coeficientul de rezistență al roților, $k = 1,02$.

68. Să se stabilească forța necesară, pentru a ridica un lanț greu în poziție verticală, cunoscând masa lanțului, m și lungimea lui l (fig. 24.38).

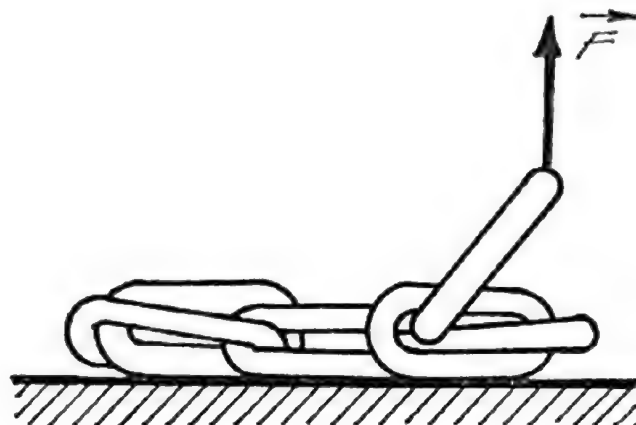


Fig. 24.38

69. La o probă un avion zboară de la un aeroport la un punct dinainte stabilit o distanță (s), pentru care necesită timpul t_1 ; apoi, el se întoarce la aeroport cu timpul t_2 . În tot timpul zborului pilotul a menținut aceeași viteză de zbor. Diferența de timp se datorează influenței vântului, care întâi a suflat în direcția zborului, apoi însă în sens contrar, cu o viteză constantă ($t_1 < t_2$).

Să se stabilească viteza proprie a avionului față de vînt, V , viteza vîntului v_w și distanța S , pe care a parcurs-o avionul zburînd în sens contrar.

70. Un gaz este comprimat într-un rezervor ai cărui pereți sînt buni conducători de căldură. Între temperatura absolută și presiunea gazului există relația :

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{T_2}{T_1} \frac{n}{n-1},$$

unde $n = 1,2$ este exponentul căldurii specifice; p_1 și, respectiv, p_2 sînt presiunile primei și, respectiv, situației a doua; T_1 și, respectiv, T_2 sînt temperaturile absolute ale primei și, respectiv, ale situației a doua. Temperatura din recipient se măsoară cu ajutorul unui termoelement fixat în interior. La comprimarea gazului, temperatura a crescut cu 5 K . Să se stabilească creșterea presiunii. Se cunosc temperatura $T_1 = 300 \text{ K}$ și presiunea $p_1 = 20 \text{ N/cm}^2$.

71. La executarea unei sărituri cu întârzierea deschiderii parașutei, un parașutist a părăsit avionul la o înălțime de $h = 5\,000\text{ m}$ și a aterizat după $t_0 = 5\text{ min}$ în regiunea prevăzută. Parașuta a căzut cu o viteză medie $v = 7\text{ m/s}$. Accelerația gravitației este $g = 9,81\text{ m/s}^2$. Să se stabilească timpul t_1 al căderii libere și t_2 al zborului cu parașuta deschisă (Rezistența aerului va fi neglijată).

72. Să se studieze variația gravitației unui corp în raport cu latitudinea geografică.

73. Să se determine viteza unghiulară și viteza liniară pentru punctele de pe suprafața globului pământesc, precum și accelerația lor normală.

74. Forța \vec{P} se descompune în două componente. Una are chiar mărimea forței \vec{P} și formează cu ea un unghi α . Să se afle mărimea componentei a doua și unghiul α pe care-l formează cu forța \vec{P} .

75. Condiția ca în materialul unui tub cu pereți groși să existe deformări plastice (permanente) sub acțiunea unei presiuni interioare, rezultă din relația :

$$\sigma_r = \frac{\sqrt{3 R^4 + r^4}}{R^2 - r^2} \varepsilon p,$$

unde σ_r este limita de curgere a materialului din care este confecționat tubul, iar p — presiunea interioară în tub.

Determinați valoarea maximă a presiunii prin depășirea căreia, oricât de mare ar fi grosimea peretelui tubului, în materialul acestuia vor lua naștere deformări plastice.

76. Din calculul de rezistență la flambaj a unei coloane cilindrice de fontă cu secțiunea circulară inelară a rezultat valoarea momentului de inerție axial :

$$I = \frac{\pi}{64} (D^4 - d^4).$$

a) Exprimați raza de inerție i , a cărei expresie este :

$$i = \sqrt{\frac{I}{A}},$$

în funcție de D și a (raza de inerție este folosită în calcule de stabilitate a coloanelor sau stîlpilor solicitați la compresiune);

b) Calculați diametrele D și d , ținînd seama de rezultatul de la punctul a).

77. Un laminor este format din 2 cilindri cu diametrul $2r = 50$ cm, care se rotesc în sens opus. Distanța dintre cilindri fiind a și coeficientul de frecare dintre metal și cilindrii laminorului fiind $k = 0,1$, se cere :

a) Să se arate că, pentru a fi posibilă obținerea tablei din laminat, unghiul de frecare dintre valțuri și laminor trebuie să fie mai mare ca unghiul la centru.

b) Să se determine grosimea maximă b a materialului care poate fi laminat.

78. Banda dispozitivului unui oscilograf, care servește la înregistrarea oscilațiilor armonice, se deplasează de la stînga spre dreapta cu viteza $v_0 = 2$ m/s. Corpul în oscilație descrie o sinusoidă a cărei ordonată maximă $AB = a = 2,5$ cm, iar lungimea de undă este $AC = \lambda = 8$ cm. Să se afle ecuația oscilației armonice înregistrată pe oscilograf, presupunînd că în momentul inițial, $t = 0$, punctul în mișcare se află în centrul de oscilație O .

79. Se fixează în punctul O o bară omogenă, OAB , formată din două segmente : $OA = a$, $OB = b$, înclinate una față de alta cu un unghi. Să se calculeze unghiurile α și β făcute de verticala punctului de suspensie O cu OA și OB în poziția de echilibru.

80. În figura 24.39 este arătat schematic un mecanism cu pîrghii format din trei elemente, care se mișcă în îmbinările A , B și punctele de articulație M_1 și M_2 , care sînt fixe. De aceea distanța M_1M_2 este fixă, iar celelalte trei distanțe M_1A , AB și BM_2

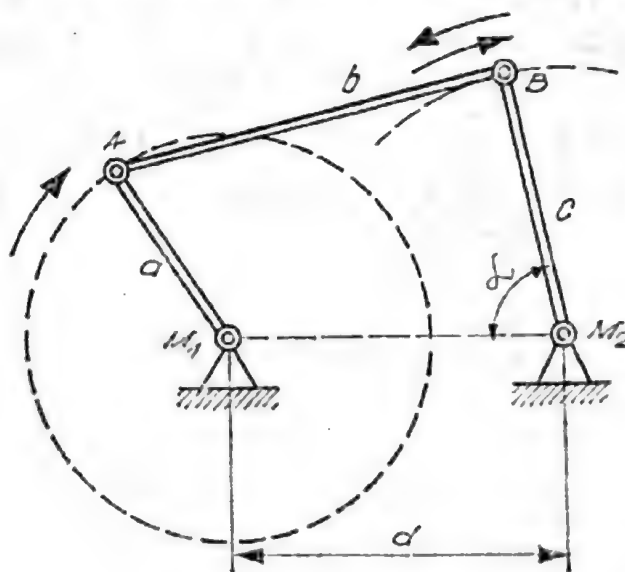


Fig. 24.39

se pot roti sau mișca. Să se determine condițiile pentru ca un element al mecanismului (de exemplu M_1A), care este fixat în M_1 , să se poată roti liber (adică să execute mișcarea unei pirghii).

81. La ce înălțime trebuie așezat un bec cu intensitatea luminii I , deasupra unei suprafețe pătrate cu latura a (în m), pentru ca centrul fiecărei muchii laterale a acestei suprafețe, să aibă iluminare maximă (fig. 24.40)?

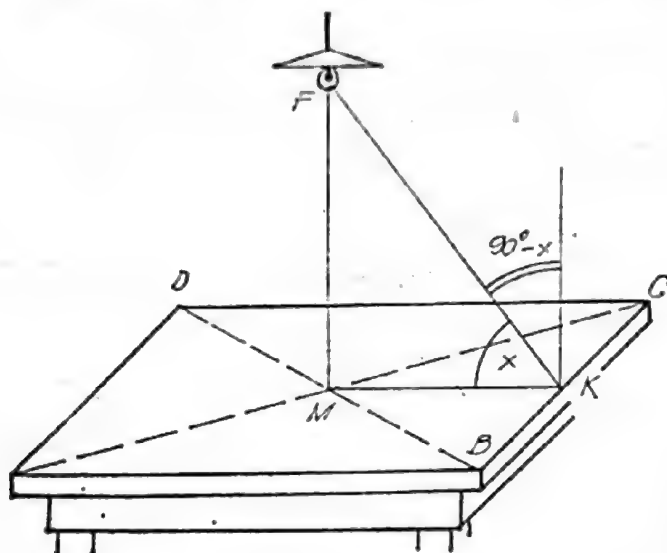


Fig. 24.40

82. Într-o baie de apă pentru călirea pieselor din oțel se găsește apă la o temperatură de 6°C . În această baie se pun piese care sînt încălzite la 850°C . Cîtă apă trebuie pusă în baie pentru ca, menținînd constant volumul pieselor, temperatura medie să fie între 50°C și 70°C ?

83. Un tablou este fixat la înălțimea $BF = h_1$ față de podea și formează cu peretele un unghi (fig. 24.41).

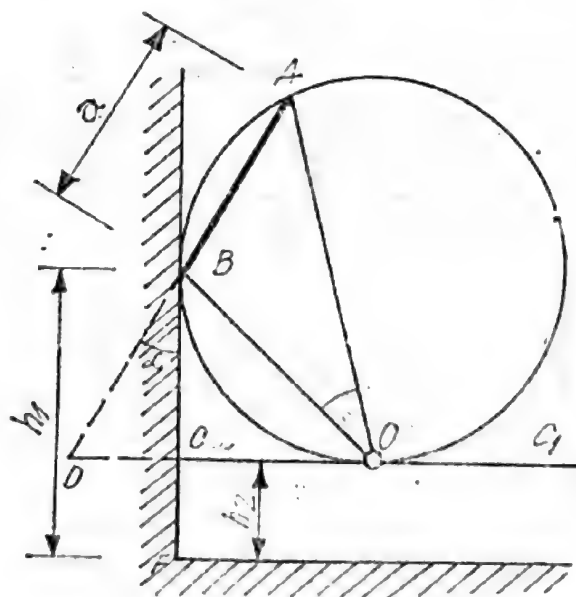


Fig. 24.41

Să se examineze la ce distanță de perete trebuie să stea un vizitator, pentru ca să vadă tabloul sub unghiul cel mai mare. Lățimea tabloului este $AB = a$, iar ochii vizitatorului sînt în medie la înălțimea h_2 de podea.

84. Un coridor de lungime, $a = 20$ m trebuie să fie iluminat de trei lămpi, care sînt așezate în linie dreaptă la o înălțime de 4 m față de pardoseală (fig. 24.42). Două lămpi cu intensitate egală sînt așezate în capetele coridorului, iar a treia este plasată la mijloc.

Ce intensitate trebuie să aibă fiecare lampă astfel ca iluminarea la capetele coridorului să nu fie sub 8 lueși și la mijloc să nu fie peste 10 lueși?

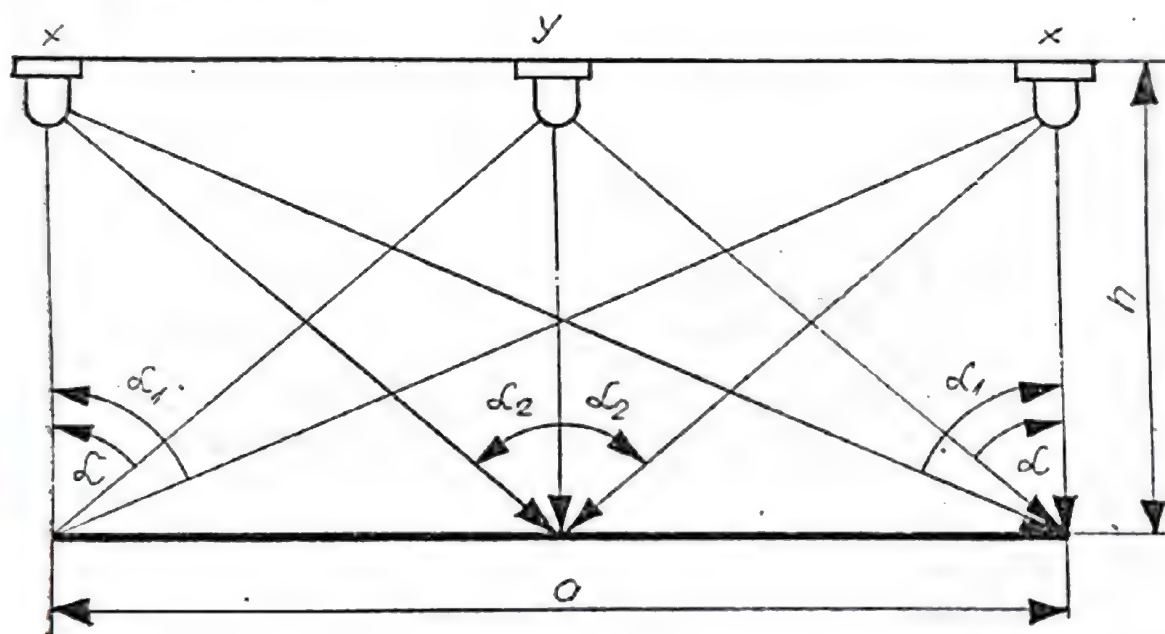


Fig. 24.42

85. Un rezervor cilindric deschis pentru depozitarea lichidelor (fig. 24.43) are volumul $V = 10$ m³. Să se determine diametrul d și înălțimea h pentru greutatea cea mai mică a rezervorului, dacă grosimea tablei, care se folosește pentru peretele cilindric și pentru fundul rezervorului, este aceeași.

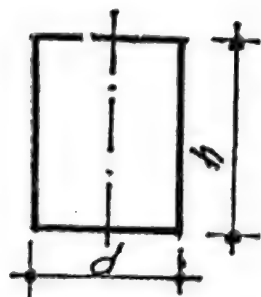


Fig. 24.43

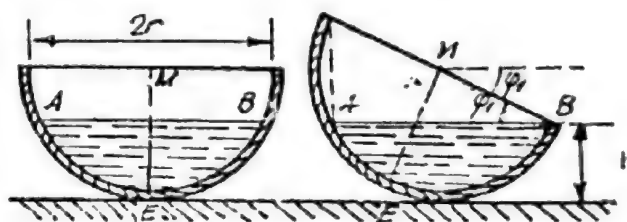


Fig. 24.44

86. Raportul dintre suprafața și secțiunea unei conducte din țevă și perimetrul umezit se numește rază hidraulică. Cu cât raza hidraulică este mai mare, cu atât mai mică este scăderea de presiune de-a lungul conductei. Să se stabilească laturile secțiunii dreptunghiulare a conductei, unde scăderea de presiune este mai mică, dacă aria secțiunii țevii este A .

87. Un recipient de forma unei semisfere cu diametrul interior $2r$, este umplut pînă la jumătatea înălțimii b cu lichid. Recipientul se înclină astfel încît lichidul să nu curgă. Care valori sînt admise pentru unghiul de înclinare (fig. 24.44)?

88. Pentru a stabili nivelul lichidului într-un rezervor închis, se folosește un plutitor A (fig. 24.45a). Acest plutitor semnalizează, cu ajutorul a 2 contacte (C și D) nivelul cel mai scăzut sau cel

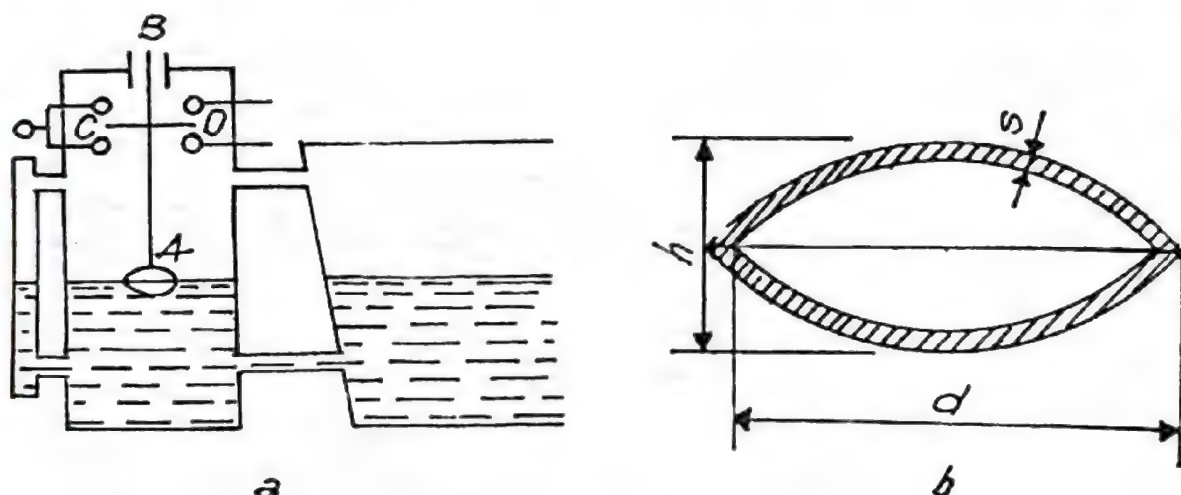


Fig. 24.45

mai ridicat al lichidului. Să confecționăm un plutitor pentru un rezervor de păcură (plutitor pentru instalația de control a rezervorului). Plutitorul să fie compus din 2 semisfere ale unei bile goale, care au următoarele dimensiuni: diametrul $d = 20$ cm, înălțimea $h = 10$ cm și grosimea peretelui $s = 0,2$ cm (fig. 24.45 b).

Ce densitate trebuie să aibe materialul plutitorului, dacă adîncimea de scufundare este între $h_1 = 3$ cm și $h_2 = 4$ cm și pîrghia \overline{AB} cu placa de contact \overline{CD} are împreună $m_3 = 147$ g?

89. Într-un recipient închis se află un lichid și un gaz sub presiune (fig. 24.46). Printr-o măsurare s-a stabilit presiunea p_1 într-un punct A și presiunea p_2 într-un punct B . Se cere presiunea gazului în recipient, distanța punctului A de la suprafață și

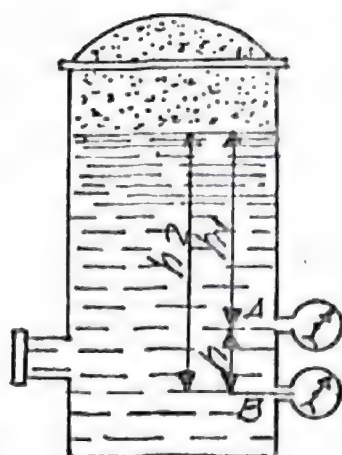


Fig. 24.46

distanța între punctele A și B , dacă lichidul are densitatea ρ și punctul B are distanța h_2 de la suprafață. Pentru rezolvare se va folosi ecuația de bază din hidrostatică.

90. Figura 24.47 arată mecanismul unui arbore cotit cu bielă. Asemenea mecanisme se folosesc la transformarea unei mișcări de

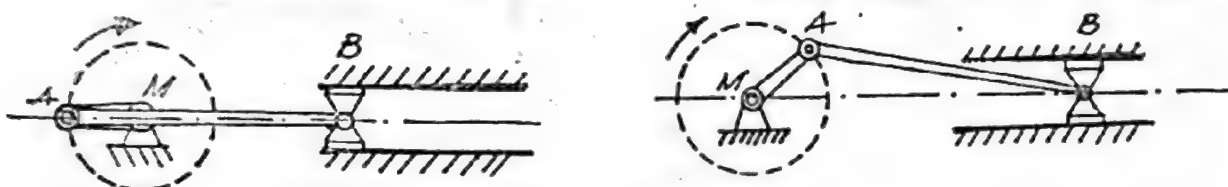


Fig. 24.47

rotație a unui arbore cotit, printr-o bielă motoare, într-o mișcare liniară (de translație) a unui ghidaj (a) sau invers, o mișcare de translație a unui ghidaj într-o mișcare de rotație a brațului manivelei (b). Să se stabilească lungimea manivelei \overline{MA} și lungimea bielei motoare \overline{AB} , așa încît :

a) Distanța ghidajului B de la centrul de rotație a brațului manivelei să nu fie mai mic de m milimetri și mai mare de m_1 milimetri.

b) Unghiul între biele motoare \overline{AB} și linia de unire \overline{MB} să nu fie mai mic decît α și mai mare decît α_1 .

91. Un instrument optic, care poate fi rotit în jurul axului său, are o scală liniară orizontală, și este așezat la o anumită distanță de o oglindă. Oglinda este prevăzută cu un indicator k , perpendicular pe suprafața oglinzii, deasupra axului de rotație. Printr-o fantă D din scală, cade o rază de lumină \overline{DC} pe oglindă.

Acolo raza este reflectată și pe scală apare marca de lumină F . Să se arate că $\overline{ED} < \overline{DO}$ și $\overline{EF} < \overline{FO}$, dacă E este acel punct care prin indicatorul OK este marcat pe scală.

92. La controlul indicatorului de viteză la avioane se folosește metoda buclei (fig. 24.48). Avionul zboară cu o viteză egală, constantă de-a lungul distanței fixate (în desen arătat prin linie groasă). Primul observator pune în funcțiune cronometrul în momentul când avionul trece prin punctul A în direcția punctului B și oprește ceasul când avionul vine dinspre D și trece prin punctul E . El măsoară timpul t_1 , necesar pentru efectuarea buclei mari $ABCDE$.

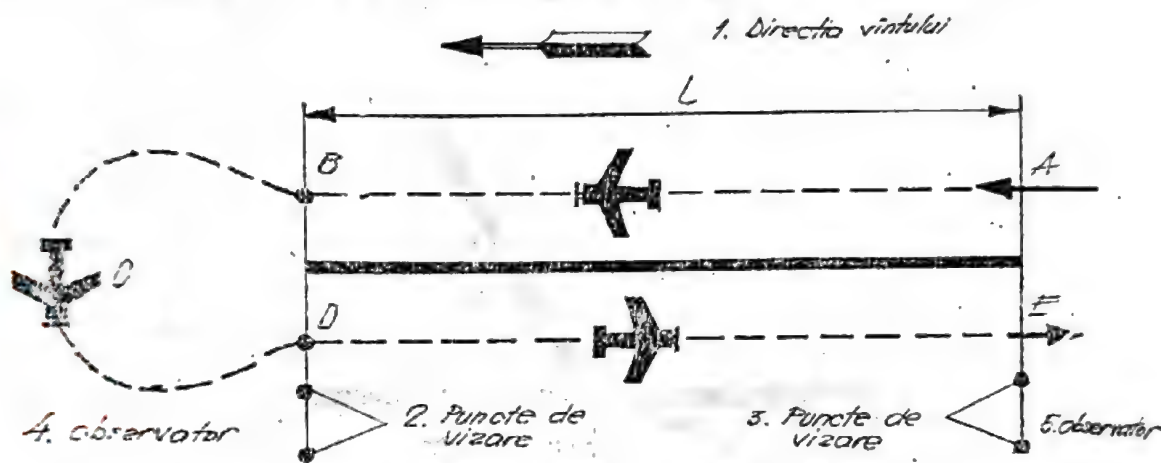


Fig. 24.48

Al doilea observator măsoară în același mod timpul t_2 , necesar pentru efectuarea buclei mici BCD . Deoarece se cunoaște lungimea l și viteza vântului v_0 (direcția vântului este însemnată printr-o săgeată), să se calculeze viteza proprie a avionului, v .

93. Un corp este mișcat pe durata de $x(s)$. În prima secundă el a parcurs 3 m, iar în fiecare secundă următoare cu 4 m mai mult decât în secunda anterioară. Dacă acest corp ar fi parcurs 1 m în prima secundă, iar în fiecare următoare secundă 8 m mai mult decât în cea anterioară, atunci în acest timp el ar fi parcurs un drum care s-ar fi deosebit foarte puțin de drumul parcurs în realitate. Drumul parcurs este mai mare de 6 m și mai mic de 30 m, distanță totală. Să se calculeze durata totală a mișcării corpului.

94. Un șir alcătuit din (n) rezistențe dă următoarele valori : $(n+1) \Omega$; $(n+2) \Omega$, ..., $(2n-1) \Omega$; $2n \Omega$.

Să se arate că rezistența totală la o legare în paralel va fi mai mică decât 2Ω .

95. Să se determine adâncimea de așchiere t (mm), în cazul frezării unei suprafețe plane cu o freză cilindrică avînd diametrul D (mm), astfel încît grosimea maximă a așchiei a_{\max} (mm) să nu depășească o anumită valoare. (Valoarea lui a_{\max} influențează puterea necesară la așchiere în cazul frezării).

96. Pe un teren în punctul A sînt locuri de depozitare (fig. 24.49). Distanța h în km la o gară C este cunoscută. Distanța de la stația următoare B pe calea ferată la gara C este perpendiculară

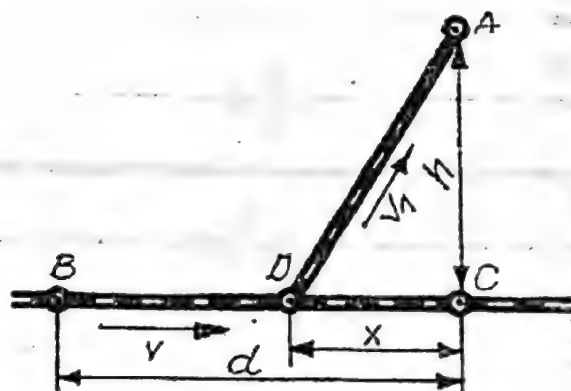


Fig. 24.49

pe AC și este de asemenea cunoscută reprezentînd d (km). Distanța BC este dreaptă dar pe aceasta trebuie să determinăm punctul D de la care trasăm o cale ferată îngustă pînă la locul de depozitare. La ce distanță de punctul C trebuie să fie punctul D pentru ca trecerea prin traseul $BD + DA$ să se facă în cel mai scurt timp știind că pe linia principală se obține o viteză medie v (în km h^{-1}) și pe linia secundară se poate atinge o viteză medie v_1 (în km h^{-1}) și ($v_1 < v$)?

97. Un spectator se află la distanța a (m) de ecranul unei săli de cinematograf a cărei înălțime este h (m). La ce distanță trebuie să fie marginea de jos a ecranului de ochiul spectatorului, pentru ca filmul să se vadă sub unghiul vizual cel mai mare?

Observație : Cu cît unghiul vizual sub care se privește un obiect este mai mare cu atît se vede mai clar obiectul respectiv.

98. O țeavă îndoită face legătura între două baloane care sint umplute cu gaz, sub presiuni diferite. Bazele sint despărțite prin-

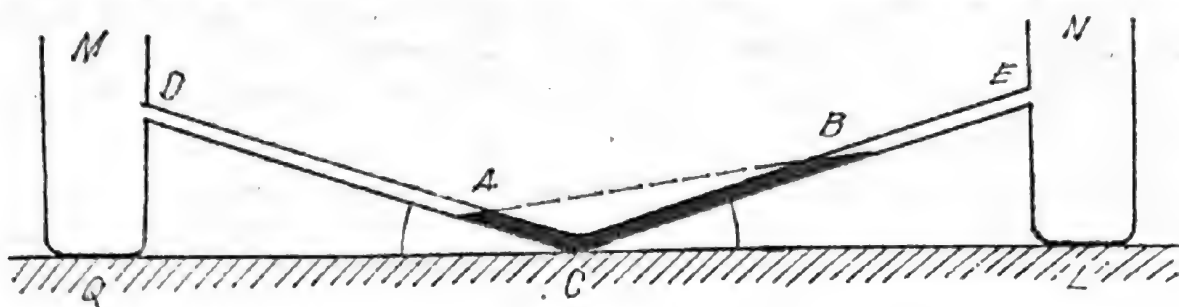


Fig. 24.50

tr-o cantitate necunoscută de mercur așezată în cotul țevii DCE (fig. 24.50).

Punctele D , C și E sint așezate în același plan și unghiurile DCQ și ECL trebuie să fie egale. Admitem că volumul mercurului este necunoscut și că țeava este așezată într-o încăpere a cărei temperatură nu o cunoaștem. Arătați că distanța AB între cele două puncte de nivel a mercurului, are valoarea cea mai mică dacă presiunea în baloane este egală.

99. Trei întreprinderi A , B și C sint așezate astfel încît să formeze un triunghi, unde $b < c < a$. Cazarea muncitorilor se face în punctul O care este la egală distanță de laturile triunghiului. Punctele A , B , C și O sint legate prin șosele drepte. Un autobuz pleacă din punctul O și duce muncitorii la locurile lor de muncă și întoarce la O , mergînd numai pe drumurile marcate. Care este ruta cea mai scurtă a autobuzului?

100. Punctele A și B sint pe malurile opuse ale unui rîu, unde punctul B față de punctul A se află în avalul rîului. Viteza curen-
tului apei este egală cu v , direcția curentului formează cu linia de
unire a punctelor AB un unghi α (fig. 24.51). Se presupune că

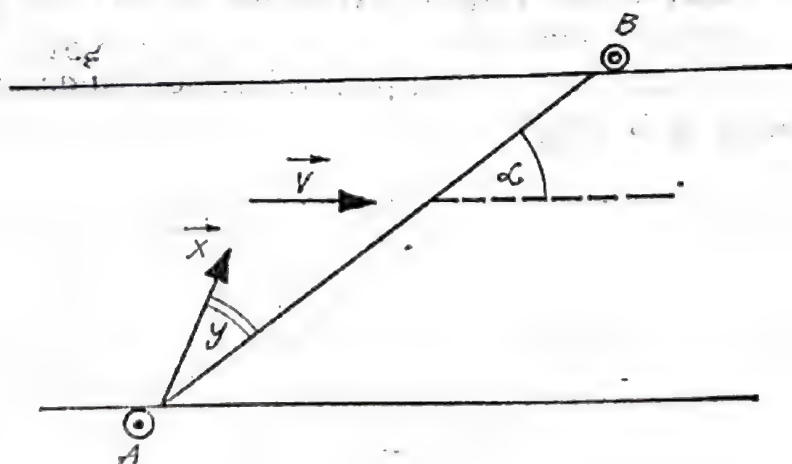


Fig. 24.51

viteza curentului pe întreaga lățime a riului este aceeași. Un vapor face legătura între A și B de-a lungul distanței AB , impunându-se să nu se facă de la A la B mai puțin de t (în min), iar de la B la A nu mai mult de t_1 (în min) ($t < t_1$).

Care este viteza vaporului și devierea de la curs față de distanța AB ?

101. La un strung universal cu trei mandrine se strunjește un ax scurt excentric (fig. 24.52). Excentricitatea (deplasarea axului

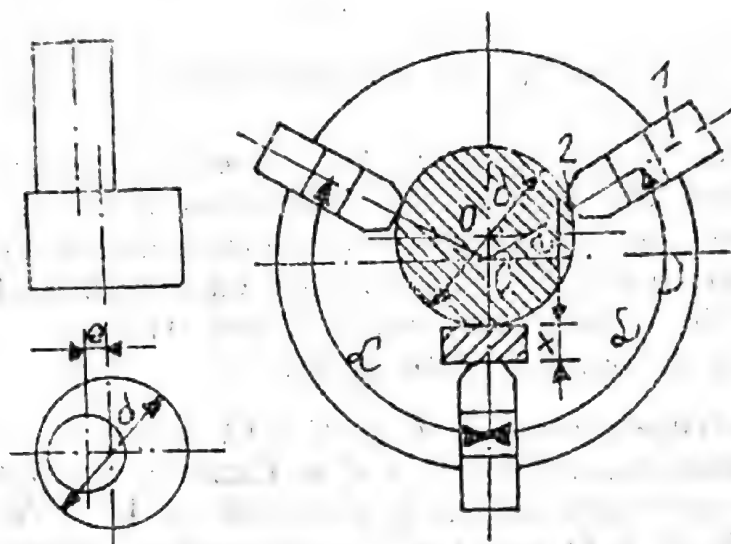


Fig. 24.52

părții cilindrice) este $e = 10$ mm iar diametrul axului care este fixat între mandrine este de $d = 100$ mm, unghiul între mandrine este $\alpha = 120^\circ$. Calculați grosimea x a tablei care trebuie în acest caz fixată sub unul din bacuri.

102. Grîul treierat conține 1 % impurități. La fiecare trecere a grîului prin trior, aceste impurități se micșorează cu q %, cantitatea de grîu rămînînd aceeași.

De cîte ori trebuie trecut grîul prin trior, pentru ca impuritățile să fie cel puțin sub f %?

Capitolul 25

EXERCII ȘI PROBLEME DATE LA ADMITERE
ÎN TREAPTA A DOUA

- Să se calculeze: $\left(\frac{\sin A}{\cos B} + \frac{\cos C}{\sin A} \right) : \operatorname{tg} (B+C)$,

unde A, B, C sînt unghiurile unui triunghi dreptunghic isoscel.

- Se consideră: $f: R \rightarrow R$, $f(x) = mx^2 + (m+1)x - 2m+1$, $m \in R$.

1. Pentru ce valori ale lui m graficul funcției $f(x)$ se reduce la o dreaptă? În acest caz să se studieze variația funcției și să se reprezinte grafic.

2. Arătați că $f(x) = 0$ nu are rădăcină dublă, oricare ar fi $m \in R$.

- Să se rezolve ecuația:

$$(\sqrt{3} - i)z^4 - z^2 = 0,$$

- Demonstrați propozițiile:

„dacă și numai dacă în triunghiul ABC există relația $\sin A = 2 \sin B \cos C$, atunci el este isoscel“.

● Fie triunghiul ABC , ($\hat{A} = 90^\circ$) în care $BC = 4a$, $\hat{C} = 30^\circ$, și M piciorul înălțimii din A . În A se ridică pe planul triunghiului perpendiculara $AV = 3a$.

1) Să se determine mărimea unghiului diedru dintre planele VBC și ABC . Să se arate că triunghiul VAM este asemenea cu triunghiul ABC .

2) Calculați aria totală și volumul piramidei $VABC$.

- Se consideră:

$$f: [0, 5] \rightarrow R, f(x) = x - 1$$

a) Să se determine mulțimea valorilor funcției f .

b) Să se reprezinte grafic funcția.

c) Să se studieze semnul funcției.

● Să se rezolve ecuația :

$$\frac{1}{2} \log_2(x^2 + x + 2) - \log_2(3x - 2) = 1.$$

● Să se calculeze valoarea numerică a expresiei :

$$E(x) = \frac{2 \sin \frac{x}{2} - \operatorname{tg} 2x}{\cos 3x + \operatorname{ctg} \frac{5x}{2}}, \text{ pentru } x = \frac{\pi}{2}.$$

● Fie triunghiul ABC ($\hat{A} = 90^\circ$) în care $AB = AC = a$ și M piciorul înălțimii din A . În A se ridică pe planul triunghiului perpendiculara $AV = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

a) Calculați volumul și aria totală a piramidei $VABC$.

b) Să se determine mărimea unghiului diedru dintre planele VBC și ABC .

● Se consideră $f: R \rightarrow R, f(x) = ax + b; a, b, \in R, a \neq 0$.

Se cere :

a) Să se determine a și b știind că graficul funcției f trece prin origine și prin punctul $P(1, 4)$.

b) Să se reprezinte grafic $f(x) = 4x$ pentru $x \in (-1, 1]$.

c) Să se arate că oricare ar fi numerele reale x_1 și x_2 este adevărată relația :

$$\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} = f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right).$$

● Să se rezolve ecuația

$$\lg(x+1) - 2 \lg(x-1) = 1.$$

● Să se calculeze $\sin(\alpha - 2\beta)$, știind că :

$$\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}, \cos \beta = \frac{1}{2}, \text{ iar } \alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right); \beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

- Să se verifice identitatea :

$$\operatorname{tga} + \operatorname{ctga} = \frac{2}{\sin 2a}$$

● Baza unei piramide este un romb, iar înălțimea ei trece prin punctul de intersecție al diagonalelor rombului.

- Demonstrați că fețele laterale ale piramidei sînt egale.
 - Calculați volumul piramidei știind că diagonalele bazei și înălțimea sînt respectiv 4 cm, 5 cm, 6 cm.
- Fie ecuația :

$$(m+1)x^2 - mx - 2m = 0, \text{ unde } m \in R.$$

- Să se discute și să se rezolve ecuația presupunînd $m \neq -1$.
- Să se arate apoi că dacă m tinde la -1 , una din rădăcinile ecuației tinde către rădăcina ecuației care se obține din cea dată pentru $m = -1$.

c) Presupunînd că $m \geq 0$, să se arate că $S = x_1 + x_2$ este funcție crescătoare de m și că $S \in [0, 1)$.

d) Să se calculeze aria suprafețe limitată de graficul funcției

$$f: R \rightarrow R, f(x) = x^2 \text{ și dreptele de ecuații } y = 0; y = 1.$$

● Se dă triunghiul echilateral ABC de latură a . În vîrfurile A și C se duc perpendiculara pe latura AC care este întîlnită în punctul D de paralela la AB dusă prin vîrfurile B și C .

1. Să se arate că :

- Mediana AM a triunghiului ACD este paralelă cu BC .
- Aria triunghiului ACD este dublul ariei triunghiului echilateral dat.

2. Să se calculeze aria și volumul corpului obținut prin rotirea triunghiului ABC în jurul unei laturi.

● Să se determine mulțimile A , B , știind că sînt îndeplinite condițiile :

$$a) A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$b) A \cap B = \{1, 2\}$$

$$c) A - B = \{5\}$$

- Să se rezolve ecuațiile :

a) $2^{x+1} = 32$; $\sqrt[3]{5^x} = \sqrt[3]{25}$;

b) $\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) - \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 0$.

- Folosind proprietățile logaritmilor să se dezvolte:

$$\log_2 \frac{5x^3y^2}{2a^2b}.$$

- Să se restrângă expresia :

$$2 \log \sqrt{a} + 3 \log b - 6 \log c.$$

- O sferă ce are aria egală cu $400\pi \text{ cm}^2$ se secționează cu două plane paralele situate de o parte și de alta a centrului. Ariile celor două secțiuni sînt de $36\pi \text{ cm}^2$ și $64\pi \text{ cm}^2$. Să se afle :

a) volumul sferei,

b) aria laterală și volumul trunchiului de con ce are ca bazele două secțiuni.

- Se dau mulțimile :

$$A = \{3, 4, 5, 6\}; B = \{2, 3, 5, 7\}.$$

Să se afle $A \cup B$ și $A \cap B$.

- Considerăm : $f: R \rightarrow R$; $f(x) = ax^2 + bx + c$; $a, b, c \in R$, $a \neq 0$.
Se cere :

a) Să se afle valorile care satisfac relația : $f(x) = 0$ cînd $a = 2$,

$$b = 3, c = -2.$$

b) Pentru aceste valori ale constantelor a, b, c , să se stabilească punctul de minim al funcției.

c) Să se traseze graficul funcției de la punctul a).

d) Considerînd funcția dată în enunț, să se stabilească a, b și c , astfel ca graficul funcției să taie axa Ox în punctele $x = 2$ și $x = 4$ și să admită un minim pentru $x = 3$, $y = -1$.

- Să se rezolve ecuațiile :

$$\cos \left(x - \frac{\pi}{3} \right) - \cos \frac{\pi}{4} = 0$$

$$2^x + 2^{2x} = 72$$

- Într-o piramidă patrulateră regulată se cunoaște latura bazei egală cu 6 cm și înălțimea de 4 cm.

Să se calculeze aria totală și volumul piramidei.

- Se dau mulțimile :

$$A = \{2, 3, 4, 5\}, B = \{1, 2, 4\}$$

Să se afle : $A \cup B$ și $A \cap B$.

- Să se stabilească mulțimea care satisface relația :

$$3x - 5 > x - 2$$

- Să se rezolve ecuațiile :

a) $x^2 - 3x + 2 = 0,$

b) $\cos \left(x - \frac{\pi}{3} \right) - 1 = 0,$

c) $2^{x+1} + 2^x = 2^{x+2}.$

- Să se reprezinte grafic funcția :

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; f(x) = x^2 - 3x + 2.$$

- Să se demonstreze prin metoda inducției complete că :

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}, n \in \mathbb{N}.$$

- Se dă un cilindru circular drept cu raza r și înălțimea H și un con circular cu raza R , cercul de bază fiind coplanar și concentric cu una din bazele cilindrului, vârful conului fiind situat în centrul celeilalte baze a cilindrului.

a) Să se determine raportul dintre R și r astfel ca cilindrul și conul să aibă același volum.

b) Să se afle H în funcție de r astfel încât cilindrul și conul să aibă același volum și aceeași arie laterală.

- Se dau mulțimile : $A = \{4, 5, 6, 7\}$ și $B = \{3, 5, 6\}$.

Să se calculeze $A \cup B$ și $A \cap B$.

- Să se stabilească mulțimea care satisface relația :

$$3x - 2 < 2x + 1$$

- Se consideră $f: R \rightarrow R$, $f(x) = ax + b$, $a, b \in R$.

a) Să se determine a și b astfel ca $f(1) = -1$ și $f(-1) = 5$,

b) Să se reprezinte grafic $f(x) = -3x + 2$,

c) Să se studieze semnul funcției $f(x) = -3x + 2$.

- Să se rezolve ecuația :

$$\sin \left(2x - \frac{\pi}{4} \right) - 1 = 0.$$

● Se dă triunghiul ABC înscris în cercul O . Din vîrfurile B și C se duc înălțimile BM și ON . Să se demonstreze că tangenta la cerc în A este paralelă cu MN .

● Un trapez dreptunghic $ABCD$ (cu $\hat{B} = \hat{C} = 90^\circ$) se rotește în jurul unei axe paralele cu BC , distanța de la BC la axă fiind de 3 cm. Dacă : $AB = 12$ cm, $AD = 10$ cm și $CD = 4$ cm, să se afle :

a) volumul corpului generat ;

b) aria totală a corpului generat. Axa se consideră în afara trapezului.

● Să se scrie în ordine crescătoare primele 10 elemente ale mulțimii :

$$A = \{x \mid x \in N, x \text{ multiplu de } 2\}.$$

- Se dau mulțimile :

$$A = \{1, 2, 3, 4\} \text{ și } B = \{2, 4, 6\}.$$

Să se afle : $A \cup B$ și $A \cap B$.

- Să se rezolve ecuațiile :

a) $x^2 - 7x + 12 = 0$

b) $\log_{10} (x+20) = 1$

c) $2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} = 14$.

● O piramidă are baza un trapez isoscel cu bazele de 10 dm și 4 dm, iar laturile egale de câte 5 dm. Înălțimea piramidei este de 4 dm. Se face o secțiune în piramidă printr-un plan paralel cu baza, dus printr-un punct situat pe înălțime la distanța de 1 dm de vîrf. Să se calculeze laturile secțiunii și aria ei. Să se afle volumul piramidei mici.

● Fie $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + m}$, $m \in R$.

a) Să se determine valorile lui m , astfel încît funcția f să fie definită pentru orice x real.

b) Să se determine m , astfel încît valoarea minimă a funcției să fie 3.

c) Pentru $m = 16$ să se determine mulțimea valorilor funcției.

● Să se rezolve ecuația :

$$\log x^2 = \frac{\log 4x^2}{\log 2x^2}$$

● Să se rezolve sistemul :

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{3}{2} \\ \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{5}{4} \end{cases}$$

● Să se rezolve ecuația :

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0.$$

● În punctele A și B ale unui cerc se duc două tangente care se întîlnesc în C . Prin A se duce o paralelă la BC care taie cercul în D . Dreapta CD intersectează cercul în E , iar dreapta AE intersectează pe BC în F . Să se demonstreze că :

a) $\widehat{ADE} = \widehat{CAE} = \widehat{BCE}$,

b) triunghiurile ACF și CEF sînt asemenea,

c) $FO^2 = FA \cdot EF$,

d) $FE = FC$.

● Un trunchi de piramidă regulată cu bazele pătrate de laturi a și b are înălțimea H . Să se afle înălțimea piramidei din care s-a format acest trunchi de piramidă.

● Să se determine parametrul m din ecuația :

$$x^2 - 8x + m = 0,$$

astfel încât rădăcinile x_1 și x_2 să satisfacă relațiile :

$$1) x_1 = x_2 \qquad 3) x_1 = \frac{1}{x_2}$$

$$2) x_1 = 3x_2 \qquad 4) x_1^2 + x_2^2 = 40$$

● Să se demonstreze prin metoda inducției complete :

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2n+1}$$

● Să se verifice identitatea :

$$\operatorname{tg} 2a + \frac{1}{\cos 2a} = \frac{\cos a + \sin a}{\cos a - \sin a}$$

● Se consideră triunghiul ABC dreptunghic în A , bisectoarea unghiului B intersectează înălțimea AD ($D \in BC$) în E și cateta AC în F .

a) Să se arate că $FA \cdot DB = DE \cdot AB$,

b) Să se arate că triunghiul AEF este isoscel.

● Să se afle aria și volumul corpului generat prin rotirea unui exagon regulat de latură a în jurul uneia din laturi.

● Se dă ecuația : $x^2 - mx + 1 = 0$, unde m este un parametru real.

a) Să se rezolve ecuația în cazul $m = 1$ și să se verifice una din rădăcinile obținute.

b) x_1 și x_2 fiind rădăcinile reale ale ecuației inițiale, să se calculeze fără a rezolva ecuația inițială :

$$E(m) = \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}, \text{ determinându-se apoi mulțimea valorilor}$$

lui m pentru care $E(m)$ este pozitivă.

● Piramida $SABCD$ are ca bază pătratul $ABCD$, de centru O , iar SO perpendiculară pe planul pătratului.

a) știind că : $AB = 3\sqrt{2}$ cm și $SA = 5$ cm, să se calculeze aria laterală și volumul piramidei.

b) se consideră M un punct de pe muchia SB .

a) arătați că $AC \perp OM$.

b) Să se determine unghiul făcut de OM cu planul pătratului, astfel încât aria triunghiului ACM să fie minimă.

● Să se rezolve ecuația : $4 \sin x \cos x = 1$.

● Să se arate că orice soluție a ecuației de la problema precedentă este soluție și pentru ecuația :

$$\cos^2 2x = 2 - 5 \sin x \cos x.$$

● Dacă numerele reale și pozitive a, b, c , verifică relațiile : $c = a^2 - b^2$ și $a > b + 1$, atunci funcția $f : (0, \infty) \rightarrow R$,

$$f(x) = \lg x \text{ este strict crescătoare.}$$

● Se dau numerele : $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$ și $z_2 = 1 - i\sqrt{3}$.

Să se calculeze : $z_1 + z_2$, $z_1 \cdot z_2$ și $\frac{z_1}{z_2}$.

● Folosind proprietățile logaritmilor, să se calculeze :

$$\log_a \frac{ab^r}{\sqrt{c}}$$

● Un con circular drept are raza bazei de 4 cm și înălțimea de 3 cm.

Să se afle :

a) volumul conului;

b) aria laterală a conului;

c) volumul sferei înscrise în con.

● Se dă $\sin x = \frac{4}{5}$, x avînd extremitatea în cadranul 1.

Să se calculeze $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\sin 2x$ și $\operatorname{tg} 2x$.

● Se dă expresia :

$$E(x) = \frac{x^2 + 4x}{x + 2}, x \in R - \{-2\}$$

a) Să se determine x , astfel ca $E(x) > 0$.

b) Să se calculeze $E\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, punându-se rezultatul sub forma :
 $A + B\sqrt{2}$.

c) Să se rezolve ecuația : $\lg(x^2 + 4x) - \lg(x + 2) = \lg 3$.

● Să se rezolve ecuația : $x^2 - x + 1 = 0$ și să se verifice soluțiile găsite.

● Se dă funcția $f: R \rightarrow R$ de forma $f(x) = x + 1$.

a) Să se reprezinte grafic funcția ;

b) Să se studieze semnul funcției ;

c) Să se precizeze monotonia funcției.

● Dintr-o piesă de oțel, avînd forma unei prisme regulate cu baza pătrat de latura 10 cm și înălțimea de 12 cm se strunjește o piesă cilindrică cu minimum de material pierdut. Să se afle :

a) Aria laterală și volumul piesei prismatice ;

b) Aria laterală și volumul piesei obținute.

● Să se verifice identitatea :

$$\frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 a} - \frac{1}{1 + \operatorname{ctg}^2 a} = \cos 2a$$

● Se dă funcția $f: R \rightarrow R$ de forma $f(x) = x^2 - x - 1$.

Se cere :

a) să se rezolve ecuația $x^2 - x - 1 = 0$ și să se verifice soluțiile găsite ;

b) să se construiască graficul funcției $f(x)$;

c) să se studieze semnul funcției.

● a) Să se verifice că $x = \frac{\pi}{6}$ este soluție a ecuației $\sqrt{3} \sin x - \cos x = 0$.

b) să se afle și celelalte soluții ale ecuației date.

● Să se determine mulțimile :

$$A = \{x \in R / x^2 - 5x + 6 = 0\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{R} / x^2 - 2x - 3 = 0\}$$

și apoi să se determine reuniunea și intersecția lor.

- Să se arate că expresia :

$$E = \frac{\cos x}{1 + \sin x} + \frac{\sin x}{1 + \cos x} + \frac{(1 - \sin x)(1 - \cos x)}{\sin x \cos x},$$

nu depinde de x .

● Un vas în formă de trunchi de con trebuie să aibă o capacitate de 900π litri și o adâncime de un metru. Știind că diametrul unei baze este de 1,20 m, se cere să se calculeze diametrul celeilalte baze.

● Știind că : $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{3}$ și $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$, să se calculeze $\sin \alpha$ și $\cos \alpha$.

● Să se rezolve ecuația : $\sqrt{x+7} + \sqrt{2x-3} = 4$.

● Fiind dat un triunghi echilateral ABC de latură a și un punct $M \in BC$, ducem prin M paralele MP și MQ la laturile AB și AC ($P \in AC$, $Q \in AB$)

a) Să se demonstreze că : $AP + AQ = a$.

b) Să se calculeze $\cos P$ și $\cos Q$ în funcție de l și a , P și Q fiind unghiurile triunghiului APQ .

- Fie mulțimile :

$$A = \{x/N, x = 3m + 1, m < N\}$$

$$B = \{x/N, x = 405 - 7n, n \in N, n \leq 57\}$$

$$C = \{x/N, x = 391 - 21p, p \in N, p < 18\}$$

Să se demonstreze că $A \cap B = C$

- Se dă familia de parabole :

$$f(x) = (1 - m^2)x^2 + (m - 1)x - (1 + m), m \in \mathbb{R}.$$

Să se determine valorile parametrului real m pentru care :

a) ecuația $f(x) = 0$ are rădăcini reale și de semne contrare.

b) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} \leq 2$, unde x_1 și x_2 sînt rădăcinile ecuației

$$f(x) = 0.$$

c) una din parabolele familiei are vîrful pe dreapta :

$$x - 2y + 4 = 0$$

● Să se demonstreze egalitatea :

$$\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \frac{n}{3n+1} \quad (n \in \mathbb{N})$$

● Fie ecuația : $\frac{2^x + a3^x}{2^x - a3^x} = 2, (a \in \mathbb{R})$

a) Să se rezolve ecuația.

b) Pentru ce valori ale parametrului real a rădăcina ecuației este un număr întreg.

● Se dă sferă de rază a cu centrul în O și un con circular drept cu vîrf în V circumscris sferei, ale cărei generatoare sînt tangente sferei în punctele situate pe un cerc de diametru AB . Se consideră de asemenea conul cu vîrf în O și avînd ca bază același cerc mic al sferei de diametru AB .

a) Să se afle volumele conurilor VAB și OAB în funcție de raza a și unghiul x (unde x este jumătatea unghiului de la vîrf V din secțiunea axială a conului circumscris).

b) Să se afle unghiul x știind că suma volumelor conurilor VAB și OAB este egală cu $\frac{3}{8}$ din volumul sferei.

c) Să se arate că volumul conului circumscris sferei este egal cu :

$$\frac{a^3(1 + \sin x)^2}{3 \sin x (1 - \sin x)},$$

și să se calculeze volumul pentru valoarea unghiului x găsit la punctul precedent.

● Se consideră familia de funcții de gradul II :

$$f(x) = 2mx^2 + (m-1)x + m-2.$$

Să se determine valorile parametrului real m astfel încât rădăcinile ecuației $f(x) = 0$ să fie:

a) inverse una alteia;

b) opuse una alteia;

c) egale.

● Să se găsească rangul termenului din dezvoltarea binomului :
 $\left(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{18}$, care conține pe x .

● Se da ecuația : $m \cos 6x + (4 - m) \sin 3x + 2 - m = 0$

a) Să se rezolve ecuația;

b) Să se afle valorile lui m pentru care toate soluțiile sunt reale;

c) Să se scrie soluțiile particulare cuprinse între 0° și 360° pentru $m = 2\sqrt{2}$.

● Se consideră un dreptunghi cu laturile $AB = CD = a$, $AD = BC = b$. O paralelă la latura BC întâlnește dreptele AB , AC , CD , respectiv în L , M , N .

Să se determine poziția acestei paralele, astfel ca rotind dreptunghiul în jurul laturii CD , volumul născut prin rotirea triunghiului ALM să fie egală cu volumul născut prin rotirea triunghiului MNC .

Să se arate că această poziție nu depinde de mărimea b .

● Să se rezolve ecuația :

$$3^2\sqrt[4]{x} - 4.3\sqrt[4]{x} + 3 = 0.$$

● Să se arate că : $(1 - \sin \alpha) x^2 - 2x \cos \alpha + 1 - \sin \alpha \geq 0$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

● Se consideră patrulaterul convex $ABCD$, în care $AB = AD = a$ (a dat), $BC = CD$, unghiul $BAD = 60^\circ$, unghiul $BCD = 120^\circ$. Se rotește patrulaterul în jurul laturii AB . Să se afle :

a) aria totală a corpului obținut;

b) volumul corpului obținut.

● Să se rezolve inecuația :

$$|x - 2| \leq 1$$

- Se dă ecuația : $(m+1)x^2 - 2mx + 4 - 3m = 0$.

Să se determine $m \in \mathbb{R}$, astfel încât :

- ecuația să admită rădăcini reale ;
- ecuația să admită rădăcini negative ;
- una dintre rădăcini să fie 0.

- Să se rezolve ecuațiile :

a) $2^x + 4^x = 272$.

c) $A_x^6 - 24 \times C_x^4 = 11A_x^4$.

- Se dă : $\sin \alpha = \frac{3}{5}$, $\sin \beta = \frac{4}{5}$, $\alpha, \beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

Să se calculeze : $\sin(\alpha + \beta)$, $\cos(\alpha + \beta)$.

- Să se simplifice fracția : $\frac{\sin x + \sin 3x + \sin 5x}{\cos x + \cos 3x + \cos 5x}$.

- Să se rezolve ecuația : $\cos 2x - \cos x = 2$.

● Un triunghi dreptunghic având catetele de 3 dm și 4 dm, se rotește în jurul ipotenuzei. Să se afle aria și volumul corpului obținut.

- Să se rezolve ecuația :

$$1 + \sin x + \cos x + \sin 2x - \cos 2x = 0.$$

● Să se determine domeniul maxim de definiție al funcției dată prin relația :

$$f(x) = \lg \frac{x^2 - 4}{x^2 - 5x + 4}.$$

● Un romb $ABCD$ de latură a , având unghiul $A = 60^\circ$, se roteș- în jurul perpendicularei pe diagonala mare dusă într-o extremitate a ei. Să se calculeze :

- volumul corpului format ;
- aria totală a corpului format.

● Să se rezolve ecuația : $4^x - 3 \cdot 2^x + 2 = 0$.

● Să se arate că într-un triunghi dreptunghic ABC ($A = 90^\circ$) avem relațiile :

a) $\sin C = \cos A + \cos B$;

b) $\sin A = \frac{\sin B + \sin C}{\cos B + \cos C}$.

● Secțiunea axială a unui cilindru este un pătrat cu diagonala de $6\sqrt{2}$ cm. Să se calculeze :

a) raza cilindrului ;

b) volumul cilindrului ;

c) aria laterală a cilindrului.

● Aflați rădăcinile ecuației :

a) $2^{4x} + 2^{4x-1} + 2^{4x-2} + 2^{4x-3} + 2^{4x-3} + 2^{4x-4} = 31$.

● Se dă funcția :

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 5 & \text{dacă } x \in (-\infty, 3) \\ -x^2 + 2x + 4 & \text{dacă } x \in [3, +\infty) \end{cases}$$

a) să se afle $f(-2)$; $f(-1)$; $f(3)$; $f(4)$ și $f(6)$;

b) să se reprezinte grafic funcția $f(x)$.

● Se dau mulțimile :

$$A = \{x/x^2 - 3x + 2 = 0 \text{ și } x \in \mathbb{N}\};$$

$$B = \{x/-1 \leq x < 3 \text{ și } x \in \mathbb{Z}\};$$

$$C = \{x/|x| \leq 2, x \in \mathbb{Z}\}.$$

Să se afle mulțimile : $M = A \cup B \cup C$, $N = A \cap B \cap C$ și $P = [B-A] \cup [C-B]$.

● Transformând numerele complexe din forma algebrică în formă trigonometrică, să se calculeze numărul :

$$Z = (1 - i\sqrt{3})^4 \cdot (1 + i)^2.$$

● Un triunghi echilateral cu aria de $4\sqrt{3} \text{ cm}^2$ se rotește în jurul unei înălțimi. Să se scrie :

- a) aria laterală a corpului de rotație ;
- b) volumul corpului.

● Fie A mulțimea formată din rădăcinile ecuației :

$$\frac{x+1}{3} = \frac{x-1}{2} + 5 \text{ și } B \text{ mulțimea formată din rădăcinile}$$

ecuației $(x-2)(x+2) = 5x - 10$

Se cere :

- a) să se rezolve ecuațiile ;
- b) să se afle $A \cup B$ și $A \cap B$.

● Se dă ecuația : $mx^2 - (m+1)x + 1 = 0$.

a) Să se calculeze suma (S), produsul (p) și discriminantul (Δ) ecuației date ;

b) Să se afle valorile lui m pentru care ecuația dată are rădăcini reale și egale și să se afle aceste rădăcini.

● Să se rezolve ecuația : $2^{9x} - 2^{2(x+10)} = 0$.

● Folosind proprietățile logaritmilor, restrângeți expresia :

$$E = \lg a + 5 \lg b - \frac{1}{3} \lg c.$$

● Știind că : $\sin x = \frac{3}{5}$, aflați valorile : $\cos x$ și $\tg x$.

● Aduceți la forma cea mai simplă expresia :

$$E = (\cos x + \sin x)^2 - 1.$$

● Desenați un paralelipiped cu baza un pătrat, înscris într-un cilindru circular drept. Știind că cilindrul are diametrul bazei de 4 cm și înălțimea de 3 cm, aflați volumul paralelipipedului.

● Să se calculeze valorile numerice ale expresiei :

$$E(x) = \frac{\sin 2x - \cos 2x}{\tg x + \ctg x}, \text{ pentru } x = 45^\circ \text{ și } x = 30^\circ.$$

● O piramidă patrulateră regulată, are diagonala bazei de $6\sqrt{2}$ m și apotema de 4 m.

a) Să se afle suma tuturor muchiilor piramidei;

b) Să se afle aria totală a piramidei.

● Fie $E(x) = \frac{\sin^6 x + \cos^6 x}{\sin^4 x + \cos^4 x}$

a) Să se afle valoarea lui $E(x)$ pentru $\operatorname{tg} x = 2$;

b) Să se rezolve ecuația: $\sin^6 x + \cos^6 x = \frac{121}{196}$.

● Un trunchi de con circular este circumscris unei sfere de rază R . Generatoarea trunchiului de con face cu planul bazei un unghi de 45° .

a) Să se calculeze aria totală și volumul trunchiului de con.

b) Să se arate că raportul dintre aria totală a trunchiului de con și aria sferei este egal cu raportul volumelor lor.

c) Să se exprime acest raport în funcție de elementele trunchiului de con în cazul general (când unghiul dintre planul bazei și generatoare este oarecare).

● Să se determine funcția $f: R \rightarrow R$, dată prin :

$f(x) = ax^2 + bx + c$; $a, b, c \in R$ și $a > 0$, știind că pentru $x = 1$, funcția ia valoarea minimă -4 și graficul ei trece prin punctul $(2; -3)$.

● Să se afle termenul care nu conține pe x din dezvoltarea :

$$\left(\sqrt[3]{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right)^{15}.$$

● Să se demonstreze folosind inducția completă că :

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$$

- Să se arate că :

$$\frac{1 - \cos 2a + \sin 2a}{1 + \cos 2a + \sin 2a} = \operatorname{tg} a.$$

- Să se rezolve ecuația : $\sin 7x = \sin 3x$.

● Fie triunghiul ABC în care $AB = 13$ cm, $BC = 14$ cm, $CA = 15$ cm. În vârful A se ridică o perpendiculară pe planul triunghiului ABC , pe care se ia punctul D , astfel încît : $AD = 12\sqrt{3}$ cm.

a) Să se determine aria triunghiului ABC , raza cercului înscris și raza cercului circumscris.

b) Să se afle aria totală și volumul piramidei $DABC$.

c) Să se afle măsurile unghiului dintre fețele DBC și ABC .

- Se consideră funcția $f: R \rightarrow R$, $f(x) = ax + b$, $a, b \in R$.

Se cere :

a) Să se determine a și b , astfel ca $f(1) = 1$, $f(-2) = 7$;

b) Să se reprezinte grafic funcția $f(x) = 2x + 3$;

c) Să se studieze semnul funcției $f(x) = -2x + 3$;

- Se dă ecuația $x^2 - 5x + 6 = 0$. Calculați expresia :

$$E = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + 2, \text{ unde } x_1, x_2 \text{ sînt rădăcinile ecuației date.}$$

- Rezolvați ecuația : $\sin x = \cos 2x$.

● Fie o piramidă $ABCD$, la care muchia AD este perpendiculară pe planul bazei. Aflați aria totală a piramidei cunoscînd :

$$AB = 13 \text{ cm}, BC = 14 \text{ cm}, CA = 15 \text{ cm și } AD = 3 \text{ cm.}$$

● Să se rezolve ecuația : $a^2 + a + 1 = 0$. Dacă a este una din rădăcinile aflate, să se calculeze valoarea expresiei : $E = a^{14} + \frac{1}{a^{14}}$, scriind mai întâi forma trigonometrică a lui a .

● Un triunghi dreptunghic are catetele $b = 3$ cm, $c = 4$ cm. Se rotește triunghiul în jurul catetelor și a ipotenuzelor obținând volumele v_1, v_2, v_3 .

1) Să se afle cele trei volume ;

2) Să se arate că oricare ar fi laturile triunghiului dreptunghic există relația :

$$\frac{1}{v_1^2} + \frac{1}{v_2^2} = \frac{1}{v_3^2}$$

● Într-un triunghi, cunoaștem o latură a și unghiurile adiacente B și C .

a) Să se găsească formula care dă înălțimea dusă din vârful A .

b) Să se găsească formula care dă aria corpului născut prin rotația triunghiului în jurul laturii BC și să se facă această formulă calculabilă prin logaritmi.

● Să se rezolve sistemul de ecuații :

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ x^2 + y^2 = 10 \end{cases}$$

● Să se rezolve ecuația :

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 1 + \cos x + \cos 2x.$$

● Fie ABC un triunghi și AA', BB', CC' , medianele triunghiului. Fie M un punct nesituat în planul triunghiului. Să se arate că planele : (MAA') , (MBB') , (MCC') au o dreaptă comună.

● În vîrfurile B și D ale patraturii $ABCD$ de latura a , se ridică perpendicularele : $BM = \frac{a\sqrt{6}}{2}$ cm și $DN = \frac{2\sqrt{6}}{6}$ cm, pe planul pătraturii și de aceeași parte a lui.

Se cere :

- Mărimea segmentului MN ;
 - Să se demonstreze că triunghiul MON este dreptunghic, O fiind intersecția diagonalelor pătratului;
 - Aria laterală și volumul piramidei $MABC$ (vîrfurile fiind M).
- Să se rezolve ecuația :

$$\log_x 10 + 2 \log_{10x} 10 - 6 \log_{100x} 10 = 0.$$

● Fie expresiile :

$$E_1 = \sin x - 2 \sin 2x + \sin 3x \text{ și}$$

$$E_2 = \cos x - 2 \cos 2x + \cos 3x.$$

- Să se calculeze valorile lui E_1 și E_2 dacă $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$.
- Să se transforme E_1 și E_2 în expresii ce conțin numai produse.

● Fie funcția $f(x) = mx^2 - 2(m+1)x + 2m+1$, unde m este un parametru real.

Să se determine m astfel încît :

- $f(x) \leq 0$, pentru orice x real;
- $x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 = 1$.

● Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de forma $f(x) = x^2 - 1$. Se cere :

- Să se determine codomeniul funcției;
- Să se reprezinte grafic funcția;
- Să se arate că funcția admite restricții bijective; să se precizeze o astfel de restricție și în acest caz să se determine inversa.

● Să se rezolve sistemul :

$$\begin{cases} 2(x-1) \geq 4(x+1) \\ x^2 + 4x > 0 \end{cases}$$

● Printr-un punct I , interior cercului de centru O , se duc două coarde perpendiculare AB și CD . Tangentele la cerc, duse în punctele A, B, C, D , determină un patrulater M, N, P, Q .

a) Să se arate că patrulaterul $MNPQ$ este inscriptibil.

b) Notînd cu R și S mijloacele coardelor AB și CD , să se arate că mijlocul segmentului RS se află pe OI .

● Într-un trunchi de piramidă patrulateră regulată diagonale bazelor sînt $6\sqrt{2}$ cm și $14\sqrt{2}$ cm, iar muchia laterală de 9 cm. Să se calculeze volumul lui.

● Dacă mulțimea A are 10 elemente, mulțimea B 18 elemente iar $A - B$ are 4 elemente, să se determine cîte elemente sînt în :

a) $A \cup B$

b) $A \cap B$

● Fie funcția $f: R \rightarrow R$, de forma

$$\begin{cases} x - 2, & \text{dacă } x \in (-\infty, 3) \\ 2x - 5, & \text{dacă } x \in [3, \infty) \end{cases}$$

Se cere :

a) Să se reprezinte grafic funcția f ;

b) Să se arate că funcția este inversibilă;

c) Să se determine inversa funcției f .

● Să se calculeze laturile unui paralelogram, știind că diagonala lui de lungime $l = 10$ cm, formează cu laturile unghiurile

$$\alpha = 45^\circ \text{ și } \beta = 30^\circ.$$

● Se dă o piramidă patrulateră regulată de înălțime $h = 12$ cm și latura bazei $a = 18$ cm. La distanța $d = 3$ cm de vîrf se face o secțiune printr-un plan paralel cu baza. Se cere :

a) aria laterală și volumul piramidei;

b) aria laterală și volumul trunchiului de piramidă, obținut prin secționare (prin înlăturarea părții de la vîrf).

● Să se rezolve sistemul :

$$\begin{cases} x^2 + xy = 2 \\ y - 3x = 7 \end{cases}$$

● Să se rezolve ecuația : $C_x^3 + A_x^4 = 4x$

● Într-un punct P al ipotenuzei BC a unui triunghi dreptunghic ABC , se ridică perpendiculara pe ipotenuza care intersectează catetele AB și AC în M și N . Să se arate că $PM \cdot PN = BP \cdot CP$.

● Muchia laterală a unui trunchi de piramidă patrulateră regulată este egală cu 3 dm, iar laturile bazelor sînt 5 dm și 1 dm. Se cere :

a) volumul trunchiului;

b) aria laterală a trunchiului.

● Se dă funcția :

$$f(x) = \begin{cases} 3x + 2, & \text{dacă } x \in (-\infty, 0) \\ 2, & \text{dacă } x \in [0, 2) \\ -x + 3, & \text{dacă } x \in [2, \infty) \end{cases}$$

a) să se calculeze $f(-2)$, $f(0)$, $f(1)$ și $f(4)$;

b) să se traseze graficul funcției $f(x)$;

c) întocmiți un tablou cu semnul valorilor funcției $f(x)$, cînd x parcurge mulțimea numerelor reale.

● Să se efectueze produsul următoarelor numere complexe, scriindu-le sub formă trigonometrică.

$$Z_1 = \sqrt{3} + i, Z_2 = 2 - 2i, Z_3 = 1 - i\sqrt{3}.$$

● Pe laturile unui triunghi oarecare ABC construim în afară triunghiurile echilaterale ACD , BCE , ABF . Să se arate că segmentele AE , BD , CF sînt egale.

● Pentru a determina căldura specifică a unui metal se confecționează din acel metal bare care au forma unui paralelipiped drept cu baza patrată, înălțimea de 5 cm și aria totală de 78 cm². Să se afle latura bazei.

● Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de forma :

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 4, & \text{dacă } x \in (-\infty, -1] \\ -7, & \text{dacă } x \in (-1, 2) \\ -3x - 1, & \text{dacă } x \in [2, +\infty). \end{cases}$$

a) Să se calculeze $f(-2)$, $f(-1)$, $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$.

b) Să se reprezinte grafic funcția.

● În trapezul dreptunghic $ABCD$, baza mare $AB = 10$ cm, latura oblică $BC = 8$ cm, iar diagonala $AC = 6$ cm. Se cere:

a) să se demonstreze că triunghiul ABC este dreptunghic;

b) perimetrul trapezului;

c) volumul corpului generat prin rotirea trapezului în jurul bazei.

● Se dă ecuația:

$$x^2 - 2(m+1)x + 2m + 5 = 0.$$

Să se determine m , astfel încât:

a) o rădăcină a ecuației să fie egală cu -1 ;

b) rădăcinile ecuației să fie egale.

● Să se determine x real astfel încât expresia:

$$\log_5 \frac{x^2 - 4x}{-x^2 + 3x - 2}, \text{ să fie definită.}$$

● Să se rezolve ecuația:

$$\cos 2x - 3 \cos x + 2 = 0$$

● Să se demonstreze că bisectoarele interioare ale unghiurilor unui patrulater convex se intersectează formînd un patrulater inscriptibil.

● Înălțimea unui con este egală cu 15 m, iar volumul este egal cu 320 m^3 . Să se afle aria laterală a conului.

● Să se calculeze valoarea funcției:

$$f(x) = 4x^3 - 8x^2 + 2x + 3,$$

$$\text{pentru } x = \frac{\sqrt{3} + 1}{2}$$

● Să se demonstreze identitatea:

$$\frac{\sin 4a - \sin 2a}{\sin 4a + \sin 2a} = \operatorname{tg} a \operatorname{ctg} 3a$$

● Două cercuri se intersectează în M și N . Fie M' și M'' punctele diametral opuse lui M în cele două cercuri. Să se arate că punctele M', N, M'' sînt coliniare.

● Un trunchi de piramidă triunghiulară regulată are latura bazei mari de 3 m, latura bazei mici de 1 m și muchia laterală de 3 m. Să se calculeze aria laterală și volumul trunchiului.

● Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ prin relația :

$$f(x) = (m-2)x^2 - 2mx + 2m - 3, m \in \mathbb{R}.$$

- Să se determine m astfel încît $f(-2) = 0$;
- Să se determine m astfel încît $x_1 x_2 = 6$;
- Să se reprezinte grafic funcția $f(x)$ pentru $m = 1$.

● Să se rezolve ecuația :

$$a) 2 \sin^2 x - \sin x - 1 = 0$$

$$b) \text{ Să se arate că } x = \frac{\pi}{2} \text{ este rădăcină a ecuației}$$

$$2 \sin^5 x = 3 \sin^3 x - \sin x.$$

● Se prelungesc laturile AB și AD ale unui paralelogram $ABCD$ cu segmentele $BM = AD$ și $DN = AB$. Să se arate că triunghiurile ACN și BMC sînt isoscele și că punctele M, N, C sînt coliniare.

● Un triunghi dreptunghic are catetele $AB = 3$ cm și $AC = 4$ cm. Să se afle volumele corpurilor ce iau naștere prin rotirea triunghiului în jurul fiecărei laturi.

Să se arate că : $\frac{1}{V_a^2} = \frac{1}{V_b^2} + \frac{1}{V_c^2}$, V_a, V_b, V_c , fiind volumele

obținute prin rotirea triunghiului în jurul laturilor a , respectiv b și c .

● Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de forma :

$$f(x) = (m-2)x^2 + 2(2m-3)x + 5m - 6.$$

Să se determine m astfel încît :

- rădăcinile ecuației $f(x) = 0$ să fie inverse.
- $f(x) > 0$, pentru orice x real.

- Să se rezolve ecuațiile :

a) $2x + \sqrt{x-1} = 8$

b) $4^x + 2^x + 1 = 80$

- Să se demonstreze că triunghiul în care avem relația :

$$\sin C = \cos A + \cos B,$$

este dreptunghic.

- În trapezul dreptunghic $ABCD$ ($A = B = 90^\circ$), baza mică $AD = 4$ cm, baza mare $BC = 9$ cm și $DC = 13$ cm.

Fie E mijlocul laturii AB .

- Să se demonstreze că triunghiul DCE este dreptunghic.
- Aria și volumul corpului obținut prin rotirea trapezului în jurul bazei mici.

- Se dă sistemul :

$$\begin{cases} 3x + y = 4 \\ x^2 - 2y - 5x + 6 = 0 \end{cases}$$

- Să se rezolve sistemul.
- Ce reprezintă grafic soluțiile lui ?

- Se consideră patrulaterul oarecare $ABCD$. Fie M, N, P, Q mijloacele laturilor AB, BC, CD și DA .

- Să se arate că patrulaterul $MNPQ$ este un paralelogram.
- Să se arate că $2MP = BC + AD$.
- Să se calculeze unghiul A al patrulaterului în cazul în care

$$BD = x^2 + x + 1, AB = 2x + 1, AD = x^2 - 1 \text{ și } x > 1.$$

- Se dă ecuația :

$$2 \sin x + \cos^2 x + 4 \sin x + \cos^2 x = 2(\sqrt{2} + 2\sqrt{2})$$

- Să se arate că $x = \frac{\pi}{6}$ este o soluție a ecuației ;
- Să se rezolve ecuația.

- Să se rezolve sistemul :

$$\begin{cases} x - 3y = 0 \\ 2x^2 + 6xy - 9y^2 = x + 24 \end{cases}$$

- Pentru ce valori ale lui a avem :

$$\log_a 5 < \log_a 3.$$

- Să se rate că :

$$\frac{\sin a + \operatorname{tg} a}{\cos a + \operatorname{ctg} a} \cdot \frac{1 + \sin a}{1 + \cos a} = \operatorname{tg}^2 a$$

- Un con circular drept are raza bazei egală cu $m^2 - 4$ și generatoarea egală cu $m^2 + 4$. Să se calculeze volumul acestui con.

- Laturile unui triunghi oarecare sînt ; $a = 2$, $b = \sqrt{2}$ și $c = 1 + \sqrt{3}$. Să se calculeze unghiurile triunghiului.

- Trunchiul de con cu razele de 3 m și 5 m și un con de aceeași înălțime au volume egale. Să se afle raza bazei conului.

- Să se demonstreze trigonometric că triunghiul ABC în care :

$$2a = b + c \text{ și } 2A = B + C \text{ este echilateral.}$$

- Se dă o piramidă cu baza un dreptunghi $ABCD$, avînd $AB = 2a$ și $BC = a$, înălțimea piramidei fiind $SD = 2a$. Pe muchia SB se ia un punct P . Se cere :

- Să se calculeze aria laterală a piramidei $SABCD$;
 - Să se arate că dacă P este mijlocul lui SB , triunghiul APC este isoscel, și să se determine aria acestuia.
 - Să se determine poziția lui P pe SB , astfel încît triunghiul APC să fie dreptunghic.
- Să se rezolve sistemul :

$$\begin{cases} 2x^2 - xy - y^2 + 2x - 2y + 6 = 0 \\ y - x = 1 \end{cases}$$

● Un magazin pentru valorificarea legumelor are acoperișul în formă de piramidă regulată cu muchia bazei de 6 m și înălțimea de 4 m.

a) Să se afle aria acoperișului magazinului.

b) Să se afle masa cantității de tablă cu care este acoperit magazinul știind că tabla are grosimea de 3 mm și $d = 7,8 \text{ g/cm}^3$.

● Se dau mulțimile :

$$A = \{0, 1, 5\}; B = \{1, 5, 7\} \text{ și } C = \{0, 1, 2, 3, 5, 7\}.$$

Să se calculeze : $A \cup B$; $(A \cup B) \cup C$; $(A \cup B) \cup (B \cup C)$.

● Se dă funcția reală $f(x) = -x^2 + 4$.

a) Să se arate că $f(x)$ este funcție bijectivă;

b) Să se facă graficul funcției date.

● Fie $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ și $B = \{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ și $N =$ mulțimea numerelor naturale. Folosind simbolurile reuniunii, intersecției, diferenței și complementarei exprimați mulțimile de mai jos cu ajutorul lui A , B și N :

$$M_1 = \{5, 6, 7\}; M_2 = \{1, 2, 3, 4\};$$

$$M_3 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}; M_4 = \{8, 9, 10\};$$

$$M_5 = \{8, 9, 10, 11, \dots\}; M_6 = \{1, 2, 3, 4, 11, 12\}.$$

● Fie funcția $f: R \rightarrow R$, definită astfel :

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 4, & \text{dacă } x \in (-\infty, -1) \\ 7, & \text{dacă } x \in [-1, 3] \\ x + 1, & \text{dacă } x \in (3, \infty) \end{cases}$$

Să se determine $f(-2)$, $f(-1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$.

● Stabiliți monotonia și semnul funcțiilor de mai jos, apoi faceți graficul lor pe același sistem de axe de coordonate :

$$f_1: R \rightarrow R, \text{ de forma } f_1(x) = \begin{cases} -x + 3, & \text{dacă } x \in (-\infty, 0] \\ 3, & \text{dacă } x \in (0, 2) \\ 2x + 3, & \text{dacă } x \in [2, \infty) \end{cases}$$

$$f_2: R \rightarrow R, \text{ de forma } f_2(x) = x^2 - 4x + 3.$$

● Să se rezolve :

$$a) \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - 4x + 3} < 0, \quad b) \frac{x^2 + 10x - 3}{x^2 + 2x - 1} = 2,$$

$$c) \lg \left(2x - \frac{9}{4} \right) - \lg x = \lg(x - 3), \quad d) A_x^5 = 12 A_x^3.$$

● Examinați trigonometric și reprezentați în planul complex (pe același sistem de axe de coordonate) următoarele numere complexe :

$$Z_1 = 1 + i\sqrt{3} \text{ și } Z_2 = 1 - i\sqrt{3}.$$

● Lotul unei școli are forma unui trapez dreptunghic $ABCD$ care desenat pe o foaie de caiet la scara $1 : 10.000$, are baza mare $AB = 6$ cm, latura oblică $BC = 3$ cm, iar diagonală $AC = 3,3$ cm.

a) Aflați lungimea gradului care înconjoară lotul, în metri;

b) Aflați aria lotului în m^2 ;

c) Știind că diagonală AC separă cele două culturi de pe lot (porumb în ACB și cartofi în ACD), aflați în m^2 , aria suprafețelor cultivate cu fiecare din aceste culturi.

● La un atelier școlar se comandă confecționarea din tablă, a unui vas de forma unui trunchi de con circular drept, cu următoarele caracteristici : generatoarea să fie egală cu suma bazelor, înălțimea să fie 12 cm și aria laterală să fie de 169π cm^2 .

a) aflați razele bazelor ;

b) aflați capacitatea vasului ($\pi = 3,14$).

● Să se reprezinte grafic funcția : $f: R \rightarrow R$, definită prin :

$$f(x) = \begin{cases} -x + 2 & \text{pentru } x \in (-\infty, -2) \\ x^2 & \text{pentru } x \in [-2, +2] \\ x + 2 & \text{pentru } x \in (2, +\infty) \end{cases}$$

- Să se rezolve ecuațiile :

$$a) 32^{\frac{x+5}{7}} = 0,25 \cdot 128^{\frac{x+17}{8}}$$

$$b) \frac{\sqrt{x+6} + \sqrt{x+1}}{\sqrt{x+6} - \sqrt{x+1}} = 2x - 1$$

$$c) \sin x + \sin 2x = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$$

● Într-un triunghi oarecare ABC se notează cu B_1 și C_1 proiecțiile vîrfurilor B și C pe laturile opuse. Paralela prin C la BB_1 intersectează dreapta AB în C_2 , iar paralela prin B la CC_1 intersectează dreapta AC în B_2 .

Să se arate că patrulateralele BCB_1C_1 și BCB_2C_2 sînt inscriptibile și să se precizeze pozițiile centrelor cercurilor respective.

● Să se calculeze aria și volumul corpului obținut prin rotirea unui triunghi dreptunghic în jurul ipotenuzei, în funcție de ipotenuza a și suma catetelor h .

- Să se reprezinte grafic funcția :

$$f(x) = x^2 - 5x + 6.$$

- Se dă ecuația : $x^2 - mx + m - 1 = 0$

Să se determine $m \in \mathbb{R}$, astfel încît între rădăcini să existe relația :

$$\frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1 + x_2} > x_1, x_2, \text{ unde } x_1 \text{ și } x_2 \text{ sînt rădăcinile ecuației date.}$$

- Să se rezolve ecuațiile :

$$a) \sin^2 x - \cos^2 x - 6 \sin x + 5 = 0$$

$$b) 2 \lg x = 1 + \lg \left(x + \frac{11}{10} \right)$$

$$c) 4^x + 2^x = 272$$

● Un vas sub forma unui trunchi de con, trebuie să aibă o capacitate de 900 litri și o adîncime de un metru. Știind că diametrul unei baze este de 1,20 m, se cere să se calculeze diametrul celeilalte baze.

● Se consideră mulțimile :

$$A = \{1, 2, 3, 4\},$$

$$B = \{x/x \in \mathbb{N}, -1 < x < 4\}$$

$$C = \{x/x \in \mathbb{N}, \frac{2x+5}{x-1} \in \mathbb{N}\}$$

a) Să se determine mulțimile B și C

b) Să se afle $A \cup B$; $A \cap B$; $A - B$; $A \times B$.

● Să se rezolve ecuația :

$$\log_2(4^x + 3 \cdot 2^x) - 1 = \log_2(2^{x+1} + 1)$$

● Se dă ecuația :

$$(m-2)x^2 - (3m+2)x + m+1 = 0$$

a) Să se determine $m \in \mathbb{R}$, astfel ca rădăcinile ecuației să fie reale și distincte.

b) Să se determine $m \in \mathbb{R}$, cunoscând că :

$$x_1^2 + x_2^2 = 7.$$

● Se dă expresia : $E(x) = \frac{\sin 2x - 2}{2} + \sin x + \cos x$.

a) să se afle valoarea numerică a expresiei pentru :

$$x = 45^\circ; x = -\frac{3\pi}{2} \text{ rad}; x = 200^\circ (\pi)$$

b) Să se rezolve ecuația $E(x) = 0$;

c) Să se arate că pentru $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $E(x) > 0$.

● Într-un trapez isoscel $ABCD$ un unghi ascuțit este de 45° . Latura oblică AD este egală cu baza mică CD .

a) Dacă $AD = a$, să se afle lungimea diagonalei BD ;

b) Trapezul se rotește în jurul laturii oblice AD .

Să se afle volumul corpului obținut.

● Se dau mulțimile : $A = \{1, 2, 3, 4, 6\}$ și $B = \{1, 2, 3, 5\}$.

a) Să se calculeze : $A \cup B$, $A \cap B$ și $A - B$.

b) Care din următoarele afirmații sînt adevărate și care sînt false :

$$A \cup B \subset A \cap B; A \cup B \supset A \cap B; A - B \supset A \cap B; A \cup B \supset A - B.$$

● Să se rezolve ecuațiile :

$$2x^2 - 5x + 2 = 0 \text{ și } 2x^2 + 13x - 7 = 0.$$

Să se construiască ecuația de gradul doi care are ca rădăcini, rădăcinile necomune ale ecuațiilor date.

● Știind că $\sin x = \frac{3}{5}$, să se afle celelalte funcții trigonometrice ale unghiului x din cadranul I.

● Diametrul exterior al unei sfere groase din fontă este de 18 cm, grosimea pereților este de 3 cm. Să se afle volumul peretelui sferei.

● Se consideră mulțimile :

$$A = \{x / x \in \mathbb{N}; x \text{ este divizor al lui } 3\}$$

$$B = \{x / x \in \mathbb{Z}; x^2 - 6x + 8 = 0\}$$

$$C = \{x / x \in \mathbb{Z}, x \in [-1, 3)\}$$

a) Să se calculeze mulțimile A , B și C .

b) Să se afle : $A \cup B$, $A \cap B$, $C \setminus B$, $A \times B$, $C_E A$, unde $E = A \cup B$.

c) Cîte submulțimi de două elemente are mulțimea C .

● Să se rezolve ecuația : $\lg(10^{2x-1} + 7 \cdot 10^{x-1}) = \lg(10^{x+1} - 2) - 1$

● Se dă patrulaterul $ABCD$ în care $\angle BAD = 90^\circ$, $\angle DBA = 30^\circ$ și $BC = CD = BD = 2a$. Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotirea patrulaterului în jurul laturii AB .

● Fie mulțimile :

$$A = \{x \in \mathbb{N} / x^2 - 3x + 2 = 0\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{Z} / -2 < x \leq 2\}$$

a) Să se determine mulțimile A și B ;

b) Să se afle: $A \cup B$; $A \cap B$; $B \setminus A$, $A \times B$.

● Se dă expresia:

$$E(x) = 3 \cos^2 x - \sin^2 x + 3 \cos x.$$

a) Să se rezolve ecuația valoarea expresiei $E(x)$ pentru:

$$x = 30^\circ \text{ și } x = -\frac{\pi}{3} \text{ rad.}$$

b) Să se rezolve ecuația $E(x) = 0$.

● Într-un trapez isoscel $ABCD$, un unghi ascuțit este de 45° . Latura oblică AD este egală cu baza mică CD .

a) Dacă $AD = 10$ cm, să se afle lungimea diagonalei AB .

b) Trapezul se rotește în jurul bazei mari AB . Să se afle volumul corpului obținut.

● Știind că $\sin x = \frac{4}{5}$, $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ să se calculeze:

$$\cos x, \operatorname{tg} x \text{ și } \operatorname{ctg} x.$$

● Fie trapezul dreptunghic $ABCD$ cu bazele $BC = 15$ cm, $AD = 10$ cm și latura oblică $CD = 13$ cm.

Trapezul se rotește în jurul unei drepte paralelă cu AB la distanța de 3 cm de ea (dreapta este exterioară trapezului)

Se cere:

a) să se afle aria totală a corpului obținut;

b) să se afle volumul corpului generat.

● Să se rezolve sistemul de ecuații:

$$\begin{cases} x - y - 3xy = -47 \\ xy = 14 \end{cases}$$

● Să se rezolve ecuațiile:

a) $1 - \cos 2x = \sin x$

b) $27^{2x-1} - 2 \cdot 3^{3x-\frac{3}{2}} = 3$

c) $\lg(2x^2 - 2x - 2) = \lg 150 - \lg 15.$

● Să se calculeze :

$$(\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ)^6 \text{ și } \left[3 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right]^6.$$

● Un trunchi de con cu razele bazelor de 3 cm și 5 cm este echivalent cu un con care are aceeași înălțime ca și trunchiul de con. Să se determine raza bazei conului.

● Un triunghi ABC de arie S , se rotește în jurul laturii $BC = a$. Să se determine volumul corpului obținut.

● Să se rezolve ecuațiile :

a) $2\sqrt{x} - 1 = 3x - 4$

b) $\log \left(2x - \frac{9}{4} \right) - \log x = \log (x - 3)$

c) $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = 2.$

● Să se simplifice fracția : $\frac{x-1}{2\sqrt{x}-2}$

● Să se rezolve ecuațiile :

$$\sqrt{x-3} \cdot \sqrt{2x+2} = x+1$$

$$\left(\frac{2}{3} \right)^x \cdot \left(\frac{9}{8} \right)^x = \frac{27}{64}$$

$$\frac{1}{12} (\log x)^2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \log x.$$

● Să se simplifice fracția : $\frac{a + \sqrt{ab}}{b + \sqrt{ab}}$

● Să se afle valoarea fracției fără a folosi tabele :

$$\frac{\sin 75^\circ + \sin 15^\circ}{\sin 75^\circ - \sin 15^\circ}$$

- Înălțimea unui trunchi de con este egală cu 3 cm.

Baza unei baze este de două ori mai mare decât raza celeilalte baze, iar generatoarea este înclinată față de planul bazei cu unghiul de 45° . Să se afle volumul.

- Să se efectueze : $\frac{5 + 3\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{2} - 1}{6}$

- Să se rezolve ecuațiile : $\frac{3\sqrt{x} - 5}{2} - \frac{2\sqrt{x} - 7}{3} = \sqrt{x} - 1$;

$$3^{x+1} + 3^x = 108 ; \log x = \log (6 - x) ; \sqrt{2} \sin^2 x + \cos x = 0.$$

- Înălțimea unui con circular drept este egală cu 3 m iar generatoarea de 5 m. Să se afle volumul și aria totală a conului.

- Se consideră funcția $f: R \rightarrow R$ dată prin legea

$$f(x) = ax + b, a, b, \in R.$$

Se cere :

1) Să se determine a și b astfel ca : $f(1) = 2$ și $f(-1) = 6$.

2) Să se reprezinte grafic funcția $f: R \rightarrow R$ dată prin legea $f(x) = -2x + 4$. Care sînt valorile lui x pentru care $f(x)$ aparține intervalului $(4, 6)$?

- Să se rezolve ecuația : $\sin 2x = \cos 2x$. Să se precizeze numărul soluțiilor ecuației care aparțin intervalului $(\pi, 2\pi)$.

- Se dă $\operatorname{ctg} a = -\sqrt{3}$; $a \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$. Se cere :

$$\cos a, \sin 2a, \cos \frac{a}{2}.$$

- Se consideră o piramidă triunghiulară regulată cu toate muchiile egale cu 1 m. Aflați volumul și aria totală.

- Un con este secționat cu un plan paralel cu planul bazei și care trece prin mijlocul înălțimii. Aflați raportul volumelor celor două conuri.

- Avem o piramidă cu vârful V și cu baza un triunghi ABC . Afirmația că piramida $VABO$ este regulată în care din situațiile următoare este adevărată? Justificați răspunsul.

a) triunghiul ABC este echilateral și virful V se proiectează în punctul B ;

b) triunghiul ABC este echilateral și virful V se proiectează în punctul de intersecție al bisectoarelor triunghiului ABC .

c) Virful V se proiectează în centrul cercului circumscris triunghiului ABC iar fețele laterale ale piramidei sînt triunghiuri egale.

● O dreaptă d formează cu o dreaptă d' conținută în planul P un unghi de 45° . În ce condiții putem afirma că unghiul dreptei d cu planul P este de 45° ?

● a) De cîte ori se mărește volumul unui cub dacă latura sa se dublează?

b) De cîte ori se mărește volumul unui paralelipiped dreptunghic dacă două din dimensiunile sale se triplează. Justificați răspunsurile.

● Rezolvați ecuațiile:

$$a) \frac{1-3x}{2} = 0; \quad b) \frac{2}{5x+1} = 0; \quad c) \frac{2}{x-1} = 3.$$

● Simplificați fracțiile: $\frac{a^3+a}{a^4-1}$; $\frac{0,5^3+0,5}{0,5^4-1}$.

● Rezolvați sistemul:

$$\begin{cases} \frac{x}{2} = \frac{y}{4} \\ 3x = z \\ x + y + z = 12 \end{cases}$$

● Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} -x^2 + 4x - 3 < 0 \\ x + 2 > 0 \end{cases}$$

● Să se rezolve ecuația: $5x + \sqrt{5x+10} = 8$

● Știind că $\cos a = \frac{7}{25}$ și că $a \in \left(\pi, \frac{3}{2}\right)$, să se calculeze $\cos 2a$.

● Aria laterală a unui cilindru este $678,24 \text{ m}^2$, iar generatoarea $\frac{3}{4}$ din rază. Să se afle volumul.

● Fie ecuația: $x^2 + 2(m-2)x + m^2 - 16 = 0$, unde $m \in R$. Să se determine valorile lui m pentru care ecuația admite:

- două rădăcini reale, distincte și pozitive;
- o rădăcină x_1 să fie egală cu 0;
- două rădăcini reale, de semne contrare, egale în valoare absolută.

● Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = xy + \frac{13}{4} \\ \log_2 x + \log_2 y = 0 \end{cases}$$

● Să se scrie sub formă trigonometrică numărul complex: $z = -1 + i\sqrt{3}$.

● Într-o piramidă patrulateră regulată $VABCD$, cu latura bazei a , se duce prin mijlocul muchiei VA un plan paralel cu planul triunghiului VBD .

Știind că muchiile piramidei sînt egale cu diagonala bazei, să se calculeze aria secțiunii determinate în piramidă, în funcție de latura bazei.

● Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 7 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

● Să se reprezinte grafic funcția:

$$y = \sqrt{x^2 + x - 4}.$$

● Să se demonstreze că triunghiul ABC , în care:

$$2a^* = b + c \text{ și } 2A = B + C, \text{ este echilateral.}$$

● Într-o piramidă patrulateră regulată dreaptă se înscrie un cub, astfel încît vîrfurile acestuia se află pe diagonalele bazei

piramidei și pe muchiile laterale. Cunoscând că la piramidă latura bazei este egală cu a , iar înălțimea este egală cu h să se afle latura cubului înscris.

- Să se rezolve sistemul :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 17 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{3}{4} \end{cases}$$

- Să se reprezinte grafic funcția :

$$y = x^2 + \sqrt{(x-1)^2} + \sqrt{(x-3)^2}$$

● Fie triunghiul ABC , isoscel ($AB=AC$) și $\hat{A}=120^\circ$. Pe laturile AB și AC se consideră punctele M și respectiv N , astfel ca $BM = AN = x$.

a) să se determine lungimea segmentului MN în funcție de x și a , și să se găsească valoarea lui x , astfel ca MN să fie minim;

b) să se arate că al patrulea vîrf P , al paralelogramului $AMPN$, cu o diagonală AP , se află pe BC ;

c) să se arate că suma distanțelor de la M și N la BC este constantă cînd x variază.

- Să se rezolve ecuația :

$$\sin 2x + \sin x + \cos x + 1 = 0$$

Să se raționalizeze numitorul următoarei fracții :

$$\frac{60\sqrt{2} + 12\sqrt{3}}{5\sqrt{6} + 3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}}$$

● Se consideră o piramidă patrulateră regulată dreaptă $VABCD$, avînd latura bazei a și muchia laterală $2a$. Pe muchia VB se consideră punctul M situat la mijlocul ei. Se cere să se determine :

a) aria totală și volumul piramidei $VABCD$;

b) aria triunghiului AMO ;

c) volumul piramidei $MABCD$.

- Să se rezolve inecuația :

$$0 \leq x^2 - 4x + 4 \leq 1$$

2. Să se rezolve ecuațiile :

a) $\log_{2\sqrt{2}} x = 3$

b) $\lg \sqrt{2x+5} + \frac{1}{2} \lg (x-6) = 1$

- Fiind dată ecuația $z^3 - 27 = 0$, se cere :

- a) să se rezolve ecuația în mulțimea numerelor complexe;

- b) rădăcinile ecuației fiind notate cu z_1, z_2, z_3 , să se scrie sub formă trigonometrică;

c) să se arate că $z_1^3 + z_2^3 + z_3^3 = 81$

- Fiind dată expresia

$$E(x) = \sin 3x - \sin x, \text{ se cere:}$$

- a) să scrie $E(x)$ sub formă de produs;

- b) să se rezolve ecuația $E(x) = \sin 2x$ și să se specifice soluțiile cuprinse în intervalul $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi \right]$

● Se dă un cerc de rază R , căruia i se circumscrie un triunghi isoscel ABO (baza AB). Dacă O este centrul cercului, T piciorul perpendicularei dusă din O pe BC , iar M piciorul înălțimii triunghiului, dusă din C , se cere să se arate că :

a) $\triangle CMB \sim \triangle COT$;

- b) $MOBT$ este un patrulater inscriptibil;

- c) dacă notăm $MB = x$, să se afle volumul și aria conului generat prin rotirea triunghiului ABC în jurul înălțimii CM (în funcție de R și x);

- d) să se afle lungimea cercului de contact dintre con și sfera obținută prin rotirea cercului O de rază R , înscris triunghiului dat (tot în funcție de R și x).

- Se dă ecuația :

$$x^2 + (2-m)x - m - 3 = 0, \text{ cerându-se:}$$

- a) să se arate că oricare ar fi $m \in \mathbb{R}$ ecuația dată are rădăcini numai în mulțimea numerelor reale;

b) considerînd funcția :

$$f(x) = x^2 + (2 - m)x - m - 3,$$

să se reprezinte grafic funcția dată, pentru $m = 3$.

● Se dă expresia :

$$E = \operatorname{tg} x + x \operatorname{ctg} x \text{ și se cere :}$$

a) să se arate că $E = \frac{2}{\sin 2x}$;

b) să se rezolve ecuația : $\frac{1}{E} = -\frac{1}{4}$.

● Unui cerc O de rază R , i se circumscrie un trapez isoscel cu baza mare de $2m$ și baza mică $2n$. Se cere :

a) să se exprime, în funcție de m , n și R , aria trapezului ;

b) să se arate că raza cercului înscris trapezului dat este medie proporțională între semibaze.

● Într-un con circular drept generatoarea face cu planul bazei un unghi α , iar raza bazei conului este R . În funcție de R și α se cere să se afle :

a) aria conului dat ;

b) volumul corpului obținut prin secționarea conului cu un plan paralel cu baza dus la jumătatea înălțimii și înlăturarea părții dinspre vîrf.

● Să se rezolve ecuația :

$$2 \sin^2 x + \sin x - 1 = 0$$

● Să se rezolve sistemul :

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{4} \\ x + y = 18 \end{cases}$$

● Să se rezolve ecuația :

$$4^x + 2^{x+1} \cdot 3^x - 9^x \cdot 3 = 0$$

● Se dă o piramidă cu baza un dreptunghi avînd $AB = 2a$ și $BC = a$, înălțimea piramidei fiind $SD = 2a$. Pe muchia SB se ia un punct P și se cere :

- să se calculeze aria laterală a piramidei $SABCD$;
- să se arate că dacă P este mijlocul lui SB , triunghiul APC este isoscel și să se determine aria acestuia;
- să se determine poziția lui P pe SB , astfel încît triunghiul APC să fie dreptunghic.

● Să se rezolve ecuația :

$$2 \cos^2 x + \cos x - 1 = 0$$

● Baza unei prisme drepte este un romb care are latura 10 cm și înălțimea 9,6 cm, înălțimea prisme este 12 cm. Să se găsească diagonalele prisme.

● Să se rezolve sistemul :

$$\begin{cases} x + y = 7 \\ x^2 + y^2 = 29 \end{cases}$$

● Să se rezolve ecuația exponențială :

$$4^x + 2^x = 2.$$

● Se consideră ecuația :

$$x^2 - mx + m + 3 = 0$$

a) Să se determine mulțimea valorilor lui $m \in R$, astfel că rădăcinile ecuației date să fie reale.

b) Să se calculeze valoarea lui $m \in N$, cunoscînd că

$$x_1^2 + x_2^2 = 29$$

c) În cazul $m = 7$, fără a rezolva ecuația, să se determine valoarea expresiei :

$$E = \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \frac{1}{x_1 x_2}$$

- În triunghiul ABC se dă :

$$A = 90^\circ; \frac{1}{AB} + \frac{1}{AC} = \frac{7}{36} \text{ și aria } S = 54 \text{ dm}^2. \text{ Se cere :}$$

- a) Lungimea laturilor triunghiului.

Dacă $AB = 9 \text{ dm}$ și $AC = 12 \text{ dm}$, să se arate că :

- b) $3 \sin B = 4 \sin C$;

- c) Să se calculeze raza cercului înscris.

- Într-un con, a cărui generatoare face cu planul bazei un unghi α , dat de ecuația :

$$\frac{1 + \sin \alpha + \cos \alpha}{1 + \sin \alpha} = 3 - \operatorname{tg} \alpha, \alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

se înscrie o sferă de rază r .

- a) Să se determine α ;

- b) Considerînd $\alpha = 60^\circ$, să se exprime în funcție de r volumul conului;

- c) Să se arate că aria sferei reprezintă $\frac{2}{3}$ din aria laterală a conului.

- d) Să se determine la ce distanță de baza conului trebuie să se ducă un plan paralel bazei conului, astfel ca diferența ariilor secțiunilor în con și sferă să fie egală cu $\frac{4}{9}$ din aria bazei conului.

Discuție.

- Să se formeze ecuația de gradul II ale cărei rădăcini x_1 și x_2 satisfac relațiile :

$$x_1 + x_2 + x_1 x_2 + 1 = 0$$

și

$$(x_1 - 1)(x_2 - 1) = 2m; m \in R$$

- Considerînd ecuația $x^2 + mx + m - 1 = 0$, să se determine m astfel ca $x_1^2 + x_2^2 = 17$ și în cazul $m = -3$, să se calculeze rădăcinile x_1 și x_2 și să se verifice relația precedentă.

- Să se demonstreze că :

$$\sin^3 x(1 + \operatorname{cotg} x) + \cos^2 x(1 + \operatorname{tg} x) = \sin x + \cos x.$$

- Să se rezolve ecuația :

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2}$$

● Bazele unui trunchi de piramidă sînt dreptunghiuri, iar muchiile laterale sînt egale între ele. Laturile bazei mari sînt 15 cm și 27 cm, iar perimetrul bazei mici 56 cm. Știind că înălțimea trunchiului este medie geometrică între numerele 4 și 9, să se afle :

- a) dimensiunile laturilor bazei mici ;
- b) înălțimea trunchiului.

Dacă înălțimea este de 6 cm, laturile bazei mici de 10 și respectiv 18 cm, să se calculeze :

- c) apotema uneia din fețele laterale ;
- d) volumul trunchiului.

- Să se simplifice fracția :

$$F(x) = \frac{8x^2 + 2x - 3}{4x^2 - x - 3}$$

● Fie ecuația $x^2 - mx + m - 1 = 0$. Să se determine m , astfel ca ecuația dată să admită rădăcini reale egale.

- Să se restrîngă expresia :

$$E = \frac{\sin(45^\circ + \alpha) - \cos(45^\circ + \alpha)}{\sin(45^\circ + \alpha) + \cos(45^\circ + \alpha)}$$

● Un cort are forma unui cilindru terminat cu un con. Diametrul bazei este 24 m, înălțimea părții cilindrice este de 2 m, iar a părții conice de 5 m. Să se afle :

- a) generatoarea conului ;
- b) aria laterală a cilindrului și a conului ;
- c) cîtă pînă s-a folosit pentru confecționarea cortului ?

- Se dă funcția $f: R \rightarrow R$ dată de relația :

$$f(x) = (m - 2)x^2 - 2mx + 2m - 3; m \in R.$$

a) Să se determine m astfel încât între rădăcinile ecuației $f(x) = 0$ să existe relația :

$$\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = 2$$

b) Să se determine m , astfel încât minimul funcției

$f(x)$ să fie egal cu -3 .

c) Pentru ce valori ale parametrului m inecuația

$f(x) > 0$ nu admite soluții.

d) pentru $m = 1$ să se reprezinte grafic funcția :

$$g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{x+1} & \text{pentru } x < -1 \\ f(x) & \text{pentru } x \geq -1 \end{cases}$$

● Să se afle valoarea numerică a polinomului $P(x) = x^3 - 6x - 8$ pentru $x = \sqrt[3]{4 - 2\sqrt{2}} + \sqrt[3]{4 + 2\sqrt{2}}$.

● Să se rezolve ecuația :

$$\sin^3 x (1 + \operatorname{ctg} x) + \cos^2 x (1 + \operatorname{tg} x) = \cos 2x.$$

● În triunghiul ABC , AD este înălțimea iar AE mediană (punctul D este situat între punctele B și E). Să se determine laturile și unghiurile triunghiului ABC , cunoscând : $AD = a\sqrt{3}$ cm și unghiul $BAD = \text{unghiul } EAC = 30^\circ$.

● Se consideră într-un plan P un segment AB și un punct oarecare M situat pe circumferință de diametru AB . Fie S un punct pe semidreapta AZ perpendiculară în A pe planul P .

Să se determine punctul O , centrul sferei circumscrise tetraedrului $SABM$.

● Fie V_a , V_b , V_c , volumele ce iau naștere prin rotirea completă a unui triunghi, respectiv în jurul laturilor a , b , c .

Să se demonstreze că dacă există relația $\frac{1}{V_a^2} = \frac{1}{V_b^2} + \frac{1}{V_c^2}$, atunci triunghiul este dreptunghic.

- Se dă funcția $f: R \rightarrow R$ dată de :

$$f(x) = x^2 - 4x + 3$$

Se cere :

- să se reprezinte grafic funcția $f(x)$;
- să se determine mulțimea valorilor lui x pentru care $f(x) > 0$.

- Se dă $\sin x = \frac{3}{5}$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$; să se determine $\cos x$ și $\operatorname{tg} x$

- Să se rezolve ecuația :

$$2 \sin^2 x - 3 \sin x + 1 = 0$$

- O piramidă patrulateră regulată are muchia laterală de 15 cm și înălțimea de 12 cm. Să se calculeze :

- latura bazei;
- aria secțiunii diagonale (determinată de planul ce trece prin diagonala bazei și vârful piramidei);
- volumul piramidei.

- Să se rezolve ecuația :

$$3^{x^2-4x+3} = \frac{1}{3}.$$

- Să se arate că :

$$\frac{\sin x + 2 \sin 2x + \sin 3x}{\cos x + 2 \cos 2x + \cos 3x} = \operatorname{tg} 2x$$

- Să se rezolve ecuația :

$$\operatorname{tg} 2x = \sqrt{2} \cos 2x$$

- Se dă piramida triunghiulară $VABC$, astfel încît :

$$AV = BV = CV = a; \widehat{AVB} = 60^\circ; \widehat{AVC} = 90^\circ; \widehat{BVC} = 120^\circ.$$

- a) să se calculeze laturile triunghiului de bază ;
 b) să se arate că aria totală a piramidei este egală cu :

$$\frac{a^2}{2} (1 + \sqrt{2} + \sqrt{3})$$

- c) să se calculeze volumul piramidei.

- Se consideră funcția $f: R \rightarrow R$ dată de relația

$$f(x) = ax + b, \quad a, b \in R$$

- a) Să se determine a și b , astfel ca $f(-1) = 1$ și $f(1) = 3$;

- b) Să se reprezinte grafic $f(x) = x + 2$.

- Se dă : $\cos x = \frac{4}{5}$; să se calculeze $\sin x$ și $\operatorname{tg} x$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

- O piramidă patrulateră regulată are muchia laterală de 15 cm și înălțimea de 12 cm. Să se calculeze :

- a) latura bazei;

- b) aria secțiunii diagonale (determinată de planul ce trece prin diagonala bazei și vârful piramidei);

- c) volumul piramidei.

- Să se afle valoarea funcției :

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + a^2} - \sqrt{x^2 - a^2}}{\sqrt{x^2 + a^2} + \sqrt{x^2 - a^2}} \quad \text{pentru } x_0 = a \sqrt{\frac{b^2 + c^2}{2bc}}$$

$$a, b, c > 0$$

- Prin mijloacele muchiilor care pleacă din vârful A al cubului $ABCD A' B' C' D'$ trece planul π . Să se calculeze distanțele de la punctele A, B, C', D' la planul π în funcție de muchia cubului a .

- Prin vârful A al unui paralelogram $ABCD$ ($AB > AD$) se duce o dreaptă exterioară ce intersectează prelungirile laturilor BC și CD în M și N . Să se arate că :

$$CM \cdot CN = AB \cdot CM + BC \cdot CN.$$

● Fie funcțiile $f: R \rightarrow R$ pentru care $f(x) = \sin x$ și $g: R \rightarrow R$ pentru care $g(x) = \cos ax$. Să se determine a ($0 \leq a \leq 2$) astfel încât funcțiile f și g să fie egale.

● Să se determine x , astfel încât să fie definită,

$$\log x^2 + x - 2(x+1)\sqrt{x^2-4}$$

● Să se rezolve ecuația $x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x$

● Să se afle termenul liber din dezvoltarea $\left(\sqrt[3]{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{10}$.

● Să se demonstreze că oricare ar fi numărul natural $n \geq 1$ este adevărată egalitatea:

$$2^1 + 2^2 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 2$$

● Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ y = x^2 + 3x + 3 \end{cases}$$

● O piramidă are vârful S și ca bază rombul $ABCD$. Știind că diagonalele bazei ($AC = 8$ cm și $BD = 6$ cm) se întâlnesc în punctul O , iar înălțimea piramidei este $SO = 4$ cm, se cere:

a) să se arate că muchiile SA și SC sînt perpendiculare între ele;

b) să se calculeze volumul și aria piramidei.

● Să se rezolve ecuația:

$$6^x + 6^{x+1} = 2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2}$$

● Să se reprezinte grafic $f: R \rightarrow R$ prin $f(x) = \frac{|x|}{x}$.

● Să se determine domeniul maxim al funcției:

$$f(x) = \sqrt{\sin x - \frac{1}{2}}$$

● Fie funcția $f: E \rightarrow F$ bijectivă. Să se demonstreze egalitatea :

$$f^{-1}(f(x)) = x, \quad x \in F$$

$$f(f^{-1}(x)) = x, \quad x \in E$$

● Să se rezolve sistemul de ecuații :

$$\begin{cases} 2x - 3y = 12 \\ x^2 - xy + 5y^2 = 35. \end{cases}$$

● Să se simplifice fracția :

$$F(x) = \frac{\sin 8x + \sin 6x + \sin 4x + \sin 2x}{\cos 8x + \cos 6x + \cos 4x + \cos 2x}$$

și să se rezolve ecuația,

$$F(x) + 1 = 0$$

precizând rădăcinile cuprinse între 0 și 1 (se vor exprima atât în grade sexagesimale cât și în radiani).

● Să se afle al 4-lea termen al dezvoltării : $\left(2x - \frac{1}{2x}\right)^6$

● Să se afle aria și volumul corpului de rotație obținut prin rotirea unui romb în jurul uneia din laturile sale, cunoscând că unul din unghiurile rombului este de 60° iar diagonala mică este egală cu 23 cm.

Sesiunea iulie 1978, București

Licee industriale — profil : mecanic, metalurgie, industrie ușoară, chimie, materiale de construcții, prelucrarea lemnului, construcții, industrie alimentară, poligrafie, alimentație publică.

1. Se dă funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dată de $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$

a) Să se reprezinte grafic funcția :

$$y = f(x)$$

b) Să se determine valorile lui x pentru care funcția este negativă.

c) Să se rezolve ecuația : $2 \cdot 2^x - 3 \cdot 2^x + 1 = 0$

2. Un trunchi de con circular drept are : $R = 10$ cm,

$r = 6$ cm și $h = 3$ cm. Să se determine :

- Aria laterală și volumul trunchiului de con ;
- Volumul conului din care a provenit trunchiul.

3. Să se rezolve ecuația : $\sin^2 x + \cos x = 1$.

4. Se dă expresia :

$$E = \frac{\sin(\alpha - \beta) + 2 \sin \beta \cos \alpha}{2 \cos \alpha \cos \beta - \cos(\alpha - \beta)}$$

a) Să se aducă expresia E la forma cea mai simplă.

b) Să se afle valoarea numerică a expresiei E , pentru

$$\alpha = \frac{\pi}{3}, \quad \beta = \frac{\pi}{6}$$

Licee industriale profil electrotehnic

1. Se dă expresia $E(x) = \log_2 (x^2 - 3x + 3)$

a) Să se determine mulțimea valorii lui x pentru care este definită ;

b) Să se studieze semnul lui $E(x)$ pe tot domeniul de definiție.

2. Să se rezolve sistemul :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ xy = 12 \end{cases}$$

3. Să se rezolve ecuația :

$$\sin 2x - \cos 2x = \sin x + \cos x.$$

4. Cunoscând $\cos \alpha = \frac{1}{7}$, $\cos \beta = \frac{13}{4}$, $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $\beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

să se arate că $\alpha - \beta = \frac{\pi}{3}$.

5. Să se arate că dacă într-un ΔABC există relația $\operatorname{tg} \frac{A}{2} = \frac{a}{b+c}$ atunci triunghiul este dreptunghic.

6. Într-o piramidă patrulateră regulată se cunosc latura bazei egală cu $2a$ cm și muchia egală cu $3a$ cm. Se cere :

a) volumul și aria laterală a piramidei;

b) volumul și aria laterală a trunchiului de piramidă care se obține secționând piramida cu un plan paralel cu baza, dus prin mijlocul înălțimii piramidei date.

Licee de matematică-fizică și economice

1. Să se reprezinte grafic funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} -x + 3 & \text{pentru } x < 0 \\ 3 & \text{pentru } 0 \leq x < 2 \\ 2x - 1 & \text{pentru } x \geq 2 \end{cases}$$

Să se afle valorile lui x știind că $f(x) + f(-x) = 6$.

2. Să se rezolve ecuațiile.

a) $2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} = 6^x + 6^{x+1}$

b) $\log_4(12 \cdot 2^x + 1) = -x \log_9 3$

3. Se consideră expresia $E(x) = \sin^2 2x - \sin x \sin 3x$.

a) Să se arate $0 \leq E(x) \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$;

b) Să se rezolve ecuația $E(x) = \frac{1}{2} (4\cos x + \cos 2x)$

4. În ΔABC ($A=90^\circ$) se dă $AB=6$ și $AC=8$. Pe AB se consideră punctul M și se duce $MN \parallel BC$ ($N \in AC$), iar BN și CM se intersectează în P .

a) locul geometric al punctului P , dacă M parcurge AB ;

b) Dacă $\widehat{BPC} = 135^\circ$ să se calculeze distanța de la vârful A la MN .

5. Se consideră conul cu raza R și $VO = 2R$. Să se calculeze raza cercului de intersecție a conului cu sfera de diametru VO .

Capitolul 26

CHESTIUNI DE EXAMEN

26.1. ADMITERE FACULTĂȚI (EXERCIIȚI REZOLVATE)

Geometrie

● Se consideră o piramidă $VABC$ cu baza ABC un triunghi echilateral de latură a . Știind că planul VBC este perpendicular pe planul bazei iar planele VAC și VAB formează cu planul bazei unghiuri de 60° , să se calculeze aria totală a piramidei.

Soluție.

Fie D mijlocul lui BC și $DE \perp AC$. Din simetria față de planul VAD , triunghiul VBC este isoscel, deci $VD \perp BC$, de unde VD perpendicular pe planul ABC , deci $VD \perp BC$. Atunci :

$AD \perp VD$ și cum $AC \perp DE$, rezultă $AC \perp VE$. Atunci :

$\widehat{VED} = 60^\circ$. Avem : $DE = \frac{a\sqrt{3}}{4}$ și din triunghiul dreptunghic

\widehat{VDE} cu $DVE = 30^\circ$, rezultă : $VE = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $VD = \frac{3a}{4}$.

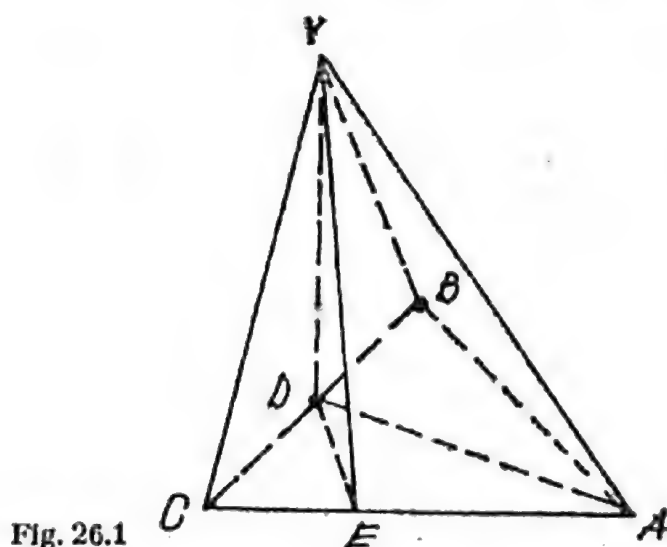


Fig. 26.1

$$\text{Aria totală este aria } ABC + 2 \text{ aria } VAB + \text{aria } VBC = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + \\ + 2 \frac{AB \cdot VE}{2} + \frac{BC \cdot VD}{2} = \frac{3a^2}{8} (2\sqrt{5} + 1).$$

● Să se calculeze lungimea laturii tetraedrului regulat înscris într-o sferă de rază R .

Soluție.

Fie AI înălțimea din A și O centrul sferei. Dacă a este latura tetraedrului, atunci: $DI = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ și din $\triangle ADI$, ODI , $AI = \sqrt{AD^2 - DI^2} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$, $OI = \sqrt{R^2 - \frac{a^2}{3}}$. Scriind că $AO + OI = AI$, rezultă: $R + \sqrt{R^2 - \frac{a^2}{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$, de unde: $a = \frac{2\sqrt{6}}{3} R$. (fig. 26.2)

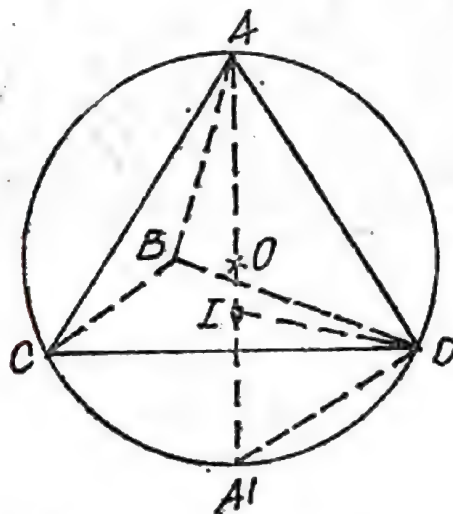


Fig. 26.2

● Se dă un trapez isoscel $ABCD$ ($AB \parallel CD$, $\widehat{ABC} = \widehat{BAD} = 45^\circ$) pentru care laturile $BC = CD = DA = a$. Să se calculeze în funcție de a , volumul corpului obținut prin rotația trapezului $ABCD$ în jurul laturii neparalele AD .

Soluție.

Fie E intersecția lui AD cu BC . Se observă că unghiul $\widehat{AEB} = 90^\circ$.
Fie B' și C' simetricele lui B și C față de E . Volumul cerut este :

$$V = V_{\text{con } BAB'} - V_{\text{con } CDC'}. \text{Cum } DE = EC = \frac{a\sqrt{2}}{2}, \text{ rezultă :}$$

$$V_{\text{con } BAB'} = \frac{\pi}{3} \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 a^3, V_{\text{con } CDC'} = \frac{\pi a^3 \sqrt{2}}{12} \quad (\text{fig. 26.3})$$

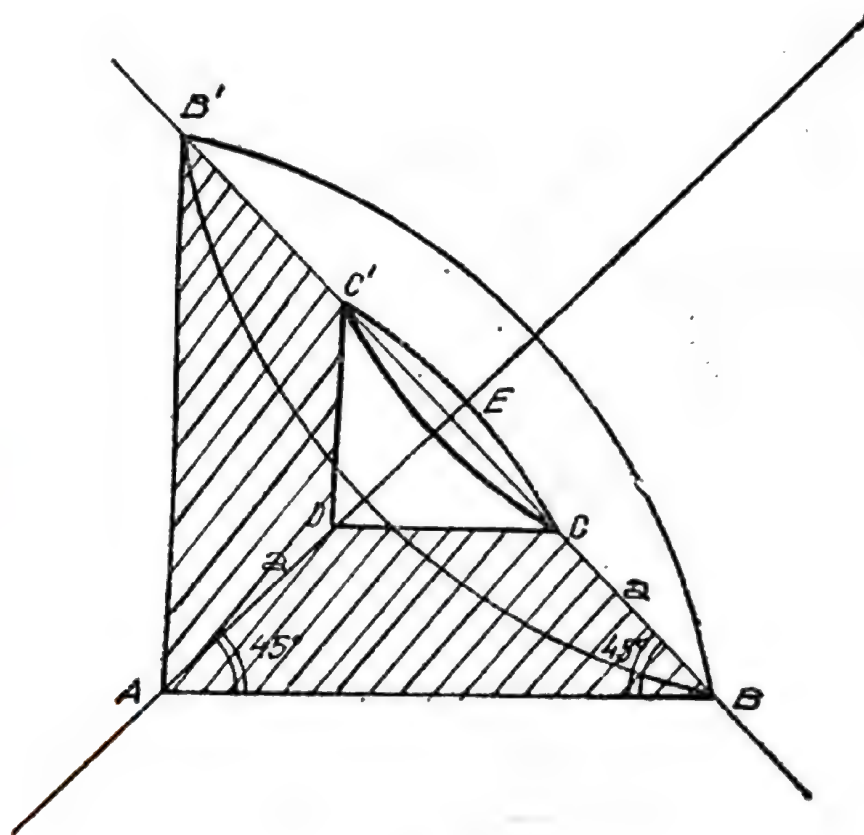


Fig. 26.3

$$\text{Deci : } V = \frac{\pi}{3} \left[\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 - \frac{\sqrt{2}}{4} \right] a^3 = \frac{\pi}{6} a^3 (5 + 3\sqrt{2}).$$

● Să se calculeze volumul unei piramide exagonale regulate cunoscând înălțimea ei h și unghiul 2α format de muchiile egale ale unei fețe laterale. Pentru ce valori ale unghiului este posibilă problema ?

Soluție.

Fie AB o latură a exagonului, M mijlocul lui AB și SO înălțimea piramidei. Notăm $OB = AB = x$.

Din $\triangle SOB$, rezultă: $SB^2 = x^2 + h^2$. Din $\triangle SMB \Rightarrow \frac{x}{2} = SB \sin \alpha$.

Din ultimile două egalități rezultă:

$$\frac{x}{4} = (x^2 + h^2) \sin^2 \alpha, x^2(1 - 4 \sin^2 \alpha) = 4h^2 \sin^2 \alpha.$$

Deci:

$$x^2 = \frac{4h^2 \sin^2 \alpha}{1 - 4 \sin^2 \alpha} = \frac{4h^2 \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 \alpha}. \quad (\text{fig. 26.4})$$

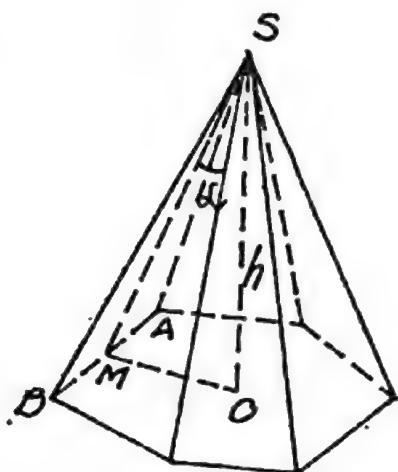


Fig. 26.4

Problema are sens dacă $1 - 4 \sin^2 \alpha > 0$, deci $\sin \alpha < \frac{1}{2}$ (căci $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$) de unde $\alpha < \frac{\pi}{6}$.

Aria exagonului este:

$$S = 6 \cdot \frac{x \cdot OM}{2} = 3x \cdot \frac{x\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}x^2}{2} = \frac{6\sqrt{3}h^2 \sin^2 \alpha}{1 - 4 \sin^2 \alpha}$$

iar volumul piramidei este:

$$V = \frac{h}{3} \cdot S_{\text{ex}} = \frac{2\sqrt{3}h^3 \sin^2 \alpha}{1 - 4 \sin^2 \alpha}$$

● Se consideră piramida $SABCD$ cu baza un dreptunghi de dimensiuni $AB = a$, $BC = b$, avînd S situat pe perpendiculara dusă în A pe planul $ABCD$ la distanța h de acesta. Să se arate că centrul sferei circumscrise piramidei este la mijlocul muchiei SC și să se calculeze raza acestei sfere.

Soluție.

Avem : $DC \perp SA$, $DC \perp DA$, deci DC este perpendicular pe planul SAD și $\widehat{SDC} = \frac{\pi}{2}$. Similar $\widehat{SBC} = \frac{\pi}{2}$. Din punctele A, B, D , muchia SC este văzută sub unghi drept, deci sfera cu centrul în mijlocul lui SC și diametru SC trece prin toate vîrfurile piramidei. Raza sferei este :

$$\frac{1}{2} SC = \frac{1}{2} \sqrt{SA^2 + AC^2} = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2 + h^2} \quad (\text{fig. 26.5})$$

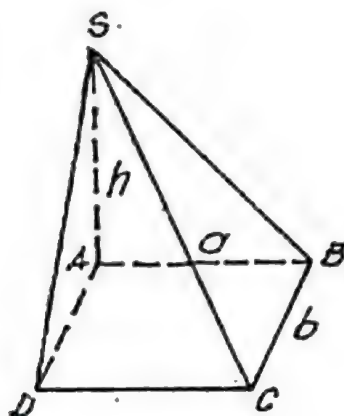


Fig. 26.5

● Un romb avînd latura a și unul din unghiurile ascuțite de 60° se rotește în jurul unei laturi. Să se calculeze volumul corpului rezultat din rotație.

Soluție.

Volumul corpului de rotație obținut este echivalent cu volumul unui cilindru avînd înălțimea egală cu a și raza bazei $a \cos 30^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Volumul este egal cu : $\frac{3\pi}{4} a^3$. (fig. 26.6)

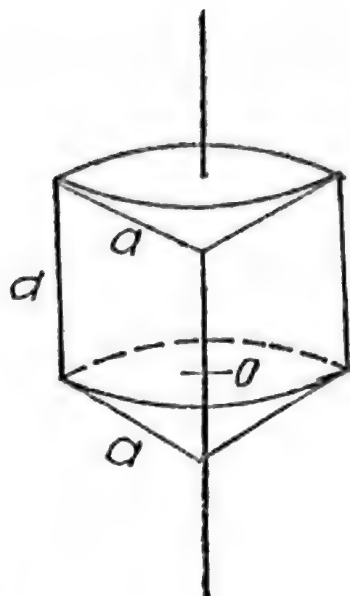


Fig. 26.6

● Să se calculeze aria unui trapez cunoscând lungimile diagonalelor sale d_1 și d_2 și înălțimea h .

Soluție.

Notăm $AC = d_1$, $BD = d_2$. $CE = DF = h$; în triunghiurile dreptunghice ACE și AFB :

$$AE = \sqrt{d_1^2 - h^2}, \quad BF = \sqrt{d_2^2 - h^2}, \text{ deci:}$$

$DC = AB = AE + BF = \sqrt{d_1^2 - h^2} + \sqrt{d_2^2 - h^2}$ și aria trapezului este:

$$S = \frac{h}{2} (\sqrt{d_1^2 - h^2} + \sqrt{d_2^2 - h^2}). \quad (\text{fig. 26.7})$$

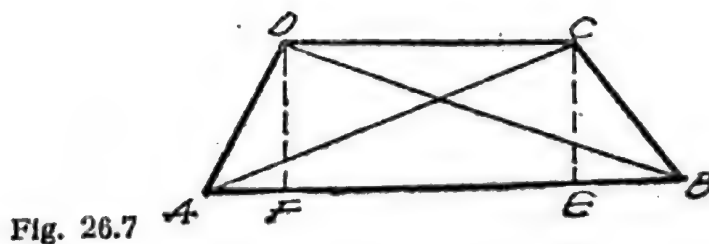


Fig. 26.7

● Să se calculeze raportul între aria unui romb și aria unui trapez isoscel, circumscrise aceluiasi cerc, rombul și trapezul avînd unghiurile ascuțite egale cu un același unghi dat α .

Soluție.

Fie R raza cercului. Latura rombului este :

$$R \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + R \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = \frac{2R}{\sin \alpha}, \text{ deci aria rombului va fi :}$$

$$\frac{2R}{\sin \alpha} \cdot 2R = \frac{4R^2}{\sin \alpha}.$$

Baza mare a trapezului este egală cu $2R \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$, iar baza mică $2R \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$, deci aria trapezului va fi :

$$\frac{1}{2} \left(2R \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + 2R \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \right) \cdot 2R = \frac{4R^2}{\sin \alpha} \quad (\text{fig. 26.8})$$

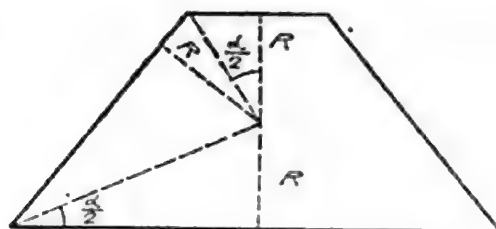


Fig. 26.8

Raportul cerut este egal cu 1.

● Într-un dreptunghi $ABCD$ ($AB > BC$) se duce diagonala AC . Fie E și F punctele de tangență cu diagonala AC ale cercurilor înscrise respectiv în triunghiurile ABC și ACD . Să se calculeze lungimea segmentului EF în funcție de laturile $AB = a$ și $BC = b$.

Soluție.

Se notează B' și D' punctele de tangență cu AB și AD ale cercurilor. Deoarece $EF = AE - AF$, iar $AE = AB' = a - r$, $AF = AD' = b - r$, rezultă $EF = a - b$. (fig. 26.9)

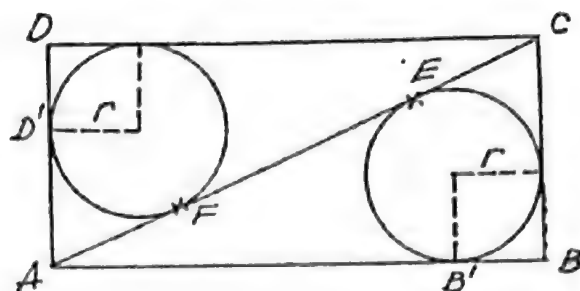


Fig. 26.9

● Se dau două cercuri O_1 și O_2 , tangente exterioare. Prin punctul lor comun de tangență T se duc două drepte arbitrare ATC și DTB , care taie cercul O_1 în A și D și cercul O_2 în C și B . Să se arate că patrulaterul $ABCD$ este un trapez.

Soluție.

Fie $T'T''$ tangenta în T la cele două cercuri. Se observă că :

$\widehat{TBC} = \widehat{T'TC} = \widehat{ATT''} = \widehat{ADT}$. Rezultă : $\widehat{DBC} = \widehat{BDA}$, deci $AD \parallel BC$. (fig. 26.10)

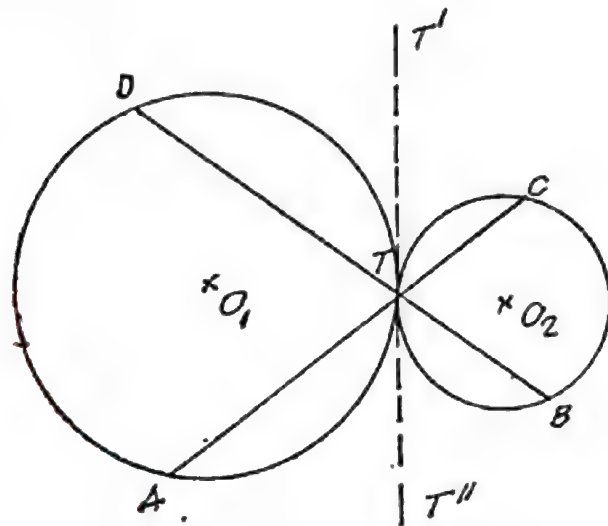


Fig. 26.10

● Se consideră două cercuri de centre O_1 și O_2 , tangente exterior în T . Fie MN una din tangentele comune exterioare (M și N punctele de tangență) și A și B punctele în care O_1O_2 întâlnește a doua oară cele două cercuri. Să se arate că patrulaterul $AMNB$ este inscripțibil.

Soluție :

Fie $\widehat{O_1AM} = \alpha$. Avem : $\widehat{O_2O_1M} = 2\alpha$ și $\widehat{BO_2N} = 2\alpha$.

Atunci $\widehat{O_2NB} = \frac{\pi - 2\alpha}{2} = \frac{\pi}{2} - \alpha$,

deci $\widehat{MNB} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - \alpha = \pi - \alpha$. (fig. 26.11)

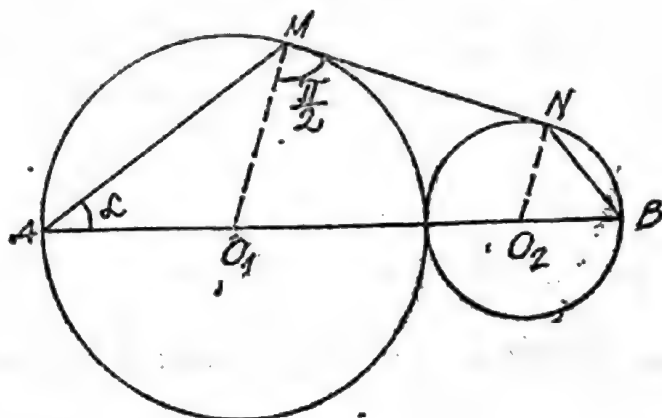


Fig. 26.11

● Pe latura BC a unui triunghi isoscel ABC ($AB = AC$) se consideră două puncte P și Q , astfel încât $P \in BM$, $Q \in MC$ (M mijlocul lui BC). Paralelele duse prin P și Q la AM intersectează laturile AB și AC respectiv în P' și Q' . Să se arate că dacă P este mobil iar lungimea segmentului PQ este constantă atunci aria trapezului $PQQ'P'$ este constantă.

Soluție :

$\widehat{B} = \widehat{C}$, deci triunghiurile dreptunghice BPP' și CQQ' , sînt asemenea cu triunghiul ABM , deci :

$$\frac{PP'}{AM} = \frac{BP}{BM}, \frac{QQ'}{AM} = \frac{QC}{BM}$$

Din acestea se deduce :

$$\frac{PP' + QQ'}{AM} = \frac{BP + QC}{BM} \quad (\text{fig. 26.12})$$

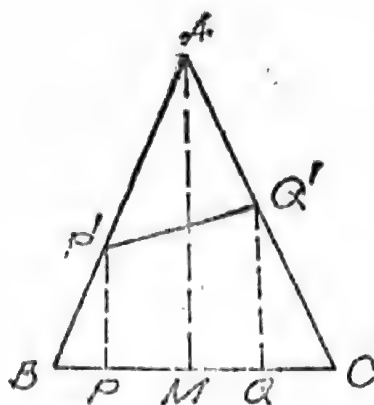


Fig. 26.12

Dar AM , BM și $BP + QC = BC - PQ$, sînt constante și din ultima egalitate, rezultă că $PP' + QQ'$ este constantă.

Prin urmare: $\frac{(PP' + QQ')PQ}{2}$, rămîne constantă.

● Se consideră un trapez dreptunghic $ABCD$ ($\hat{A} = \hat{D} = 90^\circ$) în care cele două baze au lungimile $AB = a$ și $CD = b$ iar latura ne paralelă $BC = a + b$. Dacă E este mijlocul laturii ne paralele AD , să se arată ce triunghiul BEC este dreptunghic.

Soluție.

Fie $CC' \perp AB$

$$AD = CC' = \sqrt{(a+b)^2 - (a-b)^2} = 2\sqrt{ab}.$$

$$CE = \sqrt{b^2 + ab}, \quad EB = \sqrt{a^2 + ab}$$

Deci în $\triangle BEC$, avem: $CE^2 + BE^2 = BC^2$, deci $\hat{BEC} = 90^\circ$.

(fig. 26.13)

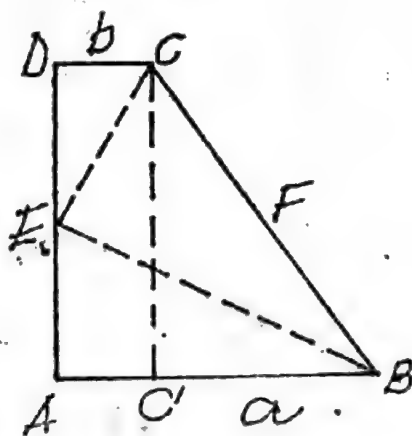


Fig. 26.13



● Se dă paralelogramul $ABCD$ avînd laturile $AB = CD = 3a$, $AD = BC = a\sqrt{2}$ și unghiul $\widehat{BAD} = 45^\circ$. Să se arate că patrulaterul $MNPQ$, unde M, N, P și Q sînt respectiv mijloacele laturilor AB, BC, CD și DA este de asemenea un paralelogram și să se calculeze raportul dintre ariile paralelogramelor $ABCD$ și $MNPQ$.

Soluție.

QM este paralel cu BD și egal cu $\frac{1}{2} BD$. Aceiași proprietate o are NP , deci $MNPQ$ este paralelogram.

Aria $AMQ = \frac{1}{2}$ aria $ADB = \frac{1}{2}$ aria $ABCD$. Aceiași proprietate o au triunghiurile BMN, CPN, DPQ , deci aria $MNPQ = \text{aria } ABCD - \frac{4}{6} \text{ aria } ABCD = \frac{1}{2} \text{ aria } ABCD$, deci $\frac{\text{aria } ABCD}{\text{aria } MNPQ} = 2$.
(fig. 26.14)

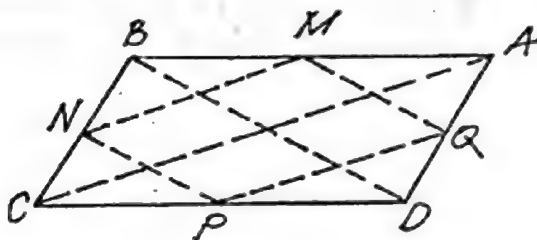


Fig. 26.14

În particular, se observă că $BB' = a$ și aria $ABCD = BC \cdot BB' = 3a^2$. Apoi aria $AMQ = \frac{3a}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \frac{\sin 45^\circ}{2} = \frac{3a^2}{8}$, deci aria $MNPQ = \text{aria } ABCD - 4 \text{ aria } AMQ = 3a^2 - \frac{3a^2}{2} = \frac{3a^2}{2}$ etc.

● Fie patrulaterul inscriptibil $ABCD$.

1) Notînd cu O punctul de intersecție al diagonalelor AC și BD , să se arate că:

$$AC^2 + OB^2 = OD^2 = BD^2 + OA^2 + OC^2.$$

2) Dacă paralela prin O la CD intersectează prelungirea laturii AB în P , să se arate că:

$$PO^2 = PA \cdot PB.$$

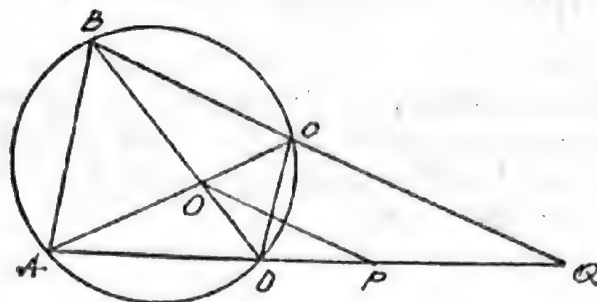


Fig. 26.15

Soluție.

1) Conform teoremei lui Ptolemeu avem :

$$AC^2 + BD^2 = AB \cdot DC + BC \cdot AD. \quad (1)$$

Membru întâi al relației de demonstrat se poate scrie astfel :

$$\begin{aligned} AC^2 + OB^2 + OD^2 &= AC^2 + (OB + OD)^2 - 2 \cdot OB \cdot OD = \\ &= AC^2 + BD^2 - 2 \cdot OB \cdot OD = AB \cdot DC + BC \cdot AD - 2 \cdot OB \cdot OD. \end{aligned}$$

În mod analog pentru membrul doi avem :

$$\begin{aligned} BD^2 + OA^2 + OC^2 &= BD^2 + (OA + OC)^2 - 2 \cdot OA \cdot OC = \\ &= BD^2 + AC^2 - 2 \cdot OA \cdot OC = AB \cdot DC + BC \cdot AD - 2 \cdot OA \cdot OC. \end{aligned}$$

Dar, conform puterii punctului interior față de cerc avem :

$$OA \cdot OC = OB \cdot OD.$$

Prin urmare : $AC^2 + OB^2 + OD^2 = BD^2 + OA^2 + OC^2$.

2) Prelungim DC pînă taie pe AB în Q .

$$\text{Avem : } \triangle AOP \sim \triangle ACQ, \text{ de unde : } PA = \frac{PO \cdot QC}{QC}. \quad (2)$$

$$\text{De asemenea } \triangle OBP \sim \triangle DBQ, \text{ de unde : } PB = \frac{PO \cdot QB}{QD}. \quad (3)$$

Înmulțind relațiile (2) și (3) obținem :

$$PA \cdot PB = \frac{PO^2 \cdot QA \cdot QB}{QC \cdot QD}.$$

Dar $QA \cdot QB = QC \cdot QD$ (puterea punctului Q față de cerc).
Deci : $PA \cdot PB = PO^2$.

● Să se calculeze aria și volumul corpului obținut prin rotirea triunghiului dreptunghic ABC ($A = 90^\circ$) în jurul unei drepte ce trece prin punctul A și formează cu AC un unghi de 30° , în funcție de catetele $AB = c$, $AC = b$.

Soluție.

Avem : $AB = c$, $AC = b$; $\widehat{DAC} = 30^\circ$; $\widehat{BAE} = 60^\circ$;

$$BE = \frac{c\sqrt{3}}{2}; DC = \frac{b}{2}; AD = \frac{b\sqrt{3}}{2};$$

$$AE = \frac{c}{2}; BC = \sqrt{b^2 + c^2}. \text{ Se obține aria :}$$

$$A = \frac{\pi}{2} [\sqrt{b^2 + c^2} (b + c\sqrt{3}) + b^2 + c^2 \sqrt{3}] \text{ și volumul :}$$

$$V = \frac{\pi bc}{6} (b + c\sqrt{3}). \quad (\text{fig. 26.16})$$

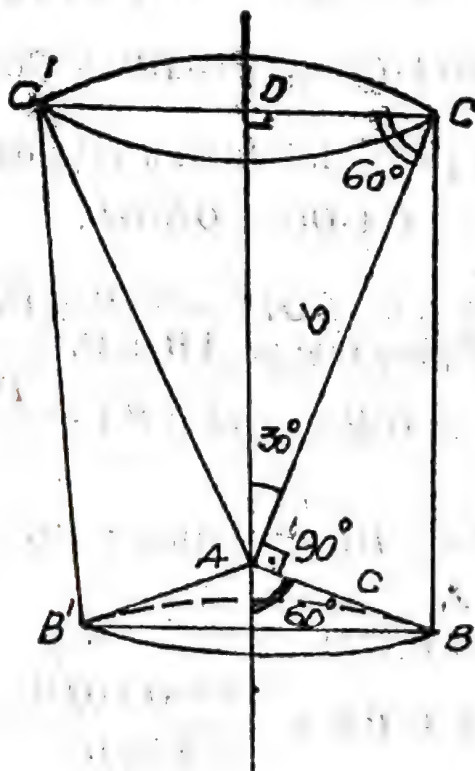


Fig. 26.16

● Într-un plan P se duc două drepte d_1 și d_2 , care se intersectează în Q . Dintr-un punct M , exterior planului, se duce perpendiculara pe d_1 care se intersectează cu d_1 în M_1 și perpendiculara pe d_2 care se intersectează cu d_2 în M_2 . Fie N proiecția punctului M pe planul P . Să se arate că patrulaterul M_1QM_2N este inscrip-tibil.

Soluție.

$$\left. \begin{array}{l} MN \perp P \\ MM_1 \perp d_1 \end{array} \right\} \Rightarrow NM_1 \perp d_1 \Rightarrow \widehat{QM_1N} = 90^\circ$$

(fig. 26.17)

$$\left. \begin{array}{l} MN \perp P \\ MM_2 \perp d_2 \end{array} \right\} \Rightarrow MN_2 \perp d_2 \Rightarrow \widehat{QM_2N} = 90^\circ.$$

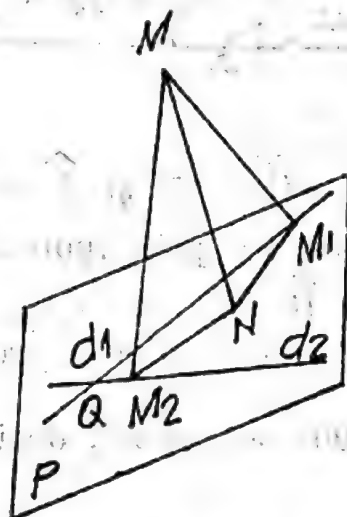


Fig. 26.17

Deci M_1QM_2N este inscrip-tibil, deoarece $\widehat{QM_1N} + \widehat{QM_2N} = 180^\circ$.

● În triunghiul ABC , unghiul A este de două ori mai mare ca unghiul B .

a) Să se calculeze unghiurile A , B și C , cînd triunghiul ABC este isoscel ; aceeași problemă în cazul în care triunghiul ABC este dreptunghic.

b) Punctul D fiind intersecția bisectoarei interioare a unghiului A cu latura BC , să se arate că bisectoarea unghiului ADC este paralelă cu latura AB .

c) Să se arate că latura AC este media proporțională între latura BC și segmentul DC .

d) Să se construiască triunghiul ABC când se dau laturile AB, AC și relația $\hat{A} = 2\hat{B}$.

Soluție :

a) Dacă triunghiul este isoscel să presupunem că :

$$1) \hat{A} = \hat{C} = 2\alpha \Rightarrow \hat{A} = \hat{C} = 72^\circ \text{ și } \hat{B} = 36^\circ \quad (\text{fig. 26.18})$$

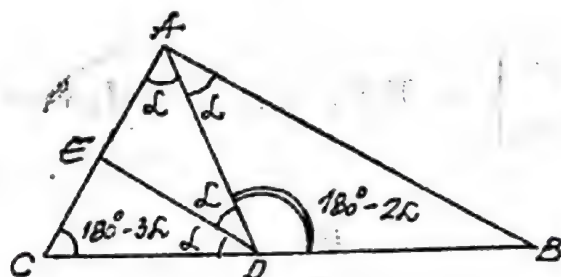


Fig. 26.18

2) $\hat{B} = \hat{C} = \alpha \Rightarrow \hat{B} = \hat{C} = 45^\circ$ și $\hat{A} = 90^\circ$, adică triunghiul dreptunghic isoscel. Deoarece prin ipoteză, $\hat{A} = 2\hat{B}$, nu poate avea loc egalitatea $\hat{A} = \hat{B}$.

Dacă triunghiul este dreptunghic să presupunem că :

$$1) \hat{C} = 90^\circ \Rightarrow 3\alpha = 90^\circ \Rightarrow \alpha = 30^\circ, \text{ deci } \hat{C} = 90^\circ, \hat{B} = 30^\circ, \hat{A} = 60^\circ.$$

$$2) \hat{A} = 90^\circ \Rightarrow 2\alpha = 90^\circ \Rightarrow \alpha = 45^\circ, \text{ deci } \hat{A} = 90^\circ, \hat{B} = \hat{C} = 45^\circ.$$

De asemenea \hat{B} nu poate fi de 90° pentru că atunci $\hat{A} = 180^\circ$.

b) Deoarece $\hat{ADB} = 180^\circ - 2\alpha$, rezultă că $\hat{ADC} = 2\alpha$. Cum DE este bisectoarea unghiului \hat{ADC} , avem $\hat{ADE} = \alpha$. Deci $DE \parallel AB$.

c) Notînd $AB = c, AC = b$ și $\hat{B} = \alpha$, rezultă $\hat{A} = 2\alpha, \hat{C} = 180^\circ - 3\alpha$. Aplicînd teorema sinusurilor se obține :

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \Rightarrow \frac{b}{\sin \alpha} = \frac{c}{\sin 3\alpha}$$

de unde :

$$\sin \alpha = \pm \sqrt{\frac{3b - c}{4b}}.$$

Se determină $\alpha = \arcsin \sqrt{\frac{3b - c}{4b}} = \widehat{B}$ cu condiția $0 < \frac{3b - c}{4b} < 1$; ceea ce ne conduce la $3b > c$.

Știind unghiurile și două laturi ale triunghiului, se poate face construcția cu rigla și compasul.

● Se consideră piramida regulată $VABC$, avînd $AB = BC = CA = a$ și $VA = VB = VC = b$ ($b > 0$) (fig. 26.19). Se no-

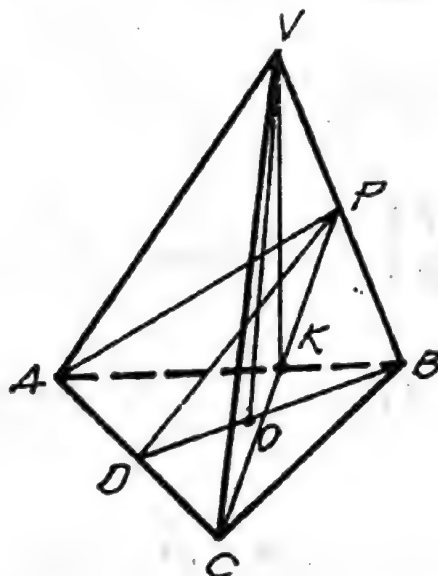


Fig. 26.19

tează cu P proiecția vârfului A pe muchia VB . Să se calculeze :

- Aria triunghiului PAC ;
- Volumul tetraedrului $PAVC$

Soluție.

a) Triunghiurile isoscele VAB, VBC, VAC , sînt egale. De asemenea triunghiurile AVP și CVP sînt egale și deci $AP = PC$. Deci $\triangle APC$ isoscel. Construim $PD \perp AC$, deci PD este și mediană în $\triangle APC$; $VK \perp AB$.

Avem :

$$S_{VAB} = \frac{AB \cdot VK}{2} = \frac{VB \cdot AP}{2}$$

sau :

$$a \cdot VK = b \cdot AP; AP = \frac{a}{b} \quad VK = \frac{a}{b} \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{4b^2 - a^2}}{2b}$$

$$\begin{aligned} PD^2 &= AP^2 - AD^2 = \frac{a^2(4b^2 - a^2)}{4b^2} - \frac{a^2}{4} = \\ &= \frac{a^2(3b^2 - a^2)}{4b^2}; \quad PD = \frac{a}{2b} \sqrt{3b^2 - a^2}; \end{aligned}$$

$$S_{PAC} = \frac{AC \cdot PD}{2} = \frac{a^2 \sqrt{3b^2 - a^2}}{4b};$$

$$\text{Avem: } \left. \begin{array}{l} VP \perp AP \\ VP \perp CP \end{array} \right\} \Rightarrow VP \perp (AP, PC) \Rightarrow V_{PAVC} = \frac{S_{PAC} \cdot VP}{3}$$

$$VP^2 = b^2 - AP^2 = \frac{(2b^2 - a^2)^2}{4b^2}, \quad VP = \frac{2b^2 - a^2}{2b};$$

Obținem :

$$V_{PAVC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2b^2 - a^2}{2b} \cdot \frac{a^2 \sqrt{3b^2 - a^2}}{4b} = \frac{a^2}{24b^2} (2b^2 - a^2) \sqrt{(3b^2 - a^2)}$$

Trigonometrie

- Să se rezolve ecuația trigonometrică :

$$\cos x + \sqrt{3} \sin x = 2.$$

Soluție.

Ecuația poate fi scrisă sub forma :

$$\frac{1}{2} \cos x + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x = 1,$$

sau :

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 1, \text{ deci } x - \frac{\pi}{3} = 2k\pi,$$

$$x = 2k\pi + \frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}.$$

Se mai poate rezolva astfel : punind $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$ se obține

$$t = \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{x}{2} = \frac{\pi}{6} + k\pi.$$

- Să se demonstreze identitatea :

$$\sin^2(x + y) - \sin^2(x - y) = \sin 2x \cdot \sin 2y.$$

Soluție :

Una din metodele de rezolvare este :

$$\begin{aligned} \sin^2(x + y) - \sin^2(x - y) &= [\sin(x + y) + \sin(x - y)] \cdot \\ &\cdot [\sin(x + y) - \sin(x - y)] = 2 \sin x \cos y \cdot 2 \sin y \cdot \cos x = \\ &= \sin 2x \sin 2y. \end{aligned}$$

- Să se scrie expresia :

$$E = 1 + \sin^2 x \cos^2 x + m(\sin^4 x + \cos^4 x) - 3m(\sin^6 x + \cos^6 x),$$

în funcție de $u = \sin 2x$, apoi să se determine parametrul m astfel încât E să nu depindă de x .

Soluție.

Deoarece :

$$\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2 \cos^2 x \sin^2 x = 1 - \frac{1}{2} u^2.$$

$$\sin^6 x + \cos^6 x = 1 - \frac{3}{4} u^2.$$

Rezultă :

$$E = 1 - 2m + \frac{7m - 1}{4} \cdot u^2.$$

E nu depinde de x dacă și numai dacă $m = \frac{1}{7}$, iar atunci $E = \frac{9}{7}$.

● Să se determine valorile lui m pentru care ecuația :

$$\sqrt{1 - \cos 2x} + \sqrt{1 + \cos 2x} = m,$$

admite soluții în intervalul $I = [0, \pi]$. Pentru $m = \sqrt{2}$ să se determine soluțiile acestei ecuații care se găsesc în intervalul I .

Soluție.

Înlocuind $1 - \cos 2x = 2 \sin^2 x$, $1 + \cos 2x = 2 \cos^2 x$, ecuația dată devine :

$$|\sin x| + |\cos x| = \frac{m}{\sqrt{2}}$$

Aceasta se desparte în două :

$$\sin x + \cos x = \frac{m}{\sqrt{2}}, \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\sin x - \cos x = \frac{m}{\sqrt{2}}, \quad x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right],$$

și se pot aduce la forma :

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{m}{2}, \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]; \quad \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{m}{2}, \quad x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$$

$$0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{4} \leq x + \frac{\pi}{4} \leq \frac{3\pi}{4} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} \leq \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \leq 1$$

$$\frac{\pi}{2} < x \leq \pi \Rightarrow \frac{\pi}{4} < x - \frac{\pi}{4} \leq \frac{3\pi}{4} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} < \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \leq 1.$$

Deci : $\frac{\sqrt{2}}{2} \leq \frac{m}{2} \leq 1, m \in [\sqrt{2}, 2]$.

Pentru $m = \sqrt{2}$, avem ecuațiile :

$$\sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2}, x \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right] \text{ sau } \left(x + \frac{\pi}{4} \right) \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \right],$$

$$\sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2}, x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi \right) \text{ sau } \left(x - \frac{\pi}{4} \right) \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \right).$$

Prima ecuație are soluțiile $x_1 = 0, x_2 = \frac{\pi}{2}$, iar a doua, soluția $x_3 = \pi$.

● Să se rezolve ecuația :

$$3 \cos^2 x - \sin^2 x - \operatorname{tg} x = 0.$$

Soluție.

Trebuie impusă condiția $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Scriind $\cos^2 x = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$, $\sin^2 x = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$, se obține ecuația :

$y^3 + y^2 + y - 3 = 0$ (cu $y = \operatorname{tg} x$) ale cărei soluții sînt $y_1 = 1$, $y_{2,3} = 1 \pm i\sqrt{2}$, singura acceptabilă fiind y_1 , se obțin soluțiile $x = \frac{\pi}{4} + n\pi, n$ întreg.

● Pe laturile BC, CA și AB ale unui triunghi oarecare ABC de arie S se consideră punctele A', B' și C' (A' între B și C , B' între C și A , C' între A și B), astfel încît $BA' = K \cdot BC$, $CB' = K \cdot CA$, $AC' = K \cdot AB$, ($0 < K < 1$) (fig. 26.20). Să se calcu-

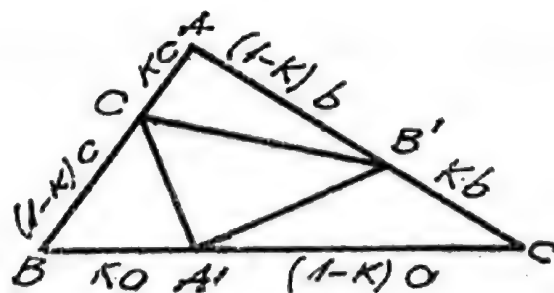


Fig. 26.20

leze aria S' a triunghiului $A'B'C'$ în funcție de S și K .

Soluție.

$$\text{Aria } AB'C' = \frac{1}{2} Kc (1 - K)b \sin A = K(1 - K) S.$$

$$\text{aria } BC'A' = \frac{1}{2} Ka (1 - K)c \sin B = K(1 - K) S.$$

$$\text{aria } CA'B' = \frac{1}{2} Kb \cdot (1 - K)a \sin C = K(1 - K) S.$$

$$S' = S - \text{aria } AB'C' - \text{aria } BC'A' - \text{aria } CA'B'.$$

$$S' = S - 3K(1 - K)S = S(1 - 3K + 3K^2).$$

● Să se rezolve ecuația trigonometrică :

$$\sin(x + a) + \cos(3x + a) + \sin(5x + a) + \cos(7x + a) = 0$$

unde a este un unghi dat.

Soluție.

$$[\sin(x + a) + \sin(5x + a)] + [\cos(3x + a) + \cos(7x + a)] = 0,$$

$$2 \sin(3x + a) \cos 2x + 2 \cos(5x + a) \cos 2x = 0,$$

$$\cos 2x \cdot [\sin(3x + a) + \cos(5x + a)] = 0,$$

$$\cos 2x = 0, 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi, x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\sin(x + a) + \cos(5x + a) = 0, \sin(3x + a) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - 5x - a\right) = 0,$$

deci :

$$2 \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \cos\left(4x + a - \frac{\pi}{4}\right) = 0,$$

de unde se obțin soluțiile :

$$x = \frac{\pi}{4} - k_1\pi; \quad k_1 \in \mathbb{Z} \text{ și}$$

$$x = -\frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{16} + \frac{k_2\pi}{4}, \quad k_2 \in \mathbb{Z}.$$

● Să se scrie sub formă trigonometrică numerele complexe $z_1 = 1 + i$ și $z_2 = \sqrt{3} - i$, apoi folosind formula lui Moivre să se scrie numărul complex :

$$Z = \frac{(1 + i)^8}{(\sqrt{3} - i)^3}$$

sub formă trigonometrică.

Soluție.

Scrierea sub formă trigonometrică a numerelor date este :

$$z_1 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right).$$

$$z_2 = 2 \left[\cos \left(-\frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{6} \right) \right] = \left(2 \left[\cos \frac{11\pi}{6} + i \sin \frac{11\pi}{6} \right] \right)$$

Deci :

$$z_1^8 = 16 (\cos 2\pi + i \sin 2\pi).$$

$$z_2^8 = 8 \left[\cos \left(-\frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right] = 8 \left[\cos \frac{11\pi}{2} + i \sin \frac{11\pi}{2} \right]$$

de unde :

$$\begin{aligned} z &= \frac{z_1^8}{z_2^8} = \frac{16}{8} \left[\cos \left(2\pi + \frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left(2\pi + \frac{\pi}{2} \right) \right] = \\ &= 2 \left[\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right]. \end{aligned}$$

Algebră și analiză

● Fiind dată ecuația : $x^4 - 6x^3 + 8x^2 + ax + b = 0$, să se determine a și b și să se rezolve ecuația, știind că rădăcinile x_1, x_2, x_3 și x_4 formează, în această ordine, o progresie aritmetică iar rădăcina $x_4 = 3$.

Indicație.

$$\begin{cases} x_1 + x_4 = x_3 + x_2 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = +6 \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = 8 \\ x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_2x_3x_4 = -a \\ x_1x_2x_3x_4 = b \end{cases}$$

De unde :

$$x_3 + x_2 = x_1 + 3$$

$$2(x_1 + 3) = 6 \Leftrightarrow x_1 + 3 = 3 \Leftrightarrow x_1 = 0$$

$$\begin{cases} x_2x_3 + 3(x_2 + x_3) = 8 \\ x_2x_3x_4 = -a \\ x_1x_2x_3 = -\frac{b}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2x_3 + 3(x_2 + x_3) = 8 \\ x_2x_3 = \frac{a}{3} \\ x_1x_2x_3 = \frac{b}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 + x_3 = \frac{24 + a}{9} \\ x_2x_3 = \frac{a}{3} \end{cases} \quad x_2 + x_3 = 3$$

$$\frac{24 + a}{9} = 3; \quad a = -3$$

Se află apoi $b = 0$.

● Să se afle valorile lui x pentru care sînt satisfăcute inecuațiile :

$$\frac{1}{3} \leq \frac{3^x + 1}{9^x + 3} \leq \frac{1}{2}$$

Indicație.

Prin substituția $3^x = y$ inecuația devine :

$$\frac{1}{3} \leq \frac{y + 1}{y^2 + 3} \leq \frac{1}{2}$$

● Să se determine x știind că suma termenilor al treilea și al cincilea din dezvoltarea binomului $(x + \sqrt{5})^6$ este egală cu 450.

Soluție.

$$T_3 + T_5 = C_6^4 x^2 5^2 + C_6^4 x^4 5 = 450 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^4 + 5x^2 - 6 = 0, \quad x = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

● Să se rezolve ecuația :

$$C_{x+1}^1 + C_{x+3}^3 = \frac{13}{6} C_{x+2}^2,$$

unde C_m^n este numărul combinărilor de m obiecte luate câte n .

Soluție.

Ecuația are sens dacă x este întreg și $x \geq 0$. Dezvoltînd se obține ecuația :

$$(x + 1)(2x^2 - 3x - 2) = 0.$$

Din soluțiile $-1, -\frac{1}{2}, 2$ convine numai $x = 2$.

● Să se determine valorile parametrilor reali a și b și să se rezolve ecuația $x^3 - 6x^2 + ax + b = 0$, știind că $x_1 = 1$, iar $\frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = \frac{5}{6}$ (x_1, x_2, x_3 fiind rădăcinile ecuației).

Soluție.

Din relațiile lui Viète $x_1 + x_2 + x_3 = 6$, $x_1 x_2 x_3 = -b$, se deduce că $x_2 + x_3 = 5$ și $x_2 x_3 = -b$. Atunci :

$$\frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = -\frac{5}{b}, \text{ de unde } b = -6.$$

Cum $x_1 = 1$ este rădăcină a ecuației rezultă $a + b = 5$, deci $a = 11$. Celelalte rădăcini ale ecuației sînt 2 și 3.

● Să se pună în ordine crescătoare numerele :

$A = 2, B = m, C = \frac{m+2}{2}, D = \sqrt{m^2 + 4}$ (discuție după valorile parametrului real m).

Soluție.

Numărul C este situat totdeauna între A și B iar $B < D$, $A < D$.

Dacă $m > 2$, atunci $A < C < B < D$ și dacă $m < 2$, atunci $B < C < A < D$ (în cazul cînd $m = 2$, avem $A = B = C < D$).

● Să se determine valorile parametrilor reali m și n știind că polinomul $P(x) = x^3 - 6x^2 + (m^2 + 2)x + n$ este divizibil cu polinomul $Q(x) = x^2 - 5x + 2m$.

Soluție.

Efectuînd împărțirea lui P la Q , rezultă citul $x - 1$ și restul $(m^2 - 2m - 3)x + n + 2m$.

Anulînd identic restul, va rezulta $\begin{cases} m^2 - 2m - 3 = 0, \\ n + 2m = 0. \end{cases}$

de unde $m_1 = 3, n_1 = 6; m_2 = -1, n_2 = 2$.

De asemenea, se poate aplica și metoda coeficienților nedeterminați :

$$x^3 - 6x^2 + (m^2 + 2)x + n = (x^2 - 5x + 2m)(x + \alpha) \text{ etc.}$$

● Să se rezolve ecuația :

$$\log_2 2x + \log_x 2x = 4.$$

Soluție.

Ecuația are sens pentru $x > 0$, $x \neq 1$ și se scrie :

$$\log_2 2x + \frac{\log_2 2x}{\log_2 x} = 4.$$

Se notează $\log_2 x = y$ și ecuația devine :

$$1 + y + \frac{1 + y}{y} = 4.$$

Se obține : $y^2 - 2y + 1 = 0$, $y = 1$, deci $x = 2$.

● Să se calculeze determinantul :

$$D = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix}$$

unde x_1 , x_2 și x_3 sînt rădăcinile ecuației :

$$x^3 + px + q = 0.$$

Soluție.

Adunînd elementele liniilor a doua și a treia la elementele primei linii, obținem :

$$D = \begin{vmatrix} x_1 + x_2 + x_3 & x_1 + x_2 + x_3 & x_1 + x_2 + x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix}$$

și deoarece $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, rezultă $D = 0$.

O altă soluție se obține dezvoltând determinantul :

$$D = 3x_1x_2x_3 - (x_1^3 + x_2^3 + x_3^3).$$

Dar x_1, x_2, x_3 , verificând ecuația rezultă :

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = -3q$$

și atunci :

$$3x_1x_2x_3 + 3q = 0.$$

- Să se reprezinte grafic funcția reală f definită prin :

$$f(x) = \frac{x^2 + 4x + 4}{x + 1}$$

Soluție.

Domeniul maxim de definiție al lui f este $\mathbb{R} - \{-1\}$. Apoi $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ și intersecțiile cu axele sînt $(0, 4)$, $(-2, 0)$.

Dreapta $x = -1$ este asimptotă verticală iar dreapta $y = x + 3$ este asimptotă oblică.

Cum $f'(x) = \frac{x^2 + 2x}{(x + 1)^2}$, tabloul de variație este :

x	$-\infty$	-2	-1	0	$+\infty$					
f'	$+$	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$	$+$		
f	$-\infty$	\nearrow	0	\searrow	$-\infty$	$+\infty$	\searrow	4	\nearrow	$+\infty$

Graficul funcției este dat în figura 26.20.

- Se dau matricile :

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \text{ și } X = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ u & v \end{vmatrix}$$

a) Să se determine u și v astfel încît : $AX = XA$.

b) Să se calculeze A^n ($n \in \mathbb{N}$).

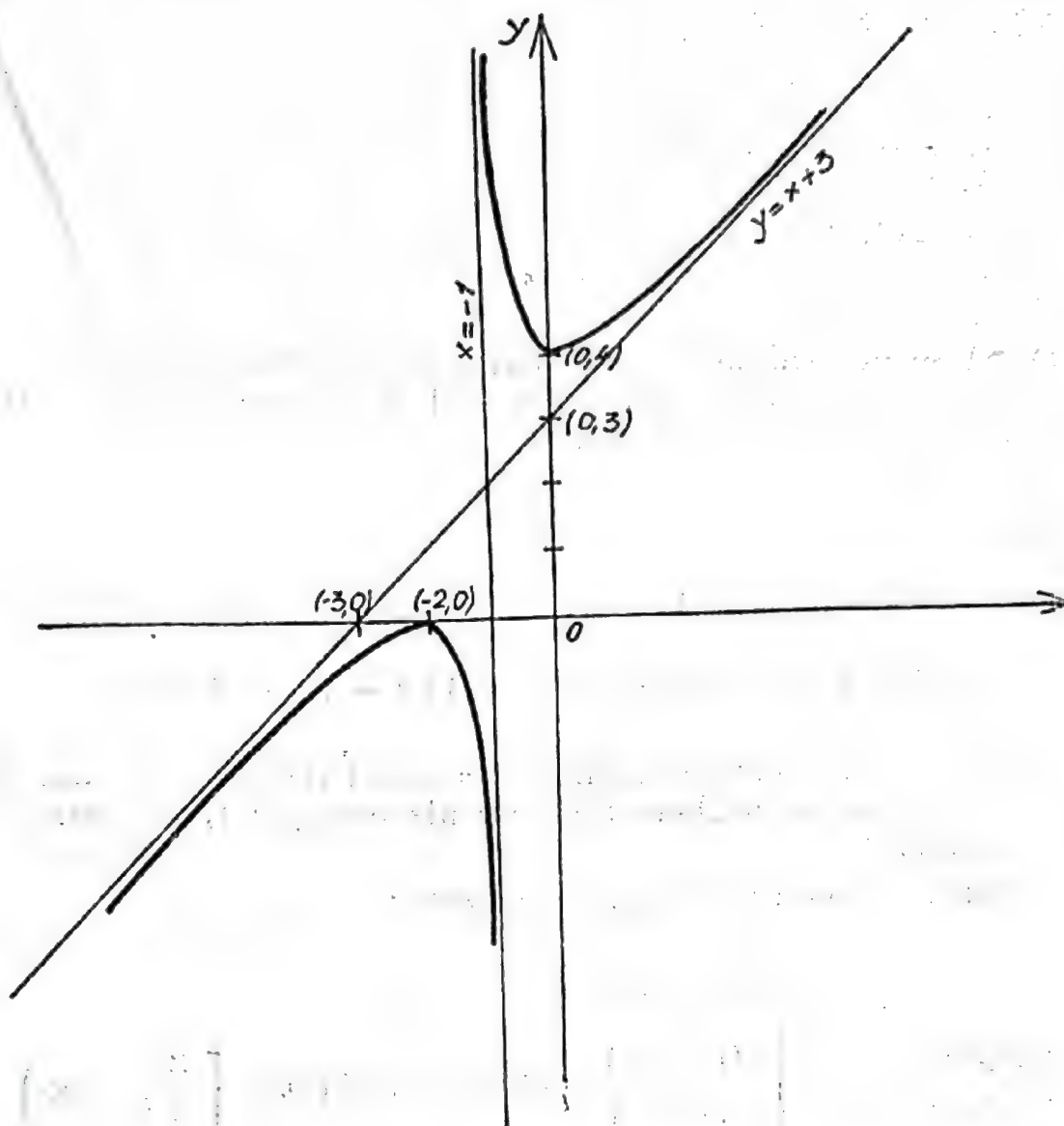


Fig. 26.20

• Să se calculeze integrala definită :

$$\int_4^7 \frac{3x - 5}{x^2 - 4x + 3} dx.$$

Soluție.

$$\text{Avem : } \frac{3x - 5}{x^2 - 4x + 3} \equiv \frac{1}{x - 1} + \frac{2}{x - 3}.$$

Atunci :

$$\int_4^7 \frac{3x-5}{x^2-4x+3} dx = (\ln/x - 1/+ 2 \ln/x - 3/) \Big|_4^7 =$$

$$= \ln(x-1)(x-3)^2 \Big|_4^7 = \ln 32 = 5 \ln 2.$$

● Să se determine valorile parametrului real m pentru care ecuația : $(m^2 + 1)x^2 - (2m + 1)x + 1 = 0$, are rădăcini reale situate în intervalul $(-\infty, 1]$.

Soluție.

Se face substituția $x - 1 = y$, $x = y + 1$ și ecuația dată devine :

$$(m^2 + 1)y^2 + (2m^2 - 2m + 1)y + (m - 1)^2 = 0.$$

Pentru ca ambele rădăcini ale ecuației date să fie mai mici decît 1, trebuie ca ambele rădăcini ale ecuației transformate să fie negative.

Condițiile necesare și suficiente sînt :

$$\begin{cases} \Delta \geq 0 \\ P \geq 0 \\ S \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4m - 3 \geq 0 \\ \frac{(m-1)^2}{m^2+1} \geq 0 \text{ cu soluția } m \in \left[\frac{3}{4}, +\infty \right) \\ \frac{-2m^2 - 2m + 1}{m^2+1} \leq 0 \end{cases}$$

● Să se rezolve ecuația :

$$3 \log_{1000}(x-1) + 2 \log_{100}(x+3) - 2^{x-3} \log_{10}(x^2 + 2x - 3) = 0$$

Soluție.

$$\text{Ecuația are sens pentru } \begin{cases} x-1 > 0 \\ x+3 > 0 \\ x^2 + 2x - 3 > 0 \end{cases} \Rightarrow x > 1$$

Ținând cont de egalitatea: $\log_a^3 b^n = \log_a b$, ecuația poate fi scrisă sub forma: $\lg(x-1) + \lg(x+3) - 2^{x+3} \lg(x+3)(x-1) = 0$, echivalentă cu: $(1 - 2^{x+3}) \lg(x+3)(x-1) = 0$.

Din: $2^{x+3} = 1$, rezultă $x = -3$, care nu convine.

Din $\lg(x+3)(x-1) = 0$, rezultă: $x^2 + 2x - 4 = 0$, cu o singură soluție acceptabilă: $x = -1 + \sqrt{5}$.

● Se consideră funcția reală f definită pe intervalul $I = (0, \infty)$ prin $f(x) = e^{-x} \sin x$. Să se arate că oricare ar fi $x \in I$, avem:

$$|f(x)| < 1, |f'(x)| < \sqrt{2}, |f''(x)| < 2.$$

și să se verifice că abscisele punctelor de maxim ale lui f în intervalul I se află în progresie aritmetică, iar ordonatele corespunzătoare acestor puncte, în progresie geometrică.

Soluție.

Pentru orice $x \in I$, avem: $f'(x) = e^{-x} (\cos x - \sin x)$,

$$f''(x) = -2e^{-x} \cos x.$$

Dacă $x \in (0, +\infty)$, atunci $0 < e^{-x} < 1$, deci:

$$|f(x)| = e^{-x} |\sin x| < 1$$

$$\begin{aligned} |f'(x)| &= |e^{-x} (\cos x - \sin x)| = e^{-x} \left| \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \sin x \right| = \\ &= e^{-x} \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) < \sqrt{2} \end{aligned}$$

$$|f''(x)| = |-2e^{-x} \cos x| = 2e^{-x} |\cos x| < 2.$$

Punctele de extrem sînt printre soluțiile situate în I ale ecuației $f'(x) = 0$. Se obține $x_k = k\pi + \frac{\pi}{4}$ ($k > 0, k \in \mathbb{Z}$). Precizarea extremelor:

$$f''(x) = -2e^{-x_k} \cos\left(k\pi + \frac{\pi}{4}\right) < 0, \text{ dacă și numai dacă } k \text{ este par.}$$

Pentru k impar $f''(x_k) > 0$.

Prin urmare pentru k par, punctele x_k vor fi de maxim.
 $x_0 = \frac{\pi}{4}$, $x_2 = \frac{\pi}{4} + 2\pi$, $x_4 = \frac{\pi}{4} + 4\pi$ formează o progresie aritmetică cu rația 2π , iar ordonatele corespunzătoare :

$$f_0\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\frac{\pi}{4}}; \quad f_2\left(\frac{\pi}{4} + 2\pi\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\frac{\pi}{4} - 2\pi};$$

$f_4\left(\frac{\pi}{4} + 4\pi\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\frac{\pi}{4} - 4\pi}$, formează o progresie geometrică cu rația $\frac{1}{e^{2\pi}}$.

Observație. Precizarea extremelor se poate face folosind și semnul derivatei f' pe I .

● Să se găsească domeniul maxim de definiție D al funcției $f(x) = \sqrt{x + 8 - 6\sqrt{x - 1}}$. Există puncte în D în care funcția f nu este derivabilă?

Soluție.

Mulțimea D este definită prin inegalitățile: $x - 1 \geq 0$ și $x + 8 - 6\sqrt{x - 1} \geq 0$. Rezultă: $D = [1, +\infty) \cap E$.

$$\begin{aligned} \text{Apoi: } f(x) &= \sqrt{(\sqrt{x - 1} - 3)^2} = |\sqrt{x - 1} - 3| = \\ &= \begin{cases} 3 - \sqrt{x - 1}, & \text{pt. } 1 \leq x \leq 10 \\ \sqrt{x - 1} - 3, & \text{pt. } x > 10. \end{cases} \end{aligned}$$

Observație. La acest rezultat se poate ajunge și folosind formula de transformare a radicalilor dubli. Pe intervalele $(1, 10)$ și $(10, +\infty)$, funcția f este elementară, deci este derivabilă.

$$\text{În: } x = 1, f'_d(1) = +\infty.$$

$$\text{În: } x = 10, f'_s(10) = -\frac{1}{6} \text{ și } f'_d(10) = \frac{1}{6}.$$

Deci punctele din D în care f nu este derivabilă sînt :

$$x = 1 \text{ și } x = 10.$$

● Să se calculeze limita șirului :

$$u_n = \ln \left(1 - \frac{1}{2^2} \right) + \ln \left(1 - \frac{1}{3^2} \right) + \dots + \ln \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2} \right) \text{ cînd } n \rightarrow \infty.$$

Soluție.

$$\begin{aligned} u_n &= \ln \left(1 - \frac{1}{2^2} \right) + \ln \left(1 - \frac{1}{3^2} \right) + \dots + \ln \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2} \right) = \\ &= \ln \left(1 - \frac{1}{2^2} \right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3^2} \right) \dots \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2} \right) = \\ &= \ln \left[\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 2} \cdot \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 3} \cdot \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 4} \dots \frac{(n-1)(n+1)}{n \cdot n} \cdot \frac{n \cdot (n+2)}{(n+1)(n+1)} \right]. \end{aligned}$$

$$\text{Rezultă : } u_n = \ln \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{n+2}{n+1} \right).$$

$$\text{Deci : } \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{n+2}{n+1} \right) = \ln \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{2(n+1)} = \ln \frac{1}{2}.$$

● Să se determine volumul corpului obținut prin rotirea graficului funcției $y = \sqrt{x \cdot f(x)}$ în jurul axei Ox în intervalul $0 \leq x \leq \pi$, unde $f(x)$ este soluția ecuației diferențiale $f'' + f = 0$, care verifică condițiile $f(0) = 0, f''(0) = 1$.

Soluție.

$f'' + f = 0$ ne conduce la $f(x) = a \cos x + b \sin x$, cu a și b constante reale. Deci $f(x) = \sin x$ (ținînd cont de condițiile date).

$$\text{Volumul } V = \pi \int_0^{\pi} x f(x) dx$$

$$V = \pi \int_0^{\pi} x \sin x dx = \pi (\sin x - x \cos x) \Big|_0^{\pi} = \pi^2.$$

● Se consideră polinoamele :

$$P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c,$$

$$Q(y) = y^3 + (b+c)y^2 + (c+a)y + a+b.$$

a) Să se determine a, b, c , reale, astfel încît să existe relațiile : $y_1 = x_1 + 1$; $y_2 = x_2 + 1$; $y_3 = x_3 + 1$, unde x_1, x_2, x_3 sînt rădăcinile ecuației $P(x) = 0$, iar y_1, y_2, y_3 , sînt rădăcinile ecuației $Q(y) = 0$.

b) Pentru $b = c = 1$, să se determine a și să se rezolve ecuația $P(x) = 0$, știind că admite o rădăcină dublă.

Soluție.

a) Ținînd cont de relațiile Viète și de relațiile date :

$$y_1 + y_2 + y_3 = x_1 + x_2 + x_3 + 3 \Rightarrow a - b - c = 3 \quad (1)$$

$$y_1y_2 + y_1y_3 + y_2y_3 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 + 2(x_1 + x_2 + x_3) + 3 \Rightarrow \\ \Rightarrow 3a - b + c = 3. \quad (2)$$

$$y_1y_2y_3 = x_1x_2x_3 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 + x_1 + x_2 + x_3 + 1 \Rightarrow \\ \Rightarrow c - 2b = 1. \quad (3)$$

Rezolvînd sistemul format din relațiile (1), (2), (3), obținem :

$$a = \frac{7}{3}; \quad b = \frac{5}{3}; \quad c = \frac{7}{3}.$$

b) Pentru $b = c = 1$ avem : $P(x) = x^3 + ax^2 - x - 1$. Ținînd cont de relațiile lui Viète și de faptul că $x_1 = x_2$, se obține ecuația :

$$x_1^3 + x_1 + 2 = 0, \text{ cu rădăcinile : } x_1' = -1 \text{ și } x_1'', x_1''' = \frac{1 \pm i\sqrt{7}}{2}.$$

Singura rădăcină dublă este $x_1 = -1$. Se obține $a = 1$, iar soluția ecuației este $x_1 = x_2 = -1$ și $x_3 = 1$.

● Se consideră funcția : $f(x) = \frac{x+2}{(x+1)^2}$.

a) Să se reprezinte grafic funcția $y = f(x)$.

b) Să se calculeze aria limitată de graficul funcției :

$$y = f(x) \text{ și } x = 0, x = 1, 0 < x < 1.$$

Soluție.

a) Domeniul de definiție al funcției f este $R - \{-1\}$. Intersecția cu axa Ox : $A(-2, 0)$. Intersecția cu axa Oy : $B(0, 2)$. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0 \Rightarrow y = 0$ asimptotă orizontală;

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \nearrow -1} \frac{x+2}{(x+1)^2} = +\infty \\ \lim_{x \searrow -1} \frac{x+2}{(x+1)^2} = +\infty \end{array} \right\} \Rightarrow x = -1, \text{ asimptotă verticală.}$$

$$f'(x) = \frac{-x^2 - 4x - 3}{(x+1)^4}, \text{ cu rădăcinile } x_1 = -3, x_2 = -1.$$

$$f''(x) = \frac{2(x^2 + 5x + 4)}{(x+1)^5}, \text{ cu rădăcinile } x_1 = -4, x_2 = -1.$$

x	$-\infty$	-4	-3	-2	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$-$	$-$
$f(x)$	$0 \searrow$	$-\frac{2}{9} \searrow$	$-\frac{1}{4} \nearrow$	$0 \nearrow$	$+\infty$	$+\infty \searrow$	$2 \searrow 0$
$f''(x)$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$

Graficul (fig. 26.21.):

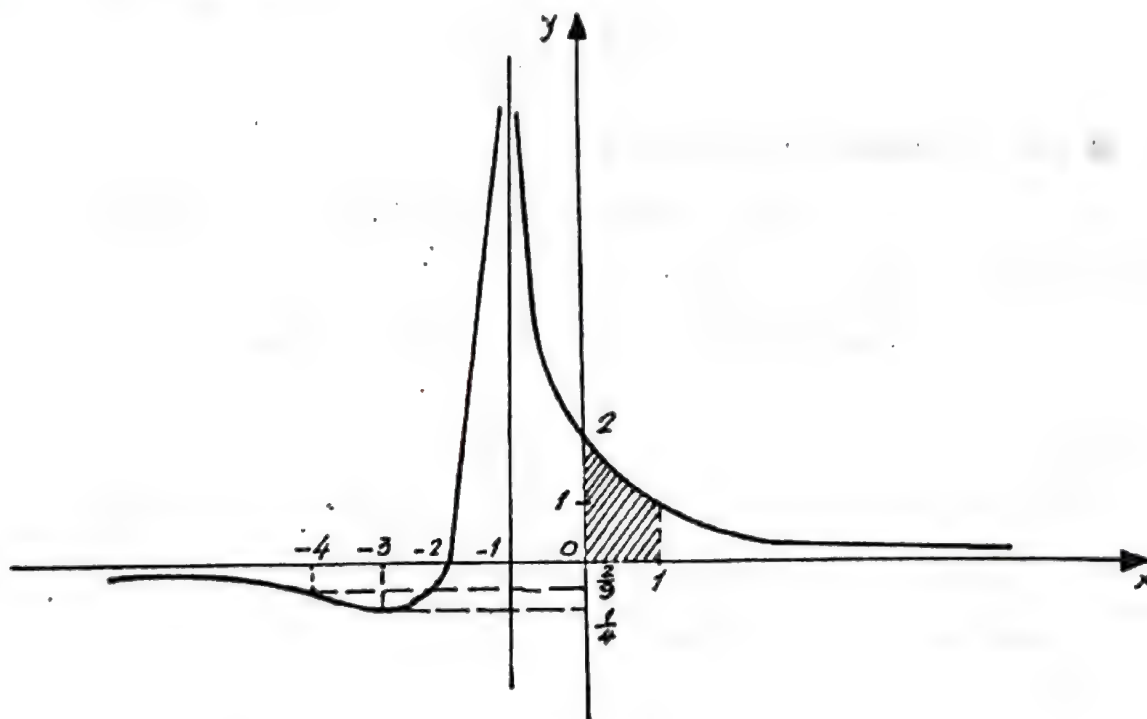


Fig. 26.21.

$$b) S = \int_0^1 \frac{x+2}{(x+1)^2} dx = \frac{1}{2} \ln(x+1)^2 \Big|_0^1 - \frac{1}{x+1} \Big|_0^1 =$$

$$= \frac{1}{2} \ln 4 - \frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2} \ln 2^2 + \frac{1}{2} = \ln 2 + \frac{1}{2}.$$

● Se dă ecuația $x^2 - 2(m+1)x + 5m - 1 = 0$ cu rădăcinile x_1, x_2 .

a) Să se determine intervalul căruia îi aparține m , astfel încît :

$$\frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1 x_2} \leq 2.$$

b) Să se calculeze limita : $\lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{5}{2} \cdot \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} \right)^m$

Soluție :

a) $m \in \left(-\infty, \frac{1}{5} \right) \cup [1, 2]$

b) $\lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{5}{2} \cdot \frac{2(m+1)}{5m-1} \right)^m = \lim_{m \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{6}{5m-1} \right)^{\frac{5m-1}{6}} \right]^{\frac{6m}{5m-1}} =$

$$= e^{\frac{6}{5}} = e^{\frac{5}{5}} = e.$$

● Să se verifice identitatea :

$$\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x = -2 \operatorname{ctg} 2x,$$

și apoi să se rezolve ecuația :

$$\operatorname{tg} x + 2 \operatorname{tg} 2x + 4 \operatorname{tg} 4x - \operatorname{ctg} x = 0$$

Soluție.

$$\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x = -2 \operatorname{ctg} 2x \Leftrightarrow \frac{\sin x}{\cos x} - \frac{\cos x}{\sin x} = -2 \frac{\cos 2x}{\sin 2x}$$

unde : $\frac{-\cos^2 x}{\sin x \cos x} = \frac{-\cos^2 x}{\sin x \cos x}$

Avem :

$$\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x + 2 \operatorname{tg} 2x + 4 \operatorname{tg} 4x = 0$$

Aplicînd identitatea de sus obținem :

$$-2 \operatorname{ctg} 2x + 2 \operatorname{tg} 2x + 4 \operatorname{tg} 4x = 0$$

$$2(\operatorname{tg} 2x - \operatorname{ctg} 2x) + 4 \operatorname{tg} 4x = 0$$

Repetînd procedeul se ajunge la $\operatorname{ctg} 8x = 0$, cu soluția :

$$x = k \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{16} \cdot k \in \mathbb{Z}.$$

26.2. ADMITERE FACULTĂȚI (EXERCII NEREZOLVATE)



1. Să se determine m , n și p știind că polinomul

$$P(x) = x^3 + nx + p,$$

se divide cu $x + 1$ și că dă același rest cînd este împărțit cu $x - 1$, $x - 2$ și $x - 3$.

2. Știind că a este o constantă reală, să se rezolve sistemul :

$$x + y + \sqrt{xy} = 6a; \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{a}$$

3. Știind că m este un parametru real, să se arate că ecuația $2x^4 + mx^2 - mx - 2 = 0$, admite o rădăcină independentă de m

Să se rezolve apoi ecuația dată pentru $m = -15$.

4. Să se rezolve ecuația :

$$2^{3x-1} - 2^{2x} = 2^{x-1} - 1.$$

5. Să se rezolve inegalitatea :

$$\log_4(x^2 - 5x + 4) > 1.$$

6. Se dă ecuația $x^3 + px + q = 0$ și fie x_1 , x_2 și x_3 rădăcinile ei. Să se formeze ecuația ale cărei rădăcini sînt

$$y_1 = x_2 + x_3, y_2 = x_3 + x_1 \text{ și } y_3 = x_1 + x_2.$$



1. Să se studieze natura și semnele rădăcinilor ecuației

$$x^3 - 3x - \frac{2m}{m^2 + 1} = 0$$
, după valorile reale ale parametrului m .

Există valori $m \in \mathbb{R}$ astfel încât produsul a două rădăcini să fie egal cu unitatea?

2. Să se rezolve ecuația $\log_x 2x + \log_{2x} 4x = \frac{7}{2}$.

3. Să se determine parametrii reali m și n astfel încât polinomul :

$$P(x) = x^3 - 3mx + n$$

să aibă o rădăcină dublă, iar $\int_0^2 P(x) dx = 2$.

4. Fie $P(x)$ un polinom de gradul al patrulea cu coeficienți reali avînd toate rădăcinile distincte și situate în planul complex pe o paralelă la axa imaginară. Să se arate că rădăcinile derivatei $P'(x)$ se găsesc pe aceeași paralelă la axa imaginară.

5. Dacă :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{ax + b} & \text{pentru } x < 0 \\ \frac{1}{x^2 - 9x + 21} & \text{pentru } x \geq 0 \end{cases}$$

să se determine numerele reale a și b astfel încît funcția $f(x)$ să fie continuă și derivabilă pentru $x = 0$. Funcția $f(x)$ astfel determinată este derivabilă pentru orice $x \in \mathbb{R}$?

6. Să se arate că $\ln x \leq \frac{x}{e}$, oricare ar fi x strict pozitiv.



1. Să se determine parametrul real a și să se rezolve ecuația :
 $x^3 - 21x^2 + ax - 216 = 0$, știind că între rădăcinile x_1 , x_2 și x_3 ale sale există relația :

$$x_3 = \sqrt{x_1 x_2}.$$

2. Să se rezolve inecuația $\log_{\frac{1}{8}} (2x^3 - 2x^2 - x + 1) < 0$.

3. Să se determine n astfel încît $C_n^2 + C_n^3 = 2(C_n^1 + C_n^4)$, unde C_n^p este numărul combinărilor de n obiecte luate cîte p .

4. Să se studieze continuitatea și derivabilitatea funcției $f: R \rightarrow R$ care are valorile $f(x) = \sin x + |\sin x|$.

5. Să se reprezinte grafic funcția definită prin

$$f(x) = \frac{x^3}{(x+1)^2}$$

determinîndu-se în prealabil domeniul ei de definiție.

6. Se consideră funcția $f: R \rightarrow R$ definită prin :

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{pentru } x \in [0, 1] \\ x^2 & \text{pentru } x \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty). \end{cases}$$

Să se calculeze $I = \int_0^2 e^x f(x) dx$.



1. Să se rezolve ecuația :

$$x^4 + x^3 + mx^2 + nx + 1 = 0,$$

știind că admite rădăcina $x_1 = -2 - \sqrt{3}$ și că m și n sînt numere raționale.

2. Să se determine valorile lui m pentru care ecuația : $(2m-1)x^2 - 2(m+1)x + m+1 = 0$ are rădăcinile reale și pozitive.

3. Să se rezolve ecuația :

$$x^2 + \frac{x^2 + 2}{x^2} = 4.$$

4. Fie $ABCD$ un patrulater înscris într-un cerc de rază R . Știind că AB este latura triunghiului echilateral, BC este latura hexagonului regulat și CD latura pătratului, înscrise în acest cerc, se cere să se determine lungimea laturii DA și lungimile diagonalelor AC și BD ale patrulaterului.

5. Două cercuri avînd centrele O_1 și O_2 și razele R_1 și R_2 sînt tangente exterior. Știind că cele trei tangente comune formează un triunghi echilateral, se cere să se calculeze raportul celor două raze.

6. Să se rezolve ecuația :

$$\sin^2 2x + 4 \sin^2 x = 3.$$



1. Pe un cerc de rază R se consideră punctele A, B, C și D în această ordine, cu următoarele precizări : coarda AB este latura triunghiului echilateral înscris în cerc ; coarda CD este latura hexagonului regulat înscris în cerc ; punctele B și C sînt de o parte și de alta a diametrului care trece prin A . Să se arate că $AC \perp BD$, apoi să se calculeze în funcție de R suma $AD^2 + BC^2$.

2. Să se calculeze catetele unui triunghi dreptunghic știind că ipotenuza sa este de 15 cm, iar raza cercului înscris $r = 3$ cm.

3. Să se calculeze volumul unui paralelipiped drept cu baza un romb cu latura $a\sqrt{3}$, avînd un unghi ascuțit de 60° , știind că lungimea diagonalei mari a paralelipipedului este $d = 5a$.

4. Se consideră, în spațiu, trei semidrepte Ox, Oy și Oz formînd, două cîte două, unghiuri de 60° . Pe semidreapta Ox se ia un punct A astfel încît $OA = 2a$. Să se determine distanțele de la punctul A la semidreptele Oy și Oz și la planul yOz .

5. Cunoscînd $\cos 2\alpha = \frac{2m}{1+m^2}$ și $\cos 2\beta = \frac{1-m^2}{1+m^2}$, unde m

este un parametru real, să se calculeze $\sin(\alpha + \beta)$ și $\cos(\alpha - \beta)$ știind că $\alpha, \beta \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$.

6. Se dau numerele complexe :

$$z_1 = \sin\alpha - \cos\alpha + i(\sin\alpha + \cos\alpha)$$

$$z_2 = \sin\alpha + \cos\alpha + i(\sin\alpha - \cos\alpha),$$

unde α este parametru real dat. Să se găsească numerele naturale n pentru care $[z_1 \cdot z_2]^n$ este un număr real pozitiv.



1. Se dă un exagon regulat $ABCDEF$ de latură a . Se notează cu M, N și P mijloacele laturilor AB, CD și EF . Să se calculeze aria triunghiului MNP .

2. Se consideră un trapez isoscel, înscris într-un cerc de rază R . Știind că centrul cercului este în interiorul trapezului, iar baza mare și baza mică sînt egale respectiv cu latura triunghiului echilateral și latura exagonului regulat înscrise în cerc, să se calculeze aria trapezului.

3. Un dreptunghi $ABCD$, cu laturile $AB = CD = a$ și $BC = AD = 2a$, se proiectează pe un plan, care conține latura AB , în pătratul $ABC'D'$. Să se calculeze volumul prisme $ADD'BCC'$.

4. Se consideră o piramidă $SABCD$ cu baza un dreptunghi $ABCD$ cu laturile $6a$ și $8a$. Știind că proiecția vârfului S al piramidei pe planul bazei este centrul O al dreptunghiului și că volumul piramidei este $48a^3$, se cere să se determine distanțele de la O la fețele laterale ale piramidei.

5. Se dă $\sin A + \cos A = \frac{1}{2}$. Să se calculeze $\sin^3 A + \cos^3 A$.

6. Să se rezolve ecuația :

$$\cos^2\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + \cos^2\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \sin^2\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + \sin^2\left(x - \frac{\pi}{6}\right).$$

★

1. Să se rezolve ecuația

$$x^4 + x^3 + mx^2 + nx + 1 = 0$$

știind că admite rădăcina $x_1 = -2 - \sqrt{3}$ și că m și n sînt numere raționale.

2. Să se determine valorile lui m pentru care ecuația :

$$(2m - 1)x^2 - 2(m + 1)x + m + 1 = 0$$

are rădăcinile reale și pozitive.

3. Să se determine termenul care nu depinde de x în dezvoltarea binomului :

$$\left(x^2 - \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^7.$$

4. Să se rezolve ecuația :

$$\frac{x^2}{x+2} + \frac{x+2}{x^2} = 2$$

5. Să se studieze variația funcției $f: R \rightarrow R$ ale cărei valori sînt date de :

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$$

și apoi să se reprezinte grafic această variație.

6. Să se determine parametrul real m astfel

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + m - \sqrt{x^2 + x + m}) = 1$$

★

1. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin

$$f(x) = |x - 1| |x - 2| \dots |x - n|, \quad (n \geq 1).$$

a) Să se studieze continuitatea lui $f(x)$.

b) Să se studieze derivabilitatea lui $f(x)$.

2. Se consideră funcția :

$$f: (-2\pi, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}$$

definită prin :

$$f(x) = |x| - |\sin x|.$$

a) Să se determine punctele unde $f(x)$ nu este derivabilă.

b) Să se reprezinte grafic funcția.

c) Să se calculeze aria figurii delimitate de graficul funcției $f(x)$ axa Ox și dreptele paralele la axa Oy care taie axa Ox în punctele $-\frac{\pi}{2}$ și respectiv $\frac{\pi}{2}$.

3. Fie $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă și fie

$$a_n = \int_0^n \sqrt{x^2 + (f(x))^2} dx \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Să se arate că

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{n} = +\infty.$$

4. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție având proprietatea $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|^2$ oricare ar fi numerele reale x, y . Să se arate că funcția f este constantă.

★

1. Triunghiul ascuțitunghic ABC are unghiul C de 30° . Notînd cu M punctul de intersecție a înălțimilor să se calculeze aria triunghiului AMB , știind că distanțele centrului cercului circum-

scris triunghiului ABC la laturile BC și AC sînt egale respectiv cu $\sqrt{2}$ și $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

2. O piramidă triunghiulară are două fețe triunghiuri dreptunghice isoscele, iar celelalte două fețe triunghiuri echilaterale de latură a .

a) Să se calculeze aria totală a piramidei.

b) Să se calculeze volumul piramidei.

★

1. Fie funcția $f(x) = 3x^2 - 2(m+1)x + m$ definită pe $(-\infty, \infty)$ și depinzînd de parametrul m .

a) Să se arate că oricare ar fi valoarea parametrului m , funcția f se anulează exact în două puncte.

b) Să se stabilească dacă există (și, în cazul afirmativ, să se indice care anume) valori ale lui m pentru care funcția f e crescătoare pe $(-\infty, \infty)$.

c) Să se stabilească dacă există (și, în cazul afirmativ, să se indice care anume) valori ale lui m pentru care funcția f e convexă pe $(-\infty, \infty)$.

d) Să se stabilească pentru care valori ale lui m funcția f admite un minim în punctul $x = 1$.

2. Fie funcția $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, unde

$$f(x) = -x \ln x$$

a) Să se studieze continuitatea, derivabilitatea, convexitatea și eventualele extreme ale funcției f . Să se traseze graficul funcției f .

b) Să se determine mulțimea M a valorilor lui f precum și mulțimea $M \cap [0, \infty)$.

3. Fie a_0 și A două numere reale și pozitive și fie

$$a_1 = \frac{1}{2} \left(a_0 + \frac{A}{a_0} \right), \quad a_2 = \frac{1}{2} \left(a_1 + \frac{A}{a_1} \right), \quad \dots$$

$$a_n = \frac{1}{2} \left(a_{n-1} + \frac{A}{a_{n-1}} \right).$$

Să se stabilească direct egalitatea:

$$\frac{a_{n+1} - \sqrt{A}}{a_{n+1} + \sqrt{A}} = \left(\frac{a_n - \sqrt{A}}{a_n + \sqrt{A}} \right)^2.$$

și prin inducție egalitatea:

$$\frac{a_n - \sqrt{A}}{a_n + \sqrt{A}} = \left(\frac{a_1 - \sqrt{A}}{a_1 + \sqrt{A}} \right)^{2^{n-1}}$$

4. Fie șirul

$$x_n = \frac{1}{2} \left(x_{n-1} + \frac{A}{x_{n-1}} \right), \quad n = 1, 2, \dots$$

x_0 fiind un număr real și pozitiv. Folosind rezultatul de la punctul a) să se arate că:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sqrt{A}$$

★

1. Se consideră sistemul:

$$mx + y + z = 3$$

$$x + my + z = 3$$

$$x + 2my + z = 4$$

a) Cum trebuie să fie m pentru ca sistemul să aibă o soluție unică?

b) În cazul când are soluție unică, să se rezolve sistemul.

c) Să se studieze sistemul pentru fiecare valoare a lui m pentru care el nu are soluție unică.

2. 1) Să se afle valoarea maximă și valoarea minimă a ordonatelor punctelor (x, y) ce verifică inegalitățile $y \leq 3x + 18$, $y \geq x^2 + 4x$. Aceeași problemă pentru abscise.

2) Să se afle mulțimea tuturor numerelor reale x care verifică inecuațiile

$$\sqrt{2x+1} < \frac{2(x+1)}{2-x}, \quad \frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}} \geq 2.$$

3. Să se rezolve ecuația

$$(|\sin x| - \sin x - 2)(\sin 11\pi x \sin 4\pi x + \sin 5\pi x \sin 2\pi x) = 0$$

★

1. Se consideră polinomul

$$P(x) = x^3 - 3p^2x + p$$

unde p este un parametru real. Să se determine valorile lui p pentru care ecuația

$$P(x) = 0$$

are o rădăcină dublă și în aceste cazuri să se rezolve ecuația.

2. Fie funcția : $R - \{1\} \rightarrow R$ de forma :

$$f(x) = \frac{\alpha x^2 - 3x + \beta}{1 - x}.$$

a) Să se determine α și β astfel încât $f(x)$ să aibă un extrem în punctul de coordonate $(-1, 1)$.

b) Cu α și β determinați la punctul precedent, să se reprezinte grafic funcția $y = f'(x)$.

3. Se consideră funcția

$$f: (1, +\infty) \rightarrow R$$

definită prin

$$f(x) = \log \frac{x+1}{x-1}$$

și două puncte $a, b \in (1, +\infty)$. Să se determine c astfel ca

$$f(c) = f(a) + f(b).$$

★

1. Se consideră un triunghi ABC , dreptunghic în C și avind cateta CA de lungime 4.

Pe cateta CB se consideră punctul D , la distanța de 1 de C .

Știind că cercul care trece prin C și D are raza de lungime $\frac{\sqrt{5}}{2}$ și este tangent la cercul circumscris triunghiului ABC , să se găsească :

a) Aria triunghiului ABC .

b) Aria cuprinsă între cele două cercuri.

c) Să se verifice că unul din cele două cercuri trece prin centrul celuilalt.

2. Baza piramidei $OABCD$ este trapezul $ABCD$, cu baza mică $AB = 3$ cm și baza mare $CD = 5$ cm.

Știind că planele fețelor laterale OAD și OBC se taie după o perpendiculară pe bază, că aria feței laterale OAB este de 9 cm²

și că aria feței laterale OCD este de 20 cm^2 , să se găsească volumul piramidei.

3. a. Să se calculeze aria unui romb $ABCD$ în care se cunoaște: vârful $A(-1; 3)$, un punct $M(0; 2)$ situat pe una din laturile care pleacă din A și punctul $Q(2; 1)$ de intersecție a diagonalelor.

b. Să se calculeze aria cercului înscris în rombul $ABCD$.

c. Să se scrie ecuația elipsei circumscrise rombului $ABCD$, față de sistemul de coordonate format de diagonalele rombului, știind că aceste diagonale sînt axele elipsei.

★

1. Fie ecuația:

$$6x^4 + (3m - 23)x^3 + (28 - 4m)x^2 - (5m + 13)x + 2(m + 1) = 0,$$

unde m este un număr întreg.

a) Să se arate că ecuația are două rădăcini raționale independente de m .

b) Să se determine m astfel ca suma inverselor rădăcinilor ecuației date să fie egală cu 2.

2. Să se determine limita șirului $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dat de termenul general:

$$u_n = \sqrt{n} + \sqrt{n-1} - \sqrt{n} - \sqrt{n-2}, \quad (n \geq 2).$$

3. a) Să se calculeze determinantul:

$$D = \begin{vmatrix} e^{2x} & e^{-a} & e^{-x} \\ e^{-a} & e^{2x} & e^{-x} \\ e^{-x} & e^{-x} & e^{2a} \end{vmatrix}$$

b). Să se rezolve ecuația: $D = 0$.

4. a) Să se rezolve sistemul de ecuații:

$$\begin{cases} x + y + z = 1; \\ ax + by + cz = d; \\ a^2x + b^2y + c^2z = d^2. \end{cases}$$

unde:

$a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

b) Discuție.

5. Folosind șirul lui Rolle să se discute natura rădăcinilor ecuației $x^4 - 2x^3 + 6x^2 + m = 0$, după valorile parametrului m real

6. Să se rezolve sistemul

$$\begin{cases} (4^x)^{\frac{1}{y}} = 2^5 \cdot (8^y)^{\frac{1}{x}} \\ (3^x)^{\frac{1}{y}} = 3 \cdot (3^2(1-y))^{\frac{1}{x}} \end{cases}$$

7. Fie ecuația :

$$x^3 + px^2 + qx + p = 0$$

a) Să se determine p și q astfel încât această ecuație să admită rădăcinile $x_1 = 2 - \sqrt{3}$, $x_2 = 2 + \sqrt{3}$.

b) Să se găsească și a treia rădăcină.

8. Se consideră funcția f definită pe $(0, +\infty)$ prin egalitatea :

$$f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$$

a) Să se arate că funcția f este monoton descrescătoare.

b) Să se calculeze

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) \text{ și } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x).$$

9. Să se rezolve ecuația :

$$(4 + \sqrt{15})^x + (4 - \sqrt{15})^x = 62.$$

10. Să se rezolve ecuația :

$$6 \log_a a + 3 \log_{a^2} a + \frac{\log_{a^2} x}{\log_a x} = 0$$

unde $a \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$.

11. Să se rezolve, în mulțimea numerelor naturale, ecuația :

$$\sqrt[4]{x-3} - \sqrt[4]{5x+1} = -2.$$

12. Utilizând formula lui Lagrange pentru funcția $f(x) = \sin x$ să se arate că :

$$\frac{\sqrt{2}}{2} < \sin 50^\circ < \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\pi}{36}.$$

13. Să se determine punctele de extrem ale funcției $f: R \rightarrow R$ dată de legea:

$$f(x) = \frac{|x^2 - 2|}{x^2 + 2}.$$

14. Se consideră integrala:

$$I(a) = \int_0^1 \frac{dx}{x^2 + 2x \operatorname{tg} a + 1} \text{ unde } a \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right].$$

a) Să se arate, fără a efectua integrarea, că $I(a)$ este o funcție monoton descrescătoare de a .

b) Să se calculeze integrala pentru $a \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ și să se stabilească continuitatea lui $I(a)$ în punctul $a = \frac{\pi}{4}$ calculând $\lim_{a \rightarrow \frac{\pi}{4}} I(a)$.

15. Se consideră integralele:

$$I = \int_0^{x_0} \sqrt{a^2 - x^2} dx \text{ și } J = \int_0^{x_0} \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx$$

cu $x_0 \in (0, a)$.

a) Să se stabilească două relații distincte între I și J care să nu conțină altă integrală.

b) Să se calculeze I și J utilizând fie relațiile găsite, fie direct.

16. Se dă funcția $f: R \rightarrow R_+$, dată prin egalitatea:

$$f(x) = \sqrt{|x^2 - 5x + 4|}$$

a) Să se determine asimptotele oblice ale graficului acestei funcții.

b) Să se determine a, b, c astfel ca dreptele de ecuații $y = 1$, $x = 2$, $x = 3$ să fie asimptote la curba dată de:

$$g(x) = \frac{f^2(x)}{ax^2 + bx + c}.$$

17. Se consideră funcția $f(x) = \sqrt{x}$ pe intervalul $[100, 104]$. Aplicând formula creșterilor finite să se arate că:

$$\sqrt{104} - 10 < 0,2.$$

18. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dată prin egalitatea :

$$f(x) = \sqrt[m]{\alpha^2 x^m + x^2 + 1} + \sqrt[m]{(1 - \alpha) x^m - x - 7}$$

unde m este un număr impar mai mare ca 2.

Să se arate că nu există nici o valoare reală a lui α așa fel încît $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ să fie finită.

★

Se consideră funcția :

$$f(x) = \alpha x^2 + \beta - \ln(x + 1),$$

și se cere :

1. Care sînt condițiile pe care trebuie să le satisfacă parametrii α și β pentru ca aceasta să admită două extreme.

2. Luînd $\alpha = -1, \beta = 1$, să se studieze variația și să se reprezinte grafic această funcție.

★

1. Să se rezolve ecuația

$$\frac{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}} = 2.$$

2. Să se rezolve ecuația

$$\log_x^2 6 + \log_{\frac{1}{6}}^2 \frac{1}{x} + \log_{\frac{1}{\sqrt{x}}} \frac{1}{6} + \log_{\sqrt{6}} x + \frac{3}{4} = 0.$$

3. Să se rezolve sistemul de ecuații :

$$\begin{cases} 2x - y - 4z = 6 \\ 2x + my - 4z = 14 \\ nx - y + z = 2 \end{cases}$$

în ajutorul determinantilor.

4. Să se determine parametrul m și să se rezolve ecuația :

$$2x^3 + mx^2 + 4x + 4 = 0$$

știind că are o rădăcină dublă.

5. Se dă ecuația :

$$x^2 - 2(m + 1)x + 3m - 1 = 0.$$

Se cere să se calculeze :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{2} \cdot \frac{x_1 + x_2}{x_1 \cdot x_2} \right)^m, \text{ unde } x_1, x_2 \text{ sînt rădăcinile ecuației date.}$$

6. Să se arate că funcția :

$$y = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 - 1} - \frac{1}{2} \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}),$$

verifică relația : $(y'')^2 + y' \cdot y'' = 1$.



1. Unui cerc de rază a , i se circumscrie un trapez isoscel $ABCD$ ($BC \parallel AD$) avînd un unghi ascuțit α . Să se calculeze aria trapezului.

2. Se dă un triunghi dreptunghic ABC cu $\hat{A} = 90^\circ$, $AB = 12$ cm și $\overline{AC} = 5$ cm. Să se afle lungimile perpendicularelor duse din B și C pe mediana trasată din A pe ipotenuză.

3. Considerînd că pămîntul este o sferă de rază R , să se calculeze aria zonei cuprinse între paralela 30° și 60° .

4. Un trunchi de piramidă regulată cu bazele pătrate, de laturi a, b are înălțimea h . Se face o secțiune în acest poliedru printr-un plan paralel cu bazele, dus la distanță d de baza mare. Să se calculeze latura pătratului de secțiune.

5. Să se demonstreze identitatea :

$$\begin{aligned} & \sin a + \sin b + \sin c - \sin(a + b + c) + \\ & = 4 \sin \frac{a + b}{2} \sin \frac{b + c}{2} \sin \frac{c + a}{2}. \end{aligned}$$

6. Să se rezolve ecuația :

$$\sin^2 a + \sin^2(a + x) + \sin^2(a + 2x) + \sin^2(a + 3x) = 2.$$



1. Fie a, b, c , trei semidrepte în același plan, cu originea comună punctul O (b interioară $\neq AOC$) și k un număr real diferit de 0.

Pe semidreptele a, b, c , se iau respectiv perechile de puncte $(A, A'), (B, B')$ și (C, C') astfel încît să avem :

$$OA \cdot OA' = OB \cdot OB' = OC \cdot OC' = k^2.$$

Să se arate că :

$$\begin{aligned} a) \quad A'B' &= \frac{k^2}{OA \cdot OB} \cdot AB; \quad B'C' = \frac{k^2}{OB \cdot OC} \cdot BC; \quad C'A' = \\ &= \frac{k^2}{OC \cdot OA} \cdot CA. \end{aligned}$$

$$b) \quad \angle A'B'C' = \angle OAB + \angle OCB \text{ sau cu } 360^\circ - (\angle OAB + \angle OCB).$$

Ținînd seama de 1) și 2) să se arate că :

$$c) \quad \text{Dacă } \angle OAB + \angle OCB = 180^\circ, \text{ atunci :}$$

$$OA \cdot BC + OC \cdot AB = OB \cdot AC \text{ și reciproc.}$$

$$d) \quad \text{Dacă } \angle OAB + \angle OCB = 90^\circ \text{ sau cu } 270^\circ, \text{ atunci}$$

$$OA^2 \cdot BC^2 + OC^2 \cdot AB^2 = OB^2 \cdot AC^2 \text{ și reciproc.}$$

2. Două cercuri variabile au dreapta centrelor fixă și sînt tangente exterior într-un punct fix T pe această dreaptă. Să se găsească locurile geometrice ale punctelor de contact ale cercurilor cu tangentele lor comune cînd raportul razelor e constant.

3. Să se găsească locul geometric al punctelor din spațiu egal depărtate de două drepte secante d_1 și d_2 .

★

1. Fie polinomul

$$P(x) = \begin{vmatrix} 2x & -2x & 1 \\ 1 - x^2 & x^2 & -1 \\ -2x - \lambda & x + \lambda & x - 2 \end{vmatrix}$$

a) Să se afle λ astfel încît polinomul $P(x)$ să admită o rădăcină dublă întreagă.

b) Dacă $Q(x) = P(x) + 2x^2$ și x_1, x_2, x_3 , sînt rădăcinile ecuației $Q(x) = 0$, să se calculeze :

$$E(\lambda) = \frac{Q(x_2 + x_3)}{x_1} + \frac{Q(x_3 + x_1)}{x_2} + \frac{Q(x_1 + x_2)}{x_3}.$$

2. Se consideră polinomul :

$$P(x) = x^4 + mx^3 + m\sqrt{2x^2} + nx + 1, \text{ unde } m, n \in \mathbb{R}.$$

a) Să se determine m și n astfel ca $P(x)$ să fie divizibil prin $x^2 - x + 1$.

b) În condițiile de la punctul a) să se rezolve ecuația $P(x) = 0$ și să se arate că patrulaterul ale cărui vîrfuri sînt afixele rădăcinilor, este un trapez isoscel.

3. Se dă ecuația :

$$\sqrt{1 + \cos x} = m \sin x, m \in \mathbb{R} \text{ și se cere :}$$

a) Să se rezolve ecuația în cazul $m = 1$;

b) Să se discute soluțiile ecuației în funcție de m .

★

1. Se consideră șirul :

$$S_n(x) = \frac{x}{1-x} - \frac{x^{2^n}}{1-x^{2^n}}, x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}.$$

și fie $f(x)$ limita șirului $S_n(x)$.

a) Să se arate că :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1-x}, & \text{pentru } |x| < 1 \\ \frac{1}{1-x}, & \text{pentru } |x| > 1. \end{cases}$$

b) Să se studieze continuitatea și derivabilitatea funcțiilor f și g și să se traseze graficele lor.

2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin :

$$f(x) = e^x - ax - 1, \text{ unde } a \text{ este un parametru real.}$$

a) Să se determine condiția pentru a astfel ca $f(x)$ să fie strict monotonă pe \mathbb{R} .

b) Să se determine asimptotele graficului funcției $f(x)$.

c) Pentru $a = 1$ să se determine volumul corpului obținut prin rotirea în jurul axei Ox a arcului de grafic cuprins între dreptele $x = 0$ și $x = 1$.



1) Să se simplifice fracția :

$$\frac{C_n^k - C_{n-2}^{k-1} - C_{n-2}^{k-2}}{C_{n-2}^{k-1}},$$

unde $n \geq 3$ și $k \geq 2$ sînt numere naturale, iar C_m^n este numărul combinărilor de m obiecte luate cîte n , $m \geq n$.

2) Să se găsească toate matricile :

$$X = \begin{bmatrix} x & y \\ -y & x \end{bmatrix},$$

cu $x, y \in \mathbb{R}$ care verifică egalitatea $X^2 + X = \frac{1}{4} \cdot I$, unde I este matricea unitate de ordinul al doilea.

3) Se consideră funcția $f: E \rightarrow \mathbb{R}$, definită de :

$$f(x) = \frac{2x - m}{2x^2 + 2x - (1 + m^2)}$$

unde E este domeniul maxim de definiție, iar m este un parametru real. Să se arate că oricare ar fi m , funcția f nu admite puncte de extrem.

4) Se dă :

$$f_n(x) = \frac{1 + x + x^2 + \dots + x^n}{1 + x^n}$$

unde $x \in (0, +\infty)$, $n \in \mathbb{N}$. Să se traseze graficul funcției $f: (0, +\infty) \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$, definită prin $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ și să se calculeze

integrala :

$$\int_0^1 [f_2(x) - f_1(x)] dx$$



1) Fie ecuația :

$$x^3 + (2m - 5)x^2 + (9 - 5m)x + 2(m - 3) = 0, m \text{ fiind un}$$

parametrul real.

Să se arate că ecuația admite o rădăcină x_1 independentă de m și apoi să se determine m astfel încât să avem :

$$\log_{10} |x_2 - x_3| = \frac{1}{2} \log_{10} (6m + 5)$$

x_2 și x_3 fiind celelalte rădăcini ale aceleiași ecuații.

2) Să se determine numerele reale x care verifică inegalitatea :

$$\log_{\frac{1}{5}} \left(\log_7 \frac{x^2 - 5x}{x + 4} \right) < 0$$

3) Să se găsească punctele de minime și maxim ale funcției :

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1 + 10x - 4x^2}{2(1 + x^2)} + 4 \ln \sqrt{1 + x^2} - 3 \operatorname{arctg} x.$$

4) Fie $f: \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x + 4(1 + x)^{-2}$

a) Să se reprezinte graficul funcției f .

b) Să se afle aria $S(a)$ a domeniului plan delimitat de graficul lui f și dreptele $y = x, x = 1, x = a, a > 1$ și să se calculeze apoi $\lim_{a \rightarrow \infty} S(a)$.

★

1. Într-un ΔABC cu $\hat{B} < 90^\circ, \hat{C} < 90^\circ$ se cunosc laturile a, b, c . Pe paralela dusă prin A la BC se consideră punctele D și E astfel încât B și D să fie de aceeași parte față de dreapta AC și $\widehat{ABD} = \widehat{ACB}$, iar C și E să fie de aceeași parte față de dreapta AB și $\widehat{DCE} = \widehat{ABC}$.

a) Să se calculeze lungimile segmentelor BD și CE în funcție de a, b , și c .

b) Să se afle raportul dintre aria trapezului $BCED$ și aria triunghiului ABC în funcție de a, b și c .

2. Să se calculeze aria laterală și volumul unui trunchi de conștiind că raza bazei mari a trunchiului este $R\sqrt{3}$ și că în trunchiul respectiv se poate înscrie o sferă de rază R .

3. Să se rezolve ecuația :

$$\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} 2x - \operatorname{tg} 3x + \operatorname{tg} 4x = 0$$

4. În triunghiul dreptunghic ABC cu $\hat{A} = 90^\circ$ piciorul D al înălțimii din A se proiectează în punctul M pe latura AB și în punctul N pe latura AC . Să se arate că dreapta MN este tangentă la cercurile de diametru BD și DC și că dacă E, F, G sînt respectiv mijloacele segmentelor BD, DC, BC atunci are loc relația :

$$8(ME^2 + NF^2) = BC^2 + 4 DG^2$$

★

1. Latura CD a patratului $ABCD$ se împarte în trei părți egale : $DE = EF = FC$. Dreapta AE taie dreapta BC în G . Se notează cu H mijlocul segmentului AG . Să se calculeze lungimile segmentelor CG, AE și DH în funcție de $a = CD$.

2. Un con circular drept care are raza bazei R și înălțimea $h = 2R$ se taie cu un plan paralel cu planul bazei determinînd un trunchi de con de înălțime d .

a) Să se calculeze volumul acestui trunchi de con în funcție de R și d .

b) Să se determine d în funcție de R astfel ca în acest trunchi de con să se poată înscrie o sferă.

3. Să se determine valorile lui x pentru care expresia :

$$E(x) = \frac{\cos 2x}{\sin 2x - \sqrt{2} \cos x}$$

nu are sens (nu este definită). Să se scrie $E(x)$ ca un raport de forma

$$\frac{a \sin x + b}{\cos x} \text{ pentru valorile lui } x \text{ în care } E(x) \text{ are sens, } a \text{ și } b$$

fiind constante reale.

4. Fie S_1, S_2, S_3 trei sfere cu același centru O și razele respectiv de r_1, r_2, r_3 date astfel încît $r_1^2 + r_2^2 = r_3^2$. Fie P un punct pe sfera S_3 .

a) Să se calculeze, în funcție de r_1 și r_2 ariile laterale A_1 și A_2 ale conurilor cu vîrfurile în P înscrise în sfera S_3 și tangente la sferele S_1 , respectiv S_2 .

b) În cazul cînd $A_1 = A_2 \sqrt{3}$ să se calculeze unghiurile pe care le fac generatoarele celor două conuri cu dreapta PO .

26.3. OLIMPIADE INTERNAȚIONALE

1. Să se arate că fracția $\frac{21n + 4}{14n + 3}$ este ireductibilă oricare ar fi numărul natural n .

București, 1959 (Polonia)

2. Se dau numerele reale a, b, c și unghiul x astfel încît:

$$a \cos^2 x + b \cos x + c = 0$$

Să se stabilească ce relație de gradul al doilea este satisfăcută de a, b, c și $\cos 2x$. Să se compare relația cu cea dată pentru cazul: $a = 4, b = 2, c = -1$.

București, 1959 (Ungaria)

3. Să se construiască un triunghi dreptunghic dacă se cunoaște ipotenuza sa c și dacă mediana corespunzătoare ipotenuzei este media geometrică a catetelor.

București, 1959 (Ungaria)

4. Să se determine valorile reale ale variabilei x care verifică inecuația:

$$\frac{4x^2}{(1 - \sqrt{1 + 2x})^2} < 2x + 9$$

Sinaia, 1960 (Ungaria)

5. În triunghiul dreptunghic ABC ipotenuza este împărțită în n segmente egale (n este un număr impar). Să notăm cu α unghiul sub care se vede din vârful A unul din cele n segmente egale care conține mijlocul ipotenuzei.

Să se demonstreze că:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{4n h}{(n^2 - 1)a} \text{ unde } h \text{ este înălțimea triunghiului.}$$

Sinaia, 1960 (România)

6. Să se construiască triunghiul ABC dacă se cunosc h_a, h_b și m_a (h_a este înălțimea dusă din A pe latura a , h_b , înălțimea dusă din B pe latura b , și m_a este mediana laturii a).

Sinaia, 1960 (Ungaria)

7. Se consideră trapezul isoscel avînd bazele a și b și înălțimea h .

a) Pe axa de simetrie a trapezului să se construiască un punct P din care laturile neparalele ale trapezului se văd sub unghiuri drepte.

b) Să se determine distanțele de la acest punct la cele două baze ale trapezului.

c) În ce condiții este posibilă construcția punctului P.

Sinai, 1960 (Bulgaria)

8. Să se rezolve sistemul de ecuații :

$$\begin{cases} x + y + z = a \\ x^2 + y^2 + z^2 = b^2 \\ xy = z^2. \end{cases}$$

unde a și b sînt două numere reale date. Ce condiții trebuie să verifice a și b astfel încît soluțiile sistemului să fie pozitive și diferite.

Budapesta, 1961 (Ungaria)

9. Se dau lungimile a, b și c ale laturilor unui triunghi oarecare care are aria S .

Să se demonstreze relația :

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 4S \sqrt{3}.$$

În ce caz are loc egalitatea?

Budapesta, 1961 (Polonia)

10. Să se rezolve ecuația :

$$\cos^n x - \sin^n x = 1$$

unde n este un număr natural.

Budapesta, 1961 (Bulgaria)

11. Să se rezolve ecuația :

$$\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x = 1.$$

Praga, 1962 (România)

12. Pe circumferința cercului de centru O sînt date trei puncte A, B și C . Să se determine pe circumferință un al patrulea punct D , astfel încît patrulaterul $ABCD$ să poată fi circumscris unui cerc.

Praga, 1962 (Bulgaria)

13. Se dă triunghiul ABC , r = raza cercului circumscris triunghiului, ρ = raza cercului înscris triunghiului. Să se demonstreze că distanța dintre cele două centre ale cercurilor înscris și circumscris triunghiului ABC este :

$$d = \sqrt{r(r - 2\rho)}$$

Praga, 1962 (R.D.G.)

14. Să se găsească rădăcinile reale ale ecuației :

$$\sqrt{x^2 - p} + 2\sqrt{x^2 - 1} = x$$

unde p este un parametru real.

Varșovia, 1963 (Cehoslovacia).

15. Să se afle toate soluțiile sistemului de ecuații :

$$x_5 + x_2 = yx_1$$

$$x_1 + x_3 = yx_2$$

$$x_2 + x_4 = yx_3$$

$$x_3 + x_5 = yx_4$$

$$x_4 + x_1 = yx_5,$$

unde y este un parametru.

Varșovia, 1963 (U.R.S.S.)

16. Să se demonstreze că :

$$\cos \frac{\pi}{7} - \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7} = \frac{1}{2}.$$

Varșovia, 1963 (R.D.G.)

17. a) Să se afle toate numerele n întregi și pozitive pentru care numărul $2^n - 1$ se divide la 7.

b) Să se demonstreze că pentru nici un număr natural n $2^n + 1$ nu se divide cu 7.

Moscova, 1964 (Cehoslovacia),

18. Să notăm cu a, b, c lungimile laturilor unui triunghi oarecare. Să se demonstreze că :

$$a^2(b + c - a) + b^2(c + a - b) + c^2(a + b - c) \leq 3abc$$

Moscova, 1964 (Ungaria),

19. În triunghiul ABC avînd laturile a, b, c se înscrie un cerc. Se construiesc trei tangente la acest cerc paralele cu laturile a, b, c ale triunghiului ABC și care intersectează două câte două laturile triunghiului, în câte două puncte $A_1, A_2; B_1, B_2; C_1, C_2$. Se formează trei mari triunghiuri $AA_1A_2; BB_1B_2; CC_1C_2$. În fiecare din aceste triunghiuri se înscrie câte un cerc. Să se calculeze suma ariilor celor 4 cercuri înscrise triunghiurilor $ABC, AA_1A_2, BB_1B_2, CC_1C_2$.

Moscova, 1964 (Iugoslavia)

20. Să se afle toate numerele reale x aparținând intervalului $[0, 2\pi]$ și care verifică inegalitatea :

$$2 \cos x \leq \left| \sqrt{1 + \sin 2x} - \sqrt{1 - \sin 2x} \right| \leq \sqrt{2}.$$

Berlin, 1965 (Iugoslavia)

21. Se consideră sistemul :

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = 0$$

Coeficienții sistemului verifică următoarele condiții :

a) a_{11}, a_{22}, a_{33} sînt pozitive ;

b) toți ceilalți coeficienți sînt negativi ;

c) în fiecare ecuație suma coeficienților este pozitivă.

Să se demonstreze că $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ este unica soluție a sistemului dat.

Berlin, 1965 (Polonia)

22. Să se afle 4 numere reale x_1, x_2, x_3, x_4 astfel încît suma fiecăruia dintre cele 4 numere cu produsul celorlalte trei să fie egală cu 2.

Berlin, 1965 (U.R.S.S.)

23. Să se demonstreze că dacă laturile a, b, c ale unui triunghi ABC și unghiurile α, β și γ opuse acestor laturi verifică relația :

$$a + b = \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} (a \operatorname{tg} \alpha + b \operatorname{tg} \beta),$$

atunci acest triunghi este echilateral.

Sofia, 1966 (Ungaria)

24. Să se demonstreze identitatea :

$$\frac{1}{\sin 2x} \left[+ \frac{1}{\sin 4x} \right] + \dots + \left[\frac{1}{\sin 2^n x} \right] = \operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg} 2^n x,$$

unde n este un număr natural și $x \neq \frac{\lambda\pi}{2^k} (k = 0, 1, \dots, n; \lambda \in \mathbb{Z})$.

Sofia, 1966 (Iugoslavia)

25. Să se rezolve sistemul :

$$|a_1 - a_2|x_2 + |a_1 - a_3|x_3 + |a_1 - a_4|x_4 = 1$$

$$|a_2 - a_1|x_1 + |a_2 - a_3|x_3 + |a_2 - a_4|x_4 = 1$$

$$|a_3 - a_1| x_1 + |a_3 - a_2| x_2 + |a_3 - a_4| x_4 = 1$$

$$|a_4 - a_1| x_1 + |a_4 - a_2| x_2 + |a_4 - a_3| x_3 = 1,$$

unde a_1, a_2, a_3, a_4 sînt numere reale date, diferite între ele.

Sofia, 1966 (Cehoslovacia)

26. Într-un tetraedru dacă o muchie și numai una are lungimea mai mare decît 1, să se demonstreze că volumul tetraedrului nu este mai mare decît $\frac{1}{8}$.

Belgrad, 1967 (Cehoslovacia).

27. k, m, n sînt numere întregi pozitive și $m + k + 1$ este un număr prim mai mare decît $n + 1$. Fie $C_s = s(s + 1)$. Să se arate că produsul $(C_{m+1} - C_k)(C_{m+2} - C_k) \dots (C_{m+n} - C_k)$ se divide cu produsul $C_1 C_2 \dots C_n$.

Belgrad, 1967 (Anglia)

28. Să se demonstreze că există un singur triunghi care are proprietatea că lungimile celor trei laturi sînt trei numere naturale consecutive, iar unul din unghiuri este de două ori mai mare decît unul din celelalte două.

Leningrad, 1968 (România)

29. Să se găsească toate numerele întregi pozitive x , scrise în baza de numerație 10, astfel încît produsul cifrelor sale să fie egal cu $x^2 - 10x - 22$.

Leningrad, 1969 (Cehoslovacia)

30. Fie $[x]$ partea întreagă a numărului real x care este cel mai mare număr întreg, mai mic decît x .

Să se calculeze suma :

$$\left[\frac{n+1}{2} \right] + \left[\frac{n+2}{2^2} \right] + \dots + \left[\frac{n+2^k}{2^k} \right] + \dots$$

pentru fiecare număr întreg pozitiv n și să se demonstreze că formula obținută este adevărată.

Leningrad, 1968 (Anglia).

31. Să se demonstreze că există o mulțime infinită de numere naturale a care au următoarea proprietate : numărul $z = n^4 + a$ nu este prim, oricare ar fi numărul natural n .

București, 1969 (R.D.G.)

32. Fie a_1, a_2, \dots, a_n constante reale, x o variabilă reală și :

$$f(x) = \cos(a_1 + x) + \frac{\cos(a_2 + x)}{2} + \frac{\cos(a_3 + x)}{2^2} + \dots + \frac{\cos(a_n + x)}{2^{n-1}}$$

Să se demonstreze că din relația $f(x_1) = f(x_2) = 0$ rezultă că $x_1 - x_2 = m\pi$ unde m este un număr întreg.

București, 1969 (Ungari)

33. Să se demonstreze că dacă $x_1 > 0$, $x_2 > 0$ și $x_1 y_1 - z_1^2 > 0$, $x_2 y_2 - z_2^2 > 0$, atunci :

$$\frac{8}{(x_1 + x_2)(y_1 + y_2) - (z_1 + z_2)^2} \leq \frac{1}{x_1 y_1 - z_1^2} + \frac{1}{x_2 y_2 - z_2^2}.$$

Să se găsească condiția necesară și suficientă pentru ca relația de mai sus să devină egalitate.

București, 1969 (U.R.S.S.)

34. Se dă triunghiul ABC , M un punct situat pe latura AB între punctele A și B . Fie r_1, r_2 și r razele cercurilor înscrise triunghiurilor AMC , BMC , ABC ; ρ_1, ρ_2, ρ razele cercurilor exinscrise triunghiurilor AMC , BMC și ABC .

Să se demonstreze relația :

$$\frac{r_1 r_2}{\rho_1 \rho_2} = \frac{r}{\rho}$$

Budapesta, 1970 (Polonia)

35. În tetraedrul $ABCD$ avem : $DB \perp DC$ și perpendiculara coborâtă din punctul D pe planul triunghiului ABC , trece prin ortocentrul acestui triunghi. Să se demonstreze relația :

$$(AB + BC + AC)^2 \leq 6(AD^2 + BD^2 + CD^2)$$

Pentru ce tetraedru are loc egalitatea ?

Budapesta, 1970 (Bulgaria)

36. Fie a_1, a_2, \dots, a_n numere reale care verifică inegalitatea :

$$(a_1 - a_2)(a_1 - a_3) \dots (a_1 - a_n) + \\ + (a_2 - a_1)(a_2 - a_3) \dots (a_2 - a_n) + \\ + \dots + (a_n - a_1)(a_n - a_2) \dots (a_n - a_{n-1}) \geq 0.$$

Să se arate că inegalitatea este adevărată pentru $n = 3$ și $n = 5$ și nu este adevărată pentru nici un alt număr natural $n(n > 2)$.

Bratislava, 1971 (Ungaria)

37. Să se demonstreze că pentru orice numere întregi și pozitive

m și n numărul $\frac{(2m)! (2n)!}{m! n! (m+n)!}$ este întreg.

Varșovia, 1972 (Anglia)

38. Să se găsească toate soluțiile sistemului de inecuații :

$$\begin{cases} (x_1^2 - x_3x_5)(x_2^2 - x_3x_5) \leq 0 \\ (x_2^2 - x_4x_1)(x_3^2 - x_4x_1) \leq 0 \\ (x_3^2 - x_5x_2)(x_4^2 - x_5x_2) \leq 0 \\ (x_4^2 - x_1x_2)(x_5^2 - x_1x_3) \leq 0 \\ (x_5^2 - x_2x_4)(x_1^2 - x_2x_4) \leq 0, \end{cases}$$

unde x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 sînt numere reale pozitive.

Varșovia, 1971 (Olanda)

39. Să se afle valoarea minimă a expresiei $a^2 + b^2$ unde a și b sînt numere reale pentru care ecuația :

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0 \text{ are o rădăcină reală.}$$

Moscova, 1972 (Elveția)

40. Să se demonstreze că pentru orice număr natural n , numărul :

$$\sum_{k=0}^n C_{2n+1}^{2k+1} \cdot 2^{3k}$$

se divide la 5.

Berlin, 1973 (România).

Exerciții și probleme propuse de juri la diferite olimpiade internaționale.

1. Să se demonstreze inegalitatea :

$$\operatorname{tg} \left(\frac{\pi \sin x}{4 \sin \alpha} \right) + \operatorname{tg} \left(\frac{\pi \cos x}{4 \cos \alpha} \right) > 1$$

pentru toate valorile x și α care verifică condiția

$$0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{\pi}{3}$$

U.R.S.S.

2. Să se afle x dacă :

$$\frac{\sin 3x \cos(60^\circ - 4x) + 1}{\sin(60^\circ - 7x) - \cos(30^\circ + x) + m} = 0,$$

m fiind un parametru real.

România.

3. Câte soluții reale are ecuația :

$$x = 1964 \sin x - 189?$$

R.D.G.

4. Să se rezolve ecuația :

$$\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{p},$$

unde p este un parametru real. Să se afle pentru ce valori reale ale parametrului p , ecuația are soluții reale și câte?

Ungaria.

5. Să se afle soluțiile reale ale ecuației :

$$\sqrt{x^2 + 2px - p^2} - \sqrt{x^2 - 2px - p^2} = 1.$$

unde p este un număr real pozitiv.

Cehoslovacia.

6. Să notăm cu S aria unui patrulater convex și a, b, c, d , laturile sale.

Să se demonstreze inegalitatea:

$$S < \frac{a+c}{2} \cdot \frac{b+d}{2}$$

U.R.S.S.

7. Să se afle toate valorile lui x care verifică inecuația:

$$\sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

pentru orice valoare a lui n .

U.R.S.S.

8. Să se demonstreze că dacă a și b sînt numere reale iar m un număr întreg, atunci:

$$\left(1 + \frac{a}{b}\right)^m + \left(1 + \frac{b}{a}\right)^m > m + 1.$$

Polonia.

26.4. PROBLEME PROPUSE PENTRU SELECȚIE LOT R.S.R. OLIMPIADA NAȚIONALĂ iunie 1978

1. Fie un patrulater convex $ABCD$ și A', B' respectiv proiecțiile ortogonale ale punctelor A, B pe DC . Se presupune că $BB' \leq AA'$ și că aria $ABCD = \frac{(AB + CD) BB'}{2}$. Rezultă sau nu că patrulaterul $ABCD$ este trapez?

Dar dacă se presupune în plus că unghiul \widehat{BAD} este obtuz?

C. Ottescu

2. Se dă o piramidă triunghiulară $SABC$ și pe muchiile SA, SB, SC se iau puncte A', B', C' respectiv astfel încît planele $A'B'C'$ și ABC să se intersecteze după o dreaptă (d).

Să se arate că dacă triunghiul $A'B'C'$ se rotește în spațiu în jurul dreptei (d), atunci dreptele AA', BB', CC' sînt concurente și să se determine locul geometric al punctului de concurență.

C. Teleman

3. Se consideră în spațiu trei drepte D_1, D_2, D_3 , necoplanare două cîte două. Prin fiecare punct x_2 al lui D_2 se duce dreapta secantă care intersectează D_1 în punctul x_1 și D_3 în punctul x_3 .

a) Alegînd pe dreapta D_2 un punct O_2 și pe dreapta D_3 un punct O_3 , să se stabilească relația între abscisele punctelor x_2, x_3 pe dreptele D_2, D_3 relativ la O_2, O_3 respectiv.

b) Să se arate că există patru drepte în spațiu, necoplanare două câte două și neparalele cu același plan, avînd exact două secante comune. Aceeași problemă pentru o secantă comună și pentru nici o secantă comună.

c) Se consideră patru secante comune F_1, F_2, F_3, F_4 la dreptele D_1, D_2, D_3 . Să se arate că F_1, F_2, F_3, F_4 au o infinitate de secante comune.

I. Cuculescu

4. Să se rezolve ecuația $\sin x \sin 2x \dots \sin nx + \cos x \cos 2x \dots \cos nx = 1$ ($n \geq 1$ natural)

L. Panaitopol

5. Se consideră un triunghi echilateral ABC. Să se determine locul geometric al punctelor M din interiorul triunghiului astfel încît

$$\widehat{MAB} + \widehat{MBC} + \widehat{MCA} = \frac{\pi}{2}$$

L. Panaitopol

6. Să se arate că în mulțimea numerelor de forma $|x\sqrt{2} + y\sqrt{3} + z\sqrt{5}|$ cu x, y, z întregi, nu toți nuli, există numere nenule oricît de mici. Să se arate de asemenea că pentru orice aproximare $\sqrt{2} \simeq a, \sqrt{3} \simeq b, \sqrt{5} \simeq c$ prin numere raționale, expresia $|xa + yb + zc|$ se anulează pentru o infinitate de triplete distincte (x, y, z) de numere întregi, dar nu poate lua valori nenule oricît de mici.

H. Pop

7. Pentru o mulțime M pe puncte, oricare trei necoliniare dintr-un plan raportat la un reper se formulează următoarea proprietate (care poate să fie sau nu adevărată):

(P) centrul de greutate al oricărei submulțimi finite a lui M are coordonatele întregi.

Să se arate că :

a) pentru orice $n \geq 1$ există o mulțime M avînd proprietatea

(P) și cu n elemente.

b) o mulțime M infinită nu poate avea proprietatea (P).

S. Popa

8. Să se rezolve problema următoare, formulînd-o în prealabil în limbaj de teoria mulțimilor :

La o serată sînt invitați băieți și fete. Fiecare băiat cunoaște un anumit număr de fete astfel încît pentru orice mulțime M de băieți, mulțimea fetelor cunoscute de cel puțin un băiat din M este cel puțin la fel de numeroasă ca M . Să se arate că la un dans pe

perechi pot dansa toți băieții, fiecare cu câte o parteneră pe care o cunoaște.

9. Să se arate că pentru orice număr natural $a \geq 3$ există o infinitate de numere naturale $n \geq 1$ astfel încît $a^n - 1$ să fie divizibil cu n .

Rămîne proprietatea adevărată pentru $a = 2$? L. Panaitopol

10. O funcție $f: \{x_1, x_2, \dots, x_k\} \rightarrow R$ definită pe o mulțime finită de numere reale se numește aditivă dacă ori de cîte ori $n_1, \dots, n_k \in Z$ și $n_1x_1 + \dots + n_kx_k = 0$, rezultă $n_1f(x_1) + \dots + n_kf(x_k) = 0$. Să se arate că f fiind dată ca mai sus și y_1, \dots, y_p fiind numere reale oarecare, există o funcție aditivă $F: \{x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_p\} \rightarrow R$ astfel încît $F(x_i) = f(x_i)$, pentru orice i , $1 \leq i \leq k$.

R. Gologan

11. Se fixează o mulțime M și două partiții $\{A_1, A_2, \dots, A_p\}$ și $\{B_1, B_2, \dots, B_p\}$ ale ei astfel încît ori de cîte ori $A_i \cap B_j = \emptyset$, $1 \leq i, j \leq p$, să rezulte $|A_i| + |B_j| \geq p$. Să se arate că $|M| > \frac{p^2+1}{2}$; poate avea loc egalitatea?

($[]$ este partea întreagă și $|C|$ este numărul de elemente al mulțimii C).

Dragoș Popescu

12. Într-un plan se consideră o mulțime M avînd n puncte, oricare trei fiind necoliniare. Fiecărui segment cu extremitățile în M i se atribuie unul din numerele $+1$ sau -1 , iar un triunghi cu virfurile în M este numit negativ dacă produsul numerelor asociate laturilor sale este de -1 . Presupunînd că la p din segmente este asociat numărul -1 , să se arate că dacă n este par (respectiv impar), atunci numărul triunghiurilor negative este par (respectiv de aceeași paritate cu p).

I. Tomescu

13. Fie un triunghi dat; să se determine mulțimea tuturor punctelor M din interiorul triunghiului astfel încît să existe o dreaptă (d) trecînd prin M care să împartă triunghiul în două regiuni, simetrica uneia față de (d) fiind inclusă în cealaltă regiune.

M. Bălună, S. Popa

14. Într-o sferă de rază 1 pot fi așezate 20 de tetraedre regulate de latură 1 astfel încît oricare două dintre ele să nu aibă puncte inferioare comune?

V. Pătrîngenaru

26.5. DIVERSE

● A. Un paralelipiped dreptunghic are dimensiunile a, b, c .
Sistemul :

$$a^2 x - ay + z = a^3$$

$$b^2 x - by + z = b^3$$

$$c^2 x - cy + z = c^3,$$

$a \neq b, b \neq c; c \neq a$ are ca soluție (x, y, z) .

Se cere :

1. Să se arate că :

$2y$ reprezintă aria totală a paralelipipedului.

z reprezintă volumul paralelipipedului.

2. Prin diagonala bazei trece un plan care face cu planul baze unghiul u și taie muchia opusă în punctul I .

Să se exprime în funcție de u și de laturile bazei aria secțiunii.

3. Să se determine aria și volumul sferei circumscrise paralelipipedului.

B. Fie polinomul $P(x) = x^3 + 3x^2 - mx + 5$. Se cere :

1. Să se discute natura rădăcinilor ecuației $P(x) = 0$ în funcție de m (m real).

2. Să se rezolve ecuația $P(x) = 0$ în cazul $x_1 = x_2$.

3. Să se determine m astfel încât x_1, x_2, x_3 , rădăcinile ecuației $P(x) = 0$, să satisfacă condiția :

$$\arctg x_1 + \arctg x_2 + \arctg x_3 = \arctg \frac{1}{21}.$$

4. Să se traseze curba $y = P(x)$ pentru m obținut la punctul 2.

● Să se rezolve ecuația

$$z^2 - 2(2 + i)z + 6 = 0; z \in \mathbb{C}.$$

Să se determine modulul și argumentul fiecăreia din rădăcinile sale.

• Se consideră un grup finit de ordinul n , ($n \geq 2$) și de element neutru e .

a) Să se arate că dacă n este prim, G coincide cu subgrupul monogen generat de un element oarecare al grupului diferit de e .

b) Arătați că în cazul general grupul G este un pătrat latin, în sensul că fiecare element al lui G figurează o dată și o singură dată în fiecare linie sau coloană.

c) Să se construiască o tabelă a grupului pentru $n = 4$.

Soluții

a) Fie x un element oarecare al grupului altul decât e . Subgrupul generat de x conține cel puțin două elemente x și e . Să notăm cu m ordinul grupului. Ordinul său este divizor al unui număr prim n și prin urmare $m = n$.

Prin urmare subgrupul coincide cu grupul ($H = G$). Putem scrie :

$G = \{e = x^0; x^1, x^2, \dots, x^{n-1}\}$, ceea ce ne arată că grupul G este comutativ.

b) Să considerăm o linie l , a tabelului; ea se scrie :

$$L = \{ax/a \text{ fix, } x \text{ descrie } G\}.$$

Din relația : $ax' = ax''$, deducem $x' = x''$, deoarece a este un element regulat. Elementele lui L sînt distincte două câte două.

Să alcătuim un tabel în care să exemplificăm pentru cazul a trei elemente cum se formează subgrupul :

	a	b	c
a	a	c	b
b	c	b	a
c	b	a	c

În tabel se arată că G este un pătrat definit pe mulțimea $\{a, b, c\}$ dar care nu posedă element neutru.

c) Să notăm $G = \{e, a, b, c\}$.

Vom începe să alcătuim tabelul cuprinzând o linie care corespunde lui x ($x \in G$):

	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e		
b	b		e	
c	c			e

Vom afla elementele primei coloane care corespunde lui x_1 ; $x \in G$. Pentru a afla celelalte elemente să observăm că va trebui să plasăm pe diagonala principală, de trei ori elementul e , celelalte trebuind să fie simetrice față de diagonală :

	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e		e
b	b		e	
c	c	e		e

Dacă notăm cu b un element diferit de 1 și care aparține mulțimii G , avînd proprietatea că coincide cu inversul său atunci din aceste cazuri nu se pot deduce decît două posibilități ilustrate de tabelele de mai jos :

a)

	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

b)

	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	b	c	e
b	b	c	e	a
c	c	e	a	b

Lăsăm în seama cititorului să verifice cele două legi de compoziție definite prin tabelele de mai sus.

Observație

Dacă notăm cu $e = \bar{0}$, $a = \bar{1}$; $b = \bar{2}$; $c = \bar{3}$ atunci tabela b este tabela grupului aditiv modulo 4, și tabela a tabela grupului lui Klein.

● Se consideră mulțimea $R^* = R - \{0\}$. Să se arate că legea

de compoziție $*$ determinată prin relația : $(x, y) * (x', y') = (xx'; \frac{y'}{x} + x'y)$ determină pe $R^* \times R$ o structură de grup.

Demonstrație

Se observă că legea de compoziție este internă și necomutativă.

Asociativitatea

$$\underbrace{[(x, y) * (x', y')]}_{(u, v)} * (x'', y'') = (u, v) * (x'', y'') = \left(ux'', \frac{y''}{u} + x''v \right)$$

$$(u, v) = (x, y) * (x', y') = \left(xx', \frac{y}{x} + x'y \right)$$

$$[(x, y) * (x', y')] * (x'', y'') = (xx'x'', \frac{y''}{xx'} + x''(\frac{y}{x} + x'y)) =$$

$$= \left(xx'x''; \frac{y''}{xx'} \frac{x''y' + xx'x''y}{x} \right) = (xx'x''; \frac{y'' + x''y' + xx'x''y}{xx'})$$

$$(x, y) * [(x'y') * (x'', y'')] = (x, y) * (z, t) = \left(xz, \frac{t}{x} + zy \right)$$

$$(z, t) = (x', y') * (x'', y'') = \left(x'x'', \frac{y''}{x'} + x''y' \right)$$

$$(x, y) * [(x', y') * (x'', y'')] = \left(xx'x''; \frac{y''}{x'''} + \frac{x''y' + xx'x''y}{x} \right)$$

Legea este asociativă.

Element neutru

Pentru orice element $(x, y) \in R^* \times R$ avem :

$$(1, 0) * (x, y) = (x, y) * (1, 0) = (x, y).$$

Simetricul unui element

Pentru orice element $(x, y) \in R^* \times R$ avem :

$$(x, y) * \left(\frac{1}{x}, -y \right) = \left(\frac{1}{x}, -y \right) * (x, y) = (1, 0).$$

● Se consideră grupul G , și să notăm :

$$C = \{cG / (\forall x \in G), xc = cx\}.$$

Să se arate că mulțimea C este un subgrup a lui G .

Dacă G este un grup vom avea :

$$\begin{aligned} (ax)^{-1} &= x^{-1} a^{-1}, \text{ deoarece } (x^{-1} a^{-1})(ax) = x^{-1}(a^{-1} \cdot a)x = \\ &= x^{-1} ex = x^{-1} x = e. \end{aligned}$$

Fie : a și a' două elemente ale mulțimii C . Dacă $x \in G$ și dacă $a' \in C$, vom avea evident relația :

$$xa'a^{-1} = a'xa^{-1} = a'(ax^{-1})^{-1}.$$

Pentru $a \in C$ avem :

$$xa'a^{-1} = a'(x^{-1}a)^{-1} = a'a^{-1}x.$$

Prin urmare pentru orice element a și $a' \in C$ avem relația $a'a^{-1} \in C$, ceea ce permite să afirmăm că C este un subgrup a lui G .

● Să considerăm grupul G , în care avem o aplicație h definită în felul următor :

Pentru orice element $a \in G$ aplicația h este definită prin relația :

$$f_a(x) = axa^{-1}.$$

Să se arate că f_a este un izomorfism a grupului G pe el însuși, adică un automorfism interior lui G .

Soluție

Din relația $y = axa^{-1}$ se obține : $x = a^{-1}ya$ și reciproc, sau $y = axa^{-1} \Leftrightarrow x = a^{-1}ya$

Orice element y al lui G este deci imaginea prin f_a a unui singur x din G . Prin urmare f_a este o aplicație bijectivă a lui G pe G .

Avem :

$$f_a(xx') = axx'a^{-1} = (axa^{-1})(ax'a^{-1}) = f_a(x) \cdot f_a(x').$$

Rezultă că aplicația f_a este homomorfism de grup.

● Să se arate că în R , legea de compoziție internă :

$x*y = x + y - xy$ este comutativă și asociativă și admite un element neutru. Să se cerceteze dacă această lege formează un grup.

Să se calculeze: $\underbrace{x * x * x * \dots * x}_{n\text{-ori}}$

Soluție:

Comutativitatea:

$$x * y = x + y - xy = y + x - yx = y * x$$

Asociativitatea:

$$x * (y * z) = x * u = x + u - xu;$$

$$u = y * z = y + z - yz.$$

$$\begin{aligned} x * (y * z) &= x + y + z - yz - x(y + z - yz) = \\ &= x + y + z - yz - xy - xz + xyz. \end{aligned}$$

$$\underbrace{(x * y)}_v * z = v * z = v + z - vz.$$

$$\begin{aligned} v &= x * y = x + y - xy; \quad \underline{(x * y) * z} = x + y - xy + z - \\ &- z(x + y - xy) = \\ &= \underline{x + y + z - xy - zx - zy + xyz}. \end{aligned}$$

Prin urmare $x * (y * z) = (x * y) * z$.

Element neutru

$$\begin{aligned} \forall x; x * e = x &\Rightarrow x + e + ex = x \Rightarrow e(1 + x) = 0 \Rightarrow e = 0, \\ x * 0 &= x. \end{aligned}$$

Element simetric

Numărul real 1 nu are simetrie deoarece: $(\forall x \in R) x * 1 = 1 \neq 0$.

Legea de compoziție nu formează grup.

2) Vom calcula produsul $\underbrace{x * x * x \dots}_{n\text{-ori}}$ inductiv:

$$\begin{aligned} x * x &= x + x - x^2 = 2x - x^2 = 1 - (1 - 2x + x^2) = \\ &= 1 - (1 - x)^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x * x * x &= x * (x * x) = x * [1 - (1 - x)^2] = x + [1 - \\ &- (1 - x)^2] - x[1 - (1 - x)^2] = x + 1 - (1 - x)^2 - \\ &- x + x(1 - x)^2 = x + 1 - (1 - x)^2(1 + x) - x = 1 - (1 - x)^3 \end{aligned}$$

Utilizând un raționament prin recurență se deduce relația :

$$\underbrace{x * x * x * \dots * x}_{n\text{-ori}} = 1 - (1 - x)^n.$$

● Un grup G se numește involutiv dacă $\forall x \in G, x^2 = e$. Să se arate că dacă un grup este involutiv el este comutativ.

Demonstrație

Dacă x și y sînt două elemente oarecare ale lui G , atunci avem :

$$(yx)(xy) = y(xx)y = y \cdot e \cdot y = (ye)y = y \cdot y = e.$$

Să notăm cu $z = yx$. Deducem $z \in G$ și prin urmare avem :

$$z * z = e \Rightarrow (yx)(yx) = e.$$

Din egalitate : $(yx)(xy) = (yx)(yx)$ deducem : $xy = yx$.

Prin urmare grupul este comutativ.

● Să se arate că dacă într-un grup G avem relația : $\forall (x, y) (xy)^2 = x^2 y^2$, atunci grupul este comutativ.

Demonstrație

$$(xy)^2 = (xy)(xy) = xyxy.$$

Din enunț rezultă că : $xy \cdot xy = xx yy$.

Dacă înmulțim ambii membri ai acestei egalități la dreapta cu y^{-1} și la stînga cu x^{-1} , atunci obținem :

$$x^{-1}(xy xy)y^{-1} = x^{-1}(xxyy)y^{-1} \text{ sau } (x^{-1}x)(yx)(yy^{-1}) = (x^{-1}x)$$

$$(xy)(yy^{-1}) \Rightarrow e(xy)e = e(xy)e \Rightarrow yx = xy.$$

● În mulțimea R se consideră două legi de compoziție, definite astfel :

$$\forall (a, b) \in R, a * b = k \cdot a \cdot b; a \top b = a + k \cdot b (k \neq 0; 1)$$

a) Să se studieze comutativitatea și asociativitatea acestor legi.

b) Să se arate că prima lege de compoziție este distributivă față de cea de a doua lege.

Soluție

$$\forall(a, b) \ a * b = k \cdot a \cdot b; \ a \top b = a + kb \ (k \neq 0, 1)$$

Vom studia separat comutativitatea și asociativitatea fiecărei legi.

$$a) \ a * b = k \cdot a \cdot b = k \cdot b \cdot a = b * a.$$

Să notăm :

$$a * b = x; \ x = kab$$

$$b * c = y; \ y = kbc.$$

Avem :

$$(a * b) * c = x * c = kxc = k(kab) \cdot c = k^2abc,$$

$$a * (b * c) = a * y = kay = ka(k \cdot bc) = k^2abc.$$

Prin urmare :

$$(a * b) * c = a * (b * c).$$

Prima lege de compoziție este asociativă și comutativă.

$$b) \ a \top b = a + kb; \ b \top a = b + ka; \ a \top b \neq b \top a.$$

Prin urmare această lege de compoziție nu este comutativă.
Să notăm :

$$a \top b = x; \ x = a + kb; \ b \top c = y; \ y = b + kc.$$

Avem :

$$(a \top b) \top c = x \top c = x + kc = a + kb + kc.$$

$$a \top (b \top c) = a \top y = a + ky = a + k(b + kc).$$

Prin urmare :

$$(a \top b) \top c \neq a \top (b \top c).$$

Cea de a doua lege nu este nici comutativă nici asociativă. Să notăm :

$$b \top c = x; \ x = b + kc.$$

$$a * (b \top c) = a * x = kax = ka(b + kc).$$

Fie :

$$a * b = z; z = kab \text{ și } a * c = y; y = kac$$

$$(a * b) \top (a * c) = z \top y = z + ky = kab + k(kac) =$$

$$= ka(b + kc).$$

Prin urmare :

$$a * (b \top c) = (a * b) \top (a * c).$$

- Se dă un grup multiplicativ G , astfel încît :

$$\forall a \in G; \forall b \in G; (a \cdot b)^2 = a^2 \cdot b^2.$$

Să se arate că acest grup este abelian.

Soluție

$$\text{Avem : } (a \cdot b)^2 = (a \cdot b) \cdot (a \cdot b).$$

Deoarece G formează un grup avem :

$$(a \cdot b)^2 = (a \cdot b) \cdot (a \cdot b) = a \cdot (b \cdot a) \cdot b = a^2 \cdot b^2 =$$

$$= (a \cdot a) \cdot (b \cdot b) = a \cdot (a \cdot b) \cdot b.$$

Prin urmare avem egalitatea :

$$a \cdot (b \cdot a) \cdot b = a \cdot (a \cdot b) \cdot b \text{ de unde rezultă :}$$

$$b \cdot a = a \cdot b$$

- În mulțimea numerelor reale R se definește operația \top astfel :

$$(m, n) \top (m', n') = (mm', mn' + n).$$

Să se demonstreze existența și unicitatea elementului neutru și că pentru $m \neq 0$, (m, n) admite un element simetric unic.

Soluție

1) Să presupunem că există un element neutru pe care-l notăm cu (e, e') și avem :

$$(m, n) \top (e, e') = (me, me' + n) = (m, n).$$

Din această relație obținem :

$$(me, me' + n) = (m, n) \text{ sau } me = m; me' + n = n; \text{ deci } e = 1,$$

$$e' = 0.$$

Prin urmare legea de compoziție admite un element neutru $(1, 0)$.

$$2) (m, n) \top (m^{-1}, n^{-1}) = (mm^{-1}, mn^{-1} + n) = (1, 0),$$

$$\text{sau : } mm^{-1} = 1, mn^{-1} + n = 0.$$

$$m^{-1} = \frac{1}{m}; n^{-1} = -\frac{n}{m}.$$

Prin urmare elementul simetric (m^{-1}, n^{-1}) este $\left(\frac{1}{m}; -\frac{n}{m}\right)$.

● În mulțimea R se definește operația $*$ astfel :

$$a * b = a - b + \frac{a}{b}; b \neq 0,$$

Se notează cu x_1 , soluția ecuației $x * a = 0$ și cu x_2 soluția ecuației $x * a = 1$. Să se arate că $x_1 * x_2 = 0$.

Soluție

$$\begin{aligned} x_1 * a = 0 &\Leftrightarrow x_1 - a + \frac{x_1}{a} = 0 \Leftrightarrow ax_1 - a^2 + x_1 = \\ &= 0 \Leftrightarrow x_1(a + 1) - a^2 \Leftrightarrow x_1 = \frac{a^2}{a + 1}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_2 * a = 1 &\Leftrightarrow x_2 - a + \frac{x_2}{a} = 1 \Leftrightarrow ax_2 - a^2 + x_2 = \\ &= a \Leftrightarrow x_2(a + 1) = a(a + 1) \Leftrightarrow x_2 = a, (a \neq -1). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 * x_2 &= x_1 - x_2 + \frac{x_1}{x_2} \Leftrightarrow x_1 * x_2 = \frac{a^2}{a + 1} - a + \\ &+ \frac{\frac{a^2}{a + 1}}{a} = \frac{a^2}{a + 1} - a + \frac{a^2}{a^2 + a} = \frac{a^2}{a + 1} - a + \\ &+ \frac{a}{a + 1} = \frac{a^2 - a^2 - a + a}{a + 1} = 0. \end{aligned}$$

● Să se arate că funcțiile : $f_1(x) = x$; $f_2(x) = -x$; $f_3(x) = \frac{1}{x}$; $f_4(x) = -\frac{1}{x}$, formează grup pentru operația : $f_i(x) \perp f_j(x) = f_j[f_i(x)]$

Soluție

$$f_1(x) \perp f_2(x) = f_2(x) \perp f_1(x) = -x = f_2(x)$$

$$f_1(x) \perp f_3(x) = f_3(x) \perp f_1(x) = \frac{1}{x} = f_3(x)$$

$$f_1(x) \perp f_4(x) = f_4(x) \perp f_1(x) = -\frac{1}{x} = f_4(x)$$

$$f_2(x) \perp f_3(x) = f_3(x) \perp f_2(x) = -\frac{1}{x} = f_4(x)$$

$$f_2(x) \perp f_4(x) = f_4(x) \perp f_2(x) = \frac{1}{x} = f_3(x)$$

$$f_3(x) \perp f_4(x) = f_4(x) \perp f_3(x) = -x = f_2(x).$$

Compunerea elementelor poate fi redată sub forma următorului tabel :

	f_1	f_2	f_3	f_4
f_1	f_1	f_2	f_3	f_4
f_2	f_2	f_1	f_4	f_3
f_3	f_3	f_4	f_1	f_2
f_4	f_4	f_3	f_2	f_1

$$f_2(x) \perp f_2(x) = f_1(x)$$

$$f_3(x) \perp f_3(x) = f_1(x)$$

$$f_4(x) \perp f_4(x) = f_1(x).$$

Prin urmare :

$$f_2^{-1}(x) = f_2(x) ; f_3^{-1}(x) = f_3(x)$$

$$f_4^{-1}(x) = f_4(x) ; f_1^{-1}(x) = f_1(x)$$

Mulțimea $\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ formează un grup comutativ față de operația notată deoarece :

$$1) f_i(x) \perp f_j(x) = f_j(x) \perp f_i(x) \quad (\text{comutativă})$$

$$2) (f_i(x) \perp f_j(x) \perp f_k(x) = f_i(x) \perp (f_j(x) \perp f_k(x))).$$

$$i \neq j \neq k \quad (\text{asociativă})$$

3) $f_1(x) \perp f_i(x) = f_i(x)$ pentru orice $i \neq 1$, admite un element neutru $f_1(x)$.

4) $f_i(x) \perp f_i(x) = f_1(x)$. Orice element $f_i(x)$ admite un element invers egal cu el însuși.

● În mulțimea G a cuplurilor ordonate (a, b) cu $a \neq 0$ și pentru care avem :

$$a \neq 0; (a, b) = (a', b') \Rightarrow a = a'; b = b'$$

se consideră următoarea lege de compoziție :

$$(a, b) * (a', b') = (aa', ba' + b').$$

Să se arate că G formează grup.

Soluție

1) Să notăm elementul neutru cu (e, e') și avem :

$$\overbrace{(a, b) * (e, e')} = (ae, be + e') = (a, b), \text{ de unde rezultă :}$$

$$ae = a; be + e' = b, \text{ sau } e = 1, e' = 0.$$

Prin urmare elementul neutru este $(1, 0)$.

2) Să notăm :

$$(a, b) * (c, d) = (x, y) = (ac, bc + d)$$

$$(c, d) * (e, f) = (z, w) = (ce, de + f).$$

Avem :

$$\begin{aligned} ((a, b) * (c, d)) * (e, f) &= (x, y) * (e, f) = (xe, ye + f) = \\ &= (ace, bce + de + f). \end{aligned}$$

$$(a, b) * ((c, d) * (e, f)) = (a, b) * (z, w) = (az, bz + w) = \\ = (ace, bce + de + f), \text{ sau :}$$

$$((a, b) * (c, d)) * (e, f) = (a, b) * ((c, d) * (e, f)).$$

Legea de compoziție este asociativă.

3) $(a, b) * (a^{-1}, b^{-1}) = (1, 0)$, sau :

$$(aa^{-1}, ba^{-1} + b^{-1}) = (1, 0)$$

$$aa^{-1} = 1, ba^{-1} + b^{-1} = 0$$

$$a^{-1} = \frac{1}{a}; \frac{b}{a} + b^{-1} = 0 \Rightarrow b^{-1} = -\frac{b}{a}.$$

Prin urmare :

$$(a^{-1}, b^{-1}) = \left(\frac{1}{a}, -\frac{b}{a} \right).$$

Orice element admite un simetric.

● Fie I mulțimea numerelor întregi $a \in I, b \in I, a' \in I$ și $b' \in I$.
Fie operația $*$ definită în felul următor :

$$(a, b) * (a', b') = (aa' + 2bb', ab' + ba').$$

Să se demonstreze că legea este asociativă și comutativă și că admite element neutru.

Soluție

$$1) (a, b) * (a', b') = (aa' + 2bb', ab' + ba').$$

$$(a', b') * (a, b) = (aa' + 2bb', a'b + b'a)$$

Prin urmare :

$$(a, b) * (a', b') = (a', b') * (a, b).$$

Legea este comutativă.

2) Să notăm :

$$(a, b) * (c, d) = (ac + 2bd, ad + bc) = (x, y)$$

$$(c, d) * (e, f) = (ce + 2df, of + de) = (z, w).$$

Avem :

$$(a, b) * ((c, d) * (e, f)) = (a, b) * (z, w) = (az + 2bw, aw + bz) = \\ = (ace + 2adf + 2bcf + 2bde, acf + ade + bce + 2bdf)$$

$$((a, b) * (c, d)) * (e, f) = (x, y) * (e, f) = (xe + 2yf, xf + ye) =$$

$$= (ace + 2bde + 2adf + 2bcf; acf + 2bdf + ade + bce).$$

Prin urmare :

$$(ab) * ((c, d) * (e, f)) = ((a, b) * (c, d)) * (e, f).$$

Legea de compoziție este asociativă.

3) Să presupunem că legea de compoziție dată admite elementul neutru (e, e') .

Avem : $(a, b) * (e, e') = (a, b)$ sau

$$(ae + be', ae' + be) = (a, b).$$

De unde rezultă că : $ae + be' = a$; $ae' + be = b$.

$$\begin{cases} ae + be' = a \\ be + ae' = b \end{cases} \quad \begin{array}{l} - b \\ a \end{array}$$

$$-abe - b^2e' = -ab$$

$$\underline{abe + a^2e' = ab}$$

$$e'(b^2 - a^2) = 0 \Rightarrow e' = 0, e = 1$$

Prin urmare legea de compoziție dată admite elementul neutru $(1, 0)$.

● Dacă elementele a, b , ale unui grup necomutativ verifică relația :

$$a^{-1} b a = b^{-1}; \quad b^{-1} a b = a^{-1}, \text{ atunci :}$$

$$a^2 b^2 = b^2 a^2 = e; \quad a^2 = b^2 \text{ și } a^4 = b^4 = e.$$

Soluție

Din relațiile $a^{-1}ba = b^{-1}$ și $b^{-1}ab = a^{-1}$ deducem :

$$a(a^{-1}ba) = ab^{-1}; \quad ba = ab^{-1}; \quad b(ba) = bab^{-1};$$

$$b^2a = bab^{-1}; \quad (b^2a)a = (bab^{-1})a; \quad b^2a^2 = bab^{-1}a;$$

$$a^2b = aba^{-1}; \quad a^2bb = aba^{-1}b; \quad a^2b^2 = aba^{-1}b;$$

$$b^2a^2b = ba(b^{-1}ab); \quad b^2a^2b = b(aa^{-1}) = b; \quad b^2a^2 = e;$$

$$a^2b^2a = ab(a^{-1}ba); \quad a^2b^2a = a(bb^{-1}); \quad a^2b^2 = e.$$

Prin urmare avem : $b^2a^2 = a^2b^2 = e$.

Se urmează în linii mari același procedeu pentru a arăta că $a^2 = b^2$.

Din relația $a^2 = b^2$ deducem :

$$a^2a^2 = a^2b^2 = e \Leftrightarrow a^4 = e;$$

$$a^2b^2 = b^2b^2 = e \Leftrightarrow b^4 = e.$$

Prin urmare $a^4 = b^4 = e$.

● În mulțimea R se consideră operația $*$ definită astfel :

$$m * n = \frac{m}{n - m} + n \quad (n \neq m).$$

Să se rezolve sistemul :

$$(x + by) * a = 0; \quad (ax - y) * b = 0$$

Soluție

Să notăm $x + by = z; \quad ax - y = w$

$$z * a = 0; \quad w * b = 0 \text{ sau :}$$

$$\frac{z}{a - z} + a = 0; \quad \frac{w}{b - w} + b = 0.$$

Din aceste relații deducem :

$$z + a^2 - az = 0; \quad w + b^2 - bw = 0$$

$$z(1 - a) = -a^2; \quad w(1 - b) = -b^2$$

$$z = \frac{a^2}{a - 1}; \quad w = \frac{b^2}{b - 1}$$

$$\begin{cases} x + by = \frac{a^2}{a-1} \\ ax - y = \frac{b^2}{b-1} \end{cases} \quad -a$$

$$\begin{cases} -ax - aby = \frac{-a^3}{a-1} \\ ax - y = \frac{b^2}{b-1} \end{cases}$$

$$-y(ab+1) = -\frac{a^3}{a-1} + \frac{b^2}{b-1}$$

$$y(ab+1) = \frac{a^3}{a-1} - \frac{b^2}{b-1}$$

$$y(ab+1) = \frac{a^3b - a^3 - b^2a + b^2}{(a-1)(b-1)} =$$

$$= \frac{a^3(b-1) - b^2(a-1)}{(a-1)(b-1)}$$

$$y = \frac{a^3(b-1) - b^2(a-1)}{(a-1)(b-1)(ab+1)}$$

$$\begin{cases} x + by = \frac{a^2}{a-1} \\ ax - y = \frac{b^2}{b-1} \end{cases} \quad b \quad \begin{cases} x + by = \frac{a^2}{a-1} \\ ax - by = \frac{b^3}{b-1} \end{cases}$$

$$x(a+1) = \frac{a^2}{a-1} + \frac{b^3}{b-1}$$

$$x(a+1) = \frac{a^2b - a^2 + b^3(a-1)}{(a-1)(b-1)} = \frac{a^2(b-1) + b^3(a-1)}{(a-1)(b-1)}$$

$$x = \frac{a^2(b-1) + b^3(a-1)}{(a-1)(a+1)(b-1)}$$

• O urnă conține cinci sfere numerotate de la 1 la 5. Se extrag în același timp două sfere din această urnă și se admite că tragerile sînt echiprobabile; cu fiecare eventualitate vom asocia cel mai mic număr înscris pe cele două sfere (exemplu tragerilor 4, 5 vom asocia 4). Vom defini astfel o variabilă aleatoare X .

- Determinați legea de probabilitate a lui X ;
- Determinați valoarea medie \bar{X} ;
- Determinați dispersia.

(Bacalaureat Orleans — Tours, 1975)

Preliminare. Mulțimea Ω a evenimentelor elementare este mulțimea.

$\Omega = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (3, 4), (3, 5), (4, 5)\}$ deci elementele sînt zece perechi (x, y) astfel ca $x < y$ cu $x \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ și $y \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Toate aceste evenimente sînt echiprobabile, fiecare avînd probabilitate $\frac{1}{10}$.

Vom avea: $x \in \{1, 2, 3, 4\}$ și vom observa că

$$P\{x = k\} = P(k, k+1) + P(k, k+2) + \dots + P(k, 5) = \frac{5-k}{10}.$$

Legea de probabilitate a lui x este dată de relația:

k	1	2	3	4
$P(x = k)$	$\frac{4}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$

$$\begin{aligned} E(x) &= \sum_{k=1}^{k=4} k P(x = k) = \frac{1}{10} (1 \times 4 + 2 \times 3 + 3 \times 2 + 4 \times 1) = \\ &= \frac{5 + 6 + 6 + 4}{10} = \frac{20}{10} = 2. \end{aligned}$$

Vom avea:

$$V(x) = E(x^2) - [E(x)]^2$$

și

$$\begin{aligned} E(x^2) &= \sum_{k=1}^{k=4} k^2 P(x = k) = \frac{1}{10} (1 \times 4 + 4 \times 3 + 9 \times 2 + 16 \times 1) = \\ &= \frac{4 + 12 + 18 + 16}{10} = \frac{50}{10} = 5 \end{aligned}$$

De unde, în consecință

$$V(x) = 5 - 4 = 1.$$

● Fie f și g funcții numerice de variabilă reală x , astfel ca :

$$f(x) = \frac{3x + 1}{x - 1} \text{ și } g(x) = 5x^2 - 3x + 1.$$

a) Arătați că f este o bijecție a lui $R - \{1\}$ pe $R - \{3\}$.

b) Determinați funcția compusă $g \circ f$;

c) Calculați derivatele f' și g' ;

d) Calculați funcția derivabilă $(g \circ f)'$ în următoarele două moduri :

— utilizând rezultatul punctului b ;

— utilizând teorema de derivare a unei funcții compuse și rezultatele punctului c.

(Bacalaureat Poitiers, 1975)

Soluție.

Un număr real $x \in R - \{1\}$ are ca imagine prin f numărul $y \in R - \{3\}$, dat prin :

$$f(x) = y = \frac{3x + 1}{x - 1} = \frac{3(x - 1) + 4}{x - 1} = 3 + \frac{4}{x - 1}$$

deci $y \neq 3$, pentru că $\frac{4}{x - 1} \neq 0$ și orice număr real $y \in R - \{3\}$ are în $R - \{1\}$ un antecedent x prin f și unul singur dat prin ecuația :

$$\begin{aligned} 3 + \frac{4}{x - 1} = y &\Leftrightarrow \frac{4}{x - 1} = y - 3 \Leftrightarrow x - 1 = \\ &= \frac{4}{y - 3} \Leftrightarrow x = 1 + \frac{4}{y - 3} \quad (x \neq 1, \text{ pentru că } \frac{4}{y - 3} \neq 0). \end{aligned}$$

Funcția f este deci o bijecție a lui $R - \{1\}$ pe $R - \{3\}$.

Observație : Funcția reciprocă f^{-1} este definită prin :

$$x \mapsto f^{-1}(x) = 1 + \frac{4}{x - 3} = \frac{x + 1}{x - 3}$$

Funcția g este definită pe R ; funcția f este definită pe $R - \{1\}$; funcția $g \circ f$ este definită pe $R - \{1\}$, domeniu pe care vom avea:

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g[f(x)] = 5 \left(\frac{3x+1}{x-1} \right)^2 - 3 \left(\frac{3x+1}{x-1} \right) + 1 = \\ &= \frac{5(3x+1)^2 - 3(3x+1)(x-1) + (x-1)^2}{(x-1)^2}\end{aligned}$$

sau, făcând toate reducerile:

$$(g \circ f)(x) = \frac{37x^2 + 34x + 9}{(x-1)^2} \quad (1)$$

Observație: Dacă vom pune $x = 1 + u$, avem:

$$\begin{aligned}\frac{37x^2 + 34x + 9}{(x-1)^2} &= \frac{37(1+u)^2 + 34(1+u) + 9}{u^2} = \\ &= \frac{37u^2 + 108u + 80}{u^2} = 37 + \frac{108}{u} + \frac{80}{u^2};\end{aligned}$$

$$(g \circ f)(x) = 37 + \frac{108}{x-1} + \frac{80}{(x-1)^2} \quad (2)$$

Vom avea:

$$\forall x \in R - \{1\}; f'(x) = -\frac{4}{(x-1)^2}$$

și

$$\forall x \in R; g'(x) = 10x - 3.$$

Calculul $(g \circ f)'(x)$ utilizând rezultatele de la (2). Dacă vom pune $(g \circ f)(x)$ sub forma (2) avem pentru $x \in R - \{1\}$.

$$\begin{aligned}(g \circ f)'(x) &= -\frac{108}{(x-1)^2} - \frac{2 \cdot 80(x-1)}{(x-1)^4} = \\ &= \frac{-4}{(x-1)^3} [27(x-1) + 40] = \frac{-4(27x+13)}{(x-1)^3}\end{aligned}$$

Calculul $(g \circ f)'(x)$ utilizând teorema de derivare a unei funcții compuse.

Derivata funcției $g \circ f$ este funcția

$$(g \circ f)'(x) = (g' \circ f)(x) \times f'(x),$$

având domeniul de definiție $R - \{1\}$.

$$(g \circ f)'(x) = (g' \circ f)(x) \times f'(x) = g'[f(x)] \times f'(x)$$

și cum, ținând cont de c)

$$\begin{aligned} g'[f(x)] &= g'\left(\frac{3x+1}{x-1}\right) = 10\left(\frac{3x+1}{x-1}\right) - 3 = \\ &= \frac{10(3x+1) - 3(x-1)}{x-1} = \frac{27x+13}{x-1} \end{aligned}$$

$$\text{și } f'(x) = -\frac{4}{(x-1)^2},$$

Vom avea în final :

$$(g \circ f)'(x) = \frac{27x+13}{x-1} \cdot \left[\frac{-4}{(x-1)^2} \right] = -\frac{4(27x+13)}{(x-1)^3}$$

Vom regăsi, evident, rezultatul precedent.

● La orice element al unui grup G se asociază o aplicație f_a a lui G în G , definită astfel :

$$f_a(x) = axa^{-1}$$

a) Să se arate că f_a este un izomorfism al grupului G pe el însuși (f_a este un automorfism interior al lui G).

b) Să se arate că mulțimea E a automorfismelor interioare a lui G , înzestrată cu legea \circ , formează un grup izomorf cu grupul cât al lui G .

Soluție.

$$a) (y = axa^{-1}) \Leftrightarrow (x = a^{-1}ya).$$

Orice element y a lui G este o imagine prin f_a a unui singur element al lui G . Prin urmare f_a este o bijecție a lui G pe G . În plus, avem relațiile :

$$f_a(xx') = axx'a^{-1} = (axa^{-1})(ax'a^{-1}) = f_a(x)f_a(x').$$

Bijecția f_a este deci un omomorfism de grupuri.

b) a și b fiind două elemente oarecare ale lui G , $f_a \circ f_b$ este definită prin relația :

$$x \rightarrow a(bxb^{-1})a^{-1}, \text{ sau } (ab)x(ab)^{-1}.$$

Prin urmare aplicația $a \rightarrow f_a$ este deci un omomorfism f , surjectiv față de legea de compoziție a grupului pe z și față de legea \circ .

Rezultă că legea \circ este o lege de compoziție a unui grup pe G .

Grupul E este izomorf grupului $G/\text{Ker } f$, sau :

$$(a \in \text{Ker } f) \Leftrightarrow (\forall x \in G) \quad axa^{-1} = x \text{ sau } ax = xa.$$

● Se consideră două grupuri G și G' notate multiplicativ și punem :

$$(a, a') * (b, b') = (ab, a'b')$$

Să se arate că mulțimea $G \times G'$ înzestrată cu legea $*$ este un grup.

Soluție.

$$[(a, a') * (b, b')] \times (c, c') \text{ și } (a, a') * [(b, b') * (c, c')]$$

sînt egale cu $(abc, a'b'c')$. Legea $*$ admite elementul neutru (e, e') unde e și e' sînt elementele neutre ale grupurilor G și G' . Elementul (a, a') a lui $G \times G'$, admite $(a^{-1}, (a')^{-1})$ ca simetric în $*$, unde a^{-1} și $(a')^{-1}$ sînt simetricele elementelor a și a' în G și G' .

● În inelul $Z/6Z = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}$ să se rezolve sistemul :

$$\begin{cases} \bar{5}x + \bar{2}y = a \\ \bar{2}x + \bar{4}y = b \end{cases}$$

Dacă k este un element inversabil și k' un element oarecare al inelului cele trei sisteme :

$$S \begin{cases} A = \bar{0} \\ B = \bar{0} \end{cases} \quad S' \begin{cases} B + KA = \bar{0} \\ B = \bar{0} \end{cases} \quad S'' \begin{cases} B + KA = \bar{0} \\ B + K'(B + KA) = \bar{0}, \end{cases}$$

admit aceeași soluție.

Soluție.

Utilizând $k = \bar{1}$ și $k' = \bar{4}$, se obține aici :

$$(S') \begin{cases} x = a + b \\ \bar{2}x + \bar{4}y = b \end{cases} \quad (S'') \begin{cases} x = a + b \\ \bar{4}y = \bar{4}a + \bar{5}b. \end{cases} \quad (1)$$

Pentru a rezolva sistemul S'' , vom începe cu ecuația (1). Dificultatea constă în faptul că $\bar{4}$ nu este element inversabil al inelului, dar este un divizor a lui $\bar{0}$ ($\bar{4} \cdot \bar{3} = \bar{0}$). De unde rezultă : $\bar{3} \cdot \bar{4}y = \bar{3} \cdot \bar{4}a + \bar{3} \cdot \bar{5}b$, unde $\bar{3}b = \bar{0}$.

1) b este egal cu $\bar{1}, \bar{3}, \bar{5}$. Sistemul nu admite soluții.

2) $b = \bar{0}$. Aici ecuația (1) se scrie :

$\bar{4}(y - a) = \bar{0}$ și admite soluțiile $y = a$ și $y = a + \bar{3}$.

(S) admite două soluții :

$$\begin{cases} x = a \\ y = a \end{cases} \quad \begin{cases} x = a \\ y = a + \bar{3} \end{cases}$$

3) $b = \bar{2}$. Avem $\bar{4}(y - a - \bar{1}) = \bar{0}$.

Se admit soluțiile :

$$\begin{array}{ll} x = a + \bar{2} & x = a + \bar{2} \\ y = a + \bar{1} & y = a + \bar{4} \end{array}$$

4) $b = \bar{4}$ și avem : $\bar{4}(y - a + \bar{1}) = \bar{0}$

Sistemul (S) admite soluțiile :

$$\begin{cases} x = a + \bar{4} \\ y = a + \bar{5} \end{cases} \quad \begin{cases} x = a + \bar{4} \\ y = a + \bar{2}. \end{cases}$$

INDICAȚII ȘI RĂSPUNSURI

PARTEA I

Cap. 1. Mulțimi

- 1) $\{m; a\}$; 2) $\{t; a\}$; 3) a) adevărat; b) fals; c) fals; d) adevărat;
 4) a) fals; b) fals; c) adevărat; d) fals; 5) a) corect; b) incorect;
 c) incorect; 6) A -vidă; B -mulțime cu un element; 9) $A = \{6; 7; 9\}$; $B = \{6; 7; 10; 11\}$; $C = \{3; 4; 6\}$; 12) $A_1 = \{1; 2; 3; 4; 5\}$; $A_2 = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$; 13) $\{1\}$; $\{1; 2\}$; $\{1; 2; 3\}$; $\{1; 2; 3; 4\}$. 18) a) fals; b) adevărat; c) fals; 21) a) fals; b) adevărat;
 c) fals; 23) a) nu definește; b) definește; c) nu definește; 24) a) fals;
 b) fals; c) adevărat; 25) a) fals; b) adevărat; c) fals; d) adevărat;
 26) a) adevărat; b) adevărat; c) fals; 28) $x = 4$; $y = 5$ sau $x = 5$,
 $y = 4$. 30) a) fals; b) fals; c) fals; d) adevărat; 33) $A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$. 34) $A = \{2; 3; 4; 5; 6; 7\}$. 35) $A = \{1; 2; 3; 4; 5\}$; $B = \{2; 3; 4; 5\}$. 36) a) adevărat; b) fals; c) fals; 37) $X = \{2; 4; 6; 8\}$; $Y = \{1; 3; 5; 7\}$; 38) $A = \{3; 6; 9; 12\}$. 39) $A = \{1; 5; 8\}$. 40) a) fals; b) fals; c) adevărat; 41) a) fals; b) fals; c) adevărat;
 43) $A = \{x \in N / x = 2n + 1; n = 1, 2, 3, 4, 5\}$; $B = \{x \in N / x = 3n + 1; n = 1; 2; 3; 4\}$; 45) $A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.
 47) $A \cap B = \{3; 4\}$; $A \cap C = \{3\}$; $B \cap C = \{3; 6; 7\}$; $A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$; $A \cup C = \{1; 2; 3; 4; 6; 7; 8; 9\}$;
 $B \cup C = \{3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$; 48) $A \cup (B \cap C) = \{0; 1; 2; 3\}$;
 $(A \cup B) \cap (B \cap C) = \{0; 1; 2; 3\}$; 49) $A \cup B = \{x / 1 \leq x \leq 6\}$;
 52) $A \cap B = \{x \in N / 5 \leq x \leq 7\}$; 53) $A \cap B = \{5\}$; 54) $A \cap B = \emptyset$;
 55) $A \cup B = \{4; 5; 6\}$; 56) $A \cup B = \{x \in N / 5 \leq x < 9\}$;
 60) $P \cup Q = N$; $P \cap Q = \emptyset$; 62) $a = 3$; 63) $x = 1$, $y = 4$ sau
 $y = 1$, $x = 4$. 64) $a = 4$; 73) $C_E A = \{5; 6; 7; 8\}$; $C_E B = \{1; 2; 7; 8\}$;
 74) $C_E A = \{9; 10\}$; $C_E B = \{1; 9; 10\}$. 75) $E \cup F = \{1; a; b; c; d; 2; 7\}$;
 $E \cup G = \{1; a; c; d; x; b\}$; $F \cup G = \{a, b, c, d, x, 2, 7\}$;
 $E \cap (F \cup G) = \{a; c; d\}$; $C_E(E \cap G) = \{1; c\}$. 95) Mulțimile sînt disjuncte;
 89) $\text{Card } A \cap B = 10$; 97) $\{123; 132; 213; 231\}$; 115) $A \cap B = \{x \in N; x = 2n + 1; n = 1; 2; 3; 4\}$.
 118) 1) $1)(A \setminus C) \cup (B \setminus C)$; 2) $(A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$; 3) $(A \cap C) \cup (B \cap C)$.

Cap. 2. Baze de numerație

1. a) $(22)_4$; b) $(21)_5$; c) $(22)_3$; 3) a) 13; b) 315; c) 73; 4) a) $(3012)_5$; b) $(12132)_5$; c) $(13000)_5$; 5) 1421; 4312; 3212; 6) $(11010)_4$; $(1551)_6$; 7) a) $(131)_5$; b) $(122)_5$; c) $(1204)_5$; 8) a) $(112)_5$; b) $(134)_5$; 15) a) 11010; b) 101010.

$$19. \frac{N_1}{N_2} =$$

$$= \frac{x \cdot 10^8 + y \cdot 10^7 + z \cdot 10^6 + x \cdot 10^5 + y \cdot 10^4 + z \cdot 10^3 + x \cdot 10^2 + y \cdot 10 + z}{x \cdot 10^5 + y \cdot 10^4 + z \cdot 10^3 + x \cdot 10^2 + y \cdot 10 + z} =$$

$$= \frac{(10^6 + 10^3 + 1)(x \cdot 10^2 + y \cdot 10 + z)}{(10^3 + 1)(x \cdot 10^2 + y \cdot 10 + z)} = \frac{10^6 + 10^3 + 1}{10^3 + 1}$$

Cap. 5. Relații — Funcții

- 1) $(1; 2); (2; 1); (1; 3); (3; 1); (2; 3); (3; 2)$; 2) $x = 1, y = 2$;
 3) a) $x = 2$; b) $x = 4$; c) $x = 4$; 4) a) $a = 2$; $b = 1$; b) $a = 3$; $b = 3$;
 c) $a = 1$; $b \in R$; d) $a = 1$; $b = 5$; 5) $\{(4; a); (4; b); (5; a); (5; b)\}$;
 14) $(A \cup B) \times C = \{(1; 3); (1; 5); (2; 3); (2; 5); (3; 4); (3; 5);$
 $(4; 3); (4; 5)\}$; 16) $\{(1; 2); (1; 4); (1; 5); (5; 2); (5; 4); (7; 2);$
 $(7; 4); (7; 5)\}$; 17) $\{(1; 2); (2; 4)\}$; 20) $\{(1; 1); (4; 2); (9; 3)\}$; 23)
 $\{(2; 1); (4; 3); (5; 4); (6; 5); (7; 6)\}$; 24) $\{(-1; 0); (-1; 1); (-1; 2);$
 $(0; 1); (0; 2); (1; 2)\}$; 27) $\{(12; 2); (12; 3); (25; 5); (8; 2)\}$;
 32) $\{(1; 1); (0; 0); (4; -2); (1; -1)\}$; 33) $\{(1; 2); (2; 1); (1; 0);$
 $(2; 0); (0; 2); (3; 0); (0; 3); (4; 0); (0; 4); (5; 0); (0; 5); (3; 1);$
 $(1; 3); (2; 3); (3; 2); (4; 1); (1; 4)\}$; 39) $\{(431; 4); (332; 3); (235; 2);$
 $(437; 4)\}$; 40) $\{(1; 2); (1; 4); (2; 4); (3; 4)\}$; 41) $\{(1; 2); (1; 4);$
 $(1; 5); (2; 4); (2; 2)\}$; 43) $\{(a; b); (b; c); (c; d)\}$; 44) $\{(1; 1);$
 $(0; 0); (2; 4)\}$; 45) $\{(-1; 1); (-2; 2); (0; 0); (1; 1); (2; 2)\}$; 55).
 Da; 56) Da; 59) $a = 1$; 60) $a = 1$; 64) $f(0) = 0$; $f(4) = 16$; $f(8) =$
 $= 32$; $f(12) = 48$; $g(0) = 1$; $g(4) = 9$; $g(8) = 17$; $g(12) = 25$;
 68) $\{(1; 4); (2; 3); (3; 2)\}$; 69) $f(x) = 5 - x$; $f(1) = 4$; $f(2) = 3$;
 $f(3) = 2$; 75) $A = \{1; 2; 3; 4\}$; $B = \{3; 4; 5; 6\}$; $f(1) = 3$;
 $f(2) = 4$; $f(3) = 5$; 79) b) $(-2; 2)$; c) $(-\infty; 0)$; d) $[-4; 6]$;
 e) $(-10; +\infty)$. 80) $y = [CD]$; $f(A) = C$; $f(B) = D$; $f(Q) =$
 $= Q'$ cu proprietatea $DQ' = Q'C$. 88) $x = -2$; $x = -3$;
 $x = 4$; 90) $y = -5$; $y = 0$; $y = 10$; $y = 15$; 92) $f(0) = -2$;
 $f(-1) = 3$; $f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{4}$; 103) $a = 2$; 104) $a = 1$.

Cap. 7. Probabilități

$$3) P_1 = \frac{2}{5}; P_2 = \frac{1}{5}; P_3 = \frac{1}{5}; 4) \frac{4}{9}; \frac{5}{9}; 5) \frac{1}{4}; 6) \frac{1}{8};$$

$$8) \frac{2}{3}; \frac{1}{3}; 9) \frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 11) \frac{1}{4}; \frac{1}{8}; 14) \frac{1}{6}; 15) \frac{1}{12}; 16) \frac{1}{6};$$

$$18) a) \frac{5}{6}; 19) a) \frac{3}{15}; b) \frac{7}{15}; c) \frac{8}{15}; d) \frac{3}{15}; e) \frac{6}{15}.$$

Cap. 8 — Logică matematică

1) a) Îmi place această carte și îmi place matematica; 3) a) adevărat; b) fals; c) adevărat; 4) a) adevărat; b) adevărat; c) adevărat; d) fals; 5) a) $x = 7$; b) $\forall x \in N$; c) $x \neq 6$; d) $x \neq 7$; e) $x = 2$; f) $x \neq 2$. 7) a) A; b) A; c) F; d) A; e) F; f) F; g) F; h) A; i) A; j) F; k) A; l) F; m) A; 8) a) A; b) A; c) A; d) A; 9) a) A; b) A; 12) a) A; b) A; c) F; 13) a) A; b) F; 14) a) A; b) F; c) F; 20) a) A; b) F; c) F; 21) a) A; b) F; c) F; 24) A; 25) F; 27) A; 28) A; 29) A; 31) A; 35) a) A; b) A; c) A; 39) a) A; b) F; c) A;

Cap. 11. Probleme cu conținut practică

1. Să notăm cu x , numărul de spire căutat. Este evident că numărul spațiilor dintre spire este cu 1 mai mic decât numărul spirelor arcului. Se scrie ecuația:

$$5x + 8(x - 1) = 122,$$

de unde: $x = 10$; rezultă că arcul are 10 spire.

2. Notînd cu x numărul scîndurilor, numărul tăieturilor va fi cu 1 mai mic decât numărul x al scîndurilor.

Rezultă:

$$x = \frac{b + t}{b_1 + t} = \frac{236 \text{ mm} + 4 \text{ mm}}{20 \text{ mm} + 4 \text{ mm}} = 10.$$

3. Trebuie aflate relațiile dintre laturile unui dreptunghi încît suprafața, în cazul unui perimetru $2p$, să devină maximă.

Notînd cu x o latură a dreptunghiului, cealaltă latură nepara-
lelă este egală cu $p - x$.

Suprafața dreptunghiului va fi :

$$A = x(p - x)$$

În consecință A capătă valoarea maximă atunci cînd :

$x = -\frac{p}{2(-1)} = \frac{p}{2}$, adică dreptunghiul cu perimetrul dat $2p$
devine pătrat.

4. Problema duce la inecuația :

$$rx - (dx + s) \geq p,$$

x reprezentînd capacitatea de producție pe an. După rezolvarea
inecuației rezultă :

$$\frac{p + s}{r - d} \leq x$$

În acest caz problema are sens numai dacă $d < r$.

5. Problema duce la inecuația :

$$p \leq \frac{100 - f}{100} x - 0,1 h,$$

unde x reprezintă presiunea căutată pe care apa o primește de
la stația de pompare și care se măsoară în kgf cm^{-2} .
Rezolvînd inecuația obținem :

$$\frac{100 p + 10 h}{100 - f} \leq x$$

6. Suprafața totală a unei șaibe este :

$$A = \frac{\pi}{4} (D^2 - d^2) = \frac{3,14}{4} (5^2 - 2^2) \text{ cm}^2 \approx 15,8 \text{ cm}^2.$$

Notînd cu x suprafața totală a foi din tablă, atunci deșeul repre-
zintă $0,35 x$ și, dacă scădem din suprafața totală a tablei, obținem

suprafața celor 25 de șaibe, care este egală cu :

$$15,8 \text{ cm}^2 \cdot 25 = 395 \text{ cm}^2;$$

$$x - 0,35 x = 395 \text{ cm}^2$$

Rezolvînd ecuația obținem :

$$0,65 x = 395 \text{ cm}^2, \text{ rezultă } x = 610 \text{ cm}^2.$$

7. Înlocuim în ecuația : $\mu = a + bv$
întîi valoarea v_1 , apoi valoarea v_2 și obținem sistemul :

$$\begin{cases} 0,4 = a + 0,1 b \\ 0,5 = a + 0,5 b \end{cases}$$

Prin rezolvarea sistemului, avem soluțiile :

$$a = 0,375$$

$$b = 0,25.$$

8. Problema duce la inecuația :

$$0,2 v_1 x + m \leq v_1 x + (1 - 0,01 f) v.$$

unde x este numărul de plăci de plută căutat.

Rezolvarea inecuației duce la :

$$\frac{100 m - (100 - f)v}{80 v_1} \leq x$$

9. Fie x numărul de elemente ale conductei elevatoare, rezultînd lungimea totală egală cu $8x$. Dacă la aceasta se adaugă lungimea conductei elevatorului de la sol, obținem distanța totală de 350.

Rezultă :

$$8x + 46 = 350$$

$$8x = 304 \Rightarrow x = 38.$$

10. Problema conduce la inecuația :

$$\frac{s}{v + v_1} + \frac{s}{v - v_1} \leq t,$$

unde s este distanța căutată de la chei pînă la mal.

Rezolvînd inecuația în raport cu s obținem :

$$s \leq \frac{t(v^2 - v_1^2)}{2v}.$$

11. Problema conduce la inecuația :

$$\frac{q(100 + p)}{100} + nx < q + (s - x) n,$$

unde x reprezintă distanța de la B la punctul căutat (în km). Ca soluțiile problemei să aibă sens, trebuie să avem relația $0 \leq x$.

Rezultă : $0 \leq x < \frac{100 ns - pq}{200n}.$

12. Să notăm cu x cantitatea de alcool ce trebuie adăugată soluției de iod. Problema conduce la inecuația :

$$0,01 p_1 \leq \frac{0,01 pm}{m + x}$$

Rezultă : $x \leq \frac{m(p - p_1)}{p_1}.$

13. Notăm cu x eroarea care s-a făcut la măsurarea găurii cu ajutorul unui șubler cu fălcile egale (fig. 11.3)

În triunghiul dreptunghic ABC , notăm :

$$d^2 = a^2 + b^2,$$

și luînd în considerație : $d = a + x$, după înlocuire obținem :

$$(a + x)^2 = a^2 + b^2, \text{ de unde: } x_{1,2} = \pm \sqrt{a^2 + b^2} - a.$$

Cum semnul minus dinaintea radicalului nu satisface condiția problemei, rămîne valabilă relația :

$$x = x_1 = \sqrt{a^2 + b^2} - a = \sqrt{15^2 + 6^2} - 15 \approx 1,16 \text{ mm.}$$

Această eroare este inadmisibilă, fiindcă precizia de măsurare a șublerului depășește un milimetru, care pentru diferite produse sînt cuprinse între 0,1 mm pînă la 0,02 mm.

14. Notind cu x distanța dintre marginile tablei și deschizătura acesteia, suprafața deschizăturii va fi :

$$A = (a - 2x)(b - 2x),$$

sau : $4x^2 - 2(a + b)x + (ab - A) = 0$,
de unde :

$$x_{1,2} = \frac{(a+b) \pm \sqrt{(a+b)^2 - 4(ab - A)}}{4}$$

Cum expresia de sub radical este mai mare decât 0, se obține următoarea relație :

$$x_1 = \frac{(a+b) + \sqrt{(a+b)^2 - 4A}}{4} > \frac{a+b}{2} > \frac{b}{2}, \text{ deci}$$

o soluție convenabilă deoarece b este muchia mai scurtă a tablei. După înlocuirea valorilor numerice, obținem :

$$x_1 = \frac{(60+40) - \sqrt{(60-40)^2 + 4 \cdot 1000}}{4} \approx 8,4 \text{ cm.}$$

15. Conform principiului lui Arhimede, forța cu care este împinsă geamandura este : $F = v \cdot \rho \cdot g = m \cdot g$, în care v este volumul părții scufundate a geamandurii.

Volumul este : $V = \frac{\pi}{3} h(r^2 + rR + R^2)$ și după înlocuire rezultă :

$$m = \rho \frac{\pi}{3} h(r^2 + rR + R^2)$$

sau :

$$R^2 + rR + r^2 - \frac{3m}{\pi \cdot \rho \cdot h} = 0,$$

$$\text{rezultând } R_{1,2} = -\frac{r}{2} \pm \sqrt{\frac{3m}{\pi \cdot \rho \cdot h} - \frac{3}{4}r^2}.$$

Semnul minus dinaintea radicalului nu satisface condițiile problemei, deci soluția convenabilă este :

$$R = R_1 = \sqrt{\frac{3m}{\pi \cdot \rho \cdot h} - \frac{3}{4}r^2} - \frac{r}{2}.$$

16. Ținând seamă de raportul dintre diametrul de rostogolire (primitiv) și numărul de dinți al roților dințate, obținem :

$$z_2 d_1 = z_1 d_2.$$

Pe de altă parte avem : $a = \frac{d_1 + d_2}{2}$.

Rezolvând sistemul de ecuații :

$$\begin{cases} z_2 d_1 - z_1 d_2 = 0 \\ d_1 + d_2 = 2a \end{cases}$$

obținem : $d_1 = \frac{2a}{1 + \frac{z_2}{z_1}}$ și $d_2 = \frac{2a}{1 + \frac{z_1}{z_2}}$.

17. Raportul de transmisie $\frac{n_1}{n_2} = i$,

sau exprimînd altfel $\frac{n_1}{n_2} = \frac{z_2}{z_1}$, rezultînd sistemul de ecuații :

$$\begin{cases} \frac{z_2}{z_1} = i \\ z_1 + z_2 = z_0 \end{cases}$$

cu soluțiile : $z_1 = \frac{z_0}{i + 1}$ și $z_2 = \frac{iz_0}{i + 1}$.

Exemplul numeric ; pentru $z_0 = 64$ și $i = 2$ obținem :

$$z_1 = \frac{z_0}{i + 1} = \frac{64}{2 + 1} = 21,33.$$

163. Notăm cu x numărul de piese de 35 kg. Masa fiecărei serii de piese va fi : $35x$ și $42(40-x)$. Ecuația căutată este :

$$35x + 42(40-x) = 1575, x = 15 \text{ buc ;}$$

166. $R = S_2 + r - e = S_1 + r - e$, sau $S_2 - e = S_1 + e$.

Rezultă : $e = \frac{S_2 - S_1}{2}$.

167. Grosimea peretelui o vom nota x , obținem $x + l = L$, sau înlocuind $x + 25 = 37$; $x = 12$ mm.

170. Notăm cu x productivitatea mașinii B și cu y pe cea a mașinii C . Rezultă următorul sistem de inecuații :

$$\begin{cases} \frac{m(p + y)}{100} \leq x \\ \frac{n(p + x)}{100} \leq y. \end{cases} \quad (1)$$

Rezolvînd, obținem :

$$\frac{n(p + x)}{100} \leq y \leq \frac{100x - mp}{m}$$

$$\frac{mp(n + 100)}{10000 - nm} \leq x.$$

$$0 < p, 0 < m, 0 < n \text{ și } mn \leq 10\,000.$$

171. Paratrăznetul trebuie montat astfel încît el să fie egal depărtat de fiecare punct al suprafeței de bază.

Dacă înălțimea paratrăznetului o notăm ca h (în m) obținem inecuația :

$$\frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2} \leq 2h, \text{ sau } \frac{1}{4}\sqrt{a^2 + b^2} \leq h.$$

172. Din figură rezultă : $l'^2 = (R + h)^2 - R^2$ și $l' = l$.

Rezolvînd ecuația obținem : $h_{1,2} = R \pm \sqrt{R^2 + l^2}$ cum înălțimea turnului nu poate fi negativă, avem soluția : $h = h_1 = \sqrt{R^2 + l^2} - R$ sau $h = R \left[\sqrt{1 + \frac{l^2}{R^2}} - 1 \right]$. Raportul $\frac{l^2}{R^2}$ tinde spre 1 și-l vom nota cu α .

Obținem cu aproximație $\sqrt{1 + \alpha} \approx 1 + \frac{\alpha}{2}$. În cazul nostru

$$\alpha = \frac{l^2}{R^2}. \text{ Așadar } h = \frac{l^2}{2R} = \frac{300^2 \text{ km}^2}{2 \cdot 6368 \text{ km}}.$$

173. Fie $AB = 156$ mm. Să determinăm domeniul admisibil pentru lungimile de șină cînd pentru arcu \widehat{ADB} trebuie să avem

$MD \geq 600$ m. În $\triangle AMC$ conform teoremei lui Pitagora avem $(r - \overline{CD})^2 + (78)^2 = r^2$ și deoarece $MC = r - CD$ și $AC = \frac{AB}{2} = 78$, rezultă :

$$\frac{CD^2 + 6084 \text{ m}^2}{2 CD} = r(1)$$

Dacă înlocuim în (1) valoarea dată $600 \leq r$, obținem :

$$600 \leq \frac{CD^2 + 6084 \text{ m}^2}{2CD}, \text{ conducînd la :}$$

$$CD^2 - 1200 CD + 6084 \geq 0.$$

Rezolvînd această inecuație vor rezulta două domenii de valabilitate și anume $1194,9 \text{ m} \leq CD \leq 5,1 \text{ m}$. În sensul geometric urmează că $0 < CD$ și deoarece din datele problemei trebuie să

avem $\widehat{AMB} < 180^\circ$ reiese că $CD < R$.

Deci, domeniul valorilor admisibile pentru CD se reprezintă prin intervalul $0 < CD < 5,1 \text{ m}$.

Exemplu numeric. Fie $CD = 4 \text{ m}$. Ecuația (1) dă :

$$r = \frac{16 + 6084}{8} = 762,5 \text{ m} > 600 \text{ m}.$$

174. Raportul dintre masa discului și masa corpului se poate exprima prin raportarea ariei secțiunii transversale a găurii la aria secțiunii transversale a corpului. Din datele problemei se vede că în ambele cazuri este vorba despre cilindri cu raze diferite. De aceea, raportul secțiunii transversale ale cilindrilor, se indică tot prin pătratul razelor. Problema conduce la examinarea raportului în care se află raza r a unui cerc înscris într-un triunghi și raza R a cercului circumscris aceluiași triunghi :

$$\frac{r}{R} \leq \frac{1}{2}. \quad (1)$$

Pentru efectuarea demonstrației inecuația (1) trece printr-un șir de transformări. Deoarece :

$R = \frac{abc}{4A}$ și $r = \frac{A}{p}$, inecuația poate fi transformată astfel :

$$\frac{2A}{p} \leq \frac{abc}{4A} \quad (2)$$

dar cum $0 < p$ și $0 < A$, rezultă :

$$8A^2 \leq pabc \quad (3)$$

$$\text{sau : } 8p(p-a)(p-b)(p-c) \leq pabc \quad (4)$$

$$\text{sau : } 8(p-a)(p-b)(p-c) \leq abc \quad (5)$$

$$\text{sau : } (2p-2a)(2p-2b)(2p-2c) \leq abc \quad (6)$$

$$(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c) \leq abc. \quad (7)$$

Ridicînd inecuația (7) la pătrat vom avea :

$$(b+c-a)^2(a+c-b)^2(a+b-c)^2 \leq a^2b^2c^2, \quad (8)$$

$$b+(c-a)b-(c-a)c+(a-b)c-(a-b)a+(b-c)a-(b-c) \leq a^2b^2c^2 \quad (9)$$

sau :

$$[b^2-(c-a)^2][a^2-(b-c)^2][c^2-(a-b)^2] \leq a^2b^2c^2. \quad (10)$$

Inecuația (10) este valabilă deoarece :

$$a^2 - (b-c)^2 \leq a^2$$

$$b^2 - (c-a)^2 \leq b^2$$

$$c^2 - (a-b)^2 \leq c^2.$$

Rezultă că și inecuația (1) trebuie să fie valabilă.

Așadar, vom avea :

$$\frac{r}{R} \leq \frac{1}{2} \text{ și } \frac{r^2}{R^2} \leq \frac{1}{4}; \quad \frac{r^2}{R^2} \leq 25 \text{ \%}.$$

175. Vom nota cu x și y lungimea și lățimea materialului din care vom confecționa abajurul. Avem :

$$0 < MA < AB \text{ și } 0 < \frac{MA}{AB} < 1.$$

Evident avem : $A_1B_1 \leq x$, $A_1D_1 \leq y$ (1) unde $A_1B_1C_1D_1$ este un dreptunghi. A_1B_1 se poate calcula astfel :

$$A_1B_1 = 2MA \sin \frac{\alpha}{2}, \quad (2)$$

$$\text{sau } MA \cdot \alpha = \pi D; \quad (MA - 1) \alpha = \pi d \quad (3)$$

$$\text{unde } \alpha = \frac{D-d}{1} \pi \quad (4) \text{ și } MA = \frac{Dl}{D-d}.$$

Din (2), (4) și (5) rezultă :

$$A_1B_1 = \frac{2Dl}{D-d} \sin \frac{D-d}{2l} \pi \quad (6)$$

Mai departe : $A_1D_1 = ME - MK$ (ME este bisectoarea unghiului α) și $MK = MD \cos \frac{\alpha}{2} = (MA - l) \cos \frac{\alpha}{2}$,
dar : $ME = MA$.

$$\text{De aici : } A_1D_1 = MA - (MA - l) \cos \frac{\alpha}{2}. \quad (7)$$

Din (5), (6), (7) rezultă :

$$A_1D_1 = \frac{l}{D-d} \cos \frac{D-d}{2l} \pi \quad (8)$$

Din (1), (6), (8) se obține

$$\frac{2Dl}{D-d} \sin \frac{D-d}{2l} \pi \leq x$$

$$\frac{l}{D-d} \cos \frac{D-d}{2l} \pi \leq y.$$

176. Notăm cu x numărul tone de oțel cu 20% nichel și y numărul de tone oțel cu 40% nichel. Obținem sistemul de inecuații :

$$\begin{cases} \frac{0,2x + 0,4y}{x + y} \geq 0,25 \\ \frac{0,2x + 0,4y}{x + y} \leq 0,30. \end{cases}$$

Rezolvând obținem : $\frac{1}{3} x \leq y \leq x$, unde $0 \leq x \leq \infty$.

PARTEA A II-A

Cap. 13 Logica matematică

4. Folosind formulele lui De Morgan obținem :

$$\bar{x} \vee (\bar{y} \wedge \bar{z}) \Rightarrow (y \vee \bar{z})$$

$$\bar{x} \vee (\bar{y} \vee z) \Rightarrow (y \vee \bar{z}) \Leftrightarrow \overline{\bar{x} \vee (\bar{y} \vee z)} \vee (y \vee \bar{z}) \Leftrightarrow$$

$$x \wedge (\bar{y} \vee z) \vee (y \vee \bar{z}) \Leftrightarrow (x \wedge y \wedge \bar{z}) \vee (y \vee \bar{z})$$

7. A ; 11. A ; 12. a) F ; b) A ; c) F ; 13. a) A ; b) A ; c) A ;

d) A. 17. $S(x, y) \wedge Q(x, y)$ 18. a) F ; b) F ; c) F.

19. $P(x, y) = S(x, y) \wedge Q(x, y)$ 26. $(a \wedge b) \vee (c \wedge d) \vee (g \wedge h)$

27. $a \vee [(b \vee c \vee d) \wedge e]$.

Cap. 14. Mulțimi

2. a) Un număr întreg oarecare are una din formele :

$3m, 3m + 1, 3m + 2$, unde m ia valori : $0, 1, 2, 3, \dots$

Dacă facem $n = 0$ în relația $3m + 5n$ se obține $x = 3m$ și deci toate numerele de această formă (multiplii lui 3), astfel încât $m \in \{0, 1, 2, 3, \dots\}$, sînt în mulțimea A . Dacă $n = 1$ atunci : $x = 3m + 5 = 3(m + 1) + 2$; m ia toate valorile $0, 1, 2, 3, \dots$ și rezultă că $m + 1 \neq 0$ și $x \neq 2$, deci $2 \notin A$. Dacă $n = 2$ atunci $x = 3m + 10 = 3(m + 3) + 1$ și cum $m + 3$ nu poate lua valorile $0, 1, 2$, rezultă că $1 \notin A$ și $4 \notin A, 7 \notin A$. Deci mulțimea $O = \{1, 2, 4, 7\}$

b) Un număr întreg oarecare nenegativ are una din formele : $4k; 4k + 1; 4k + 2; 4k + 3$; unde $k \in \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ adică :

$4k$	0	4	8	12	16	20	24	...
$4k+1$	1	5	9	13	17	21	25	...
$4k+2$	2	6	10	14	18	22	26	...
$4k+3$	3	7	11	15	19	23	27	...

Trebuie să găsim în tabloul de mai sus care sînt numerele care aparțin lui B .

În relația $x = 4m + 7n$, dacă $n = 0$, se obține $x = 4m$ adică numerele din prima linie a acestui tablou, deci numerele care figurează în B . Dacă $n = 2$, atunci $x = 4m + 14$ se obțin numerele din a treia linie a tabloului în afară de 2, 6, 10. Dacă $n = 3$, atunci $x = 4m + 21$ și cînd m ia valorile $0, 1, 2, \dots$ se obțin pentru valorile 21, 25, 29 ... adică numerele din a doua linie a tabloului în afară de 1, 5, 9, 13, 17. Deci mulțimea :

$$D = \{1, 2, 3, 5, 6, 9, 10, 13, 17\}$$

3. Elementele mulțimii X se găsesc în mulțimea $\{1, 2, 3, 4\}$.

Din condiția $\{1, 3\} \subset X$ rezultă că $1 \in X$ și $3 \in X$; Dar $2 \notin X$ dacă $2 \in X$ și cum $X \subset \{1, 3, 5\}$ ar rezulta că : $2 \in \{1, 3, 5\}$ ceea ce este evident fals. În același mod se arată că $4 \notin X$ și deci $X = \{1, 3\}$.

4. Dacă $\{1, 2, 3\}$ și $\{2, 3, 7\}$ sînt submulțimi ale lui X atunci rezultă că $\{1, 2, 3\} \cup \{2, 3, 7\}$ este o submulțime a lui X sau $\{1, 2, 3, 7\} \subset X$. Dar $C \times C \subset \{1, 2, 3, 7\}$ și prin urmare $X = \{1, 2, 3, 7\}$.

5. $A = \{2, 3\}$ $B = \{2, 4\}$ $C = \{6, 1\}$.

6. B este o parte nevidă a lui A , deoarece pentru $n = 1$ se obține $x = 2 \in B$. Se poate ușor arăta că $A \subset B$. Trebuie să verificăm că oricare ar fi numărul natural n avem :

$$2 \leq \frac{3n^2 + 1}{n^2 + n} \leq 3$$

$$2 \leq \frac{3n^2 + 1}{n^2 + n} \Leftrightarrow 2n^2 + 2n \leq 3n^2 + 1 \Leftrightarrow n^2 - 2n +$$

$$+ 1 \geq 0 \Leftrightarrow (n - 1)^2 \geq 0;$$

$$\frac{3n^2 + 1}{n^2 + n} = \frac{3(n^2 + n) - 3n + 1}{n^2 + n} = 3 - \frac{3n - 1}{n^2 + n} < 3.$$

Din relațiile $A \subset B$ și $B \subset A$ deducem $A = B$.

7. Dacă $1 \in A$ conform condiției (c) există $y \in B$; $y \in A \cup B$ astfel încât $1 - y = 1 \Leftrightarrow y = 0$. Dar $0 \notin B$ și prin urmare $1 \notin A$. Ținând seama de condiția (a) rezultă că $1 \in B$. Se demonstrează în același mod următoarele relații: $3 \in A$; $4 \in A$; $4 \notin B$; $5 \notin A$; $5 \in B$; $6 \in A$; $6 \notin B$.

Se obține în final: $A = \{2; 4; 6\}$; $B = \{1, 2, 5\}$.

8. Din condițiile problemei se obține: $1 \in A$; $1 \in B$; $2 \in A$; $2 \in B$; $5 \in A$; $5 \notin B$; Dacă $3 \in A$, atunci $3 \notin B$ și deci $3 \in A - B$, ceea ce este fals. Prin urmare $3 \in B$ și $3 \notin A$. În același mod se pot arăta că 4, 6, 7, aparțin deasemeni lui B .

Deci: $A = \{1; 2; 5\}$ $B = \{1; 2; 3; 4; 5; 7\}$

9. Avem: $\{1; 2\} \triangle X = \{1; 2; 3\} \Rightarrow \{1, 2\} \triangle (\{1; 2\} \triangle X) = \{1; 2\} \triangle \{1; 2; 3\} \Rightarrow (\{1; 2\} \triangle \{1, 2\}) \triangle X = \emptyset \cup \{3\} \Rightarrow \emptyset \triangle X = \{3\} \Rightarrow X = \{3\}$.

Evident $X = \{3\}$ verifică ecuația $\{1; 2\} \triangle X = \{1; 2; 3\}$. Avem $A \triangle X = B \Rightarrow A \triangle (A \triangle X) = A \triangle B \Rightarrow (A \triangle A) \triangle X = A \triangle B \Rightarrow X = A \triangle B$; $X = A \triangle B \Rightarrow A \triangle X = A \triangle (A \triangle B) \Rightarrow A \triangle X = (A \triangle A) \triangle B \Rightarrow A \triangle X = \emptyset \triangle B \Rightarrow A \triangle X = B$ și deci $A \triangle X = B \Leftrightarrow X = A \triangle B$.

10. a) Se aplică distributivitatea intersecției față de reuniunea și se obține: $(A \cap \bar{A}) \cup (A \cap B) = \emptyset \cup (A \cap B) = A \cap B$

b) $A \cap (B \setminus A) = A \cap (B \cap \bar{A}) = (A \cap \bar{A}) \cap B = \emptyset \cap B = \emptyset$

c) $(A \cup B) \cap \bar{C} = (A \cap \bar{C}) \cup (B \cap \bar{C}) = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$

d) $A \setminus (B \cup C) = A \cap (\overline{B \cup C}) = A \cap (\bar{B} \cap \bar{C}) = (A \cap \bar{B}) \cap \bar{C} = (A \setminus B) \setminus C$.

11. a) Dacă $x \in A \cup B$ atunci ($x \in A$ sau $x \in B$) și $x \in C$ adică ($x \in A$ și $x \in C$) sau ($x \in B$ și $x \in C$). Prin urmare dacă propoziția $A \cup B \subseteq C$ este adevărată propoziția $A \subseteq C$ și $B \subseteq C$.

b) Dacă $A \cap B \subseteq C$ și $x \in A$. Să considerăm două cazuri: $x \in \bar{B}$ sau $x \in B$. Dacă $x \in \bar{B}$ atunci $x \in A \cap \bar{B} \subseteq C$ și prin urmare $x \in \bar{B} \cup C$. Dacă $x \in B$ atunci: $x \in B \cup C$ și rezultă că $x \in C$;

c) Fie $(A \setminus B) \cup B = A$ și $x \in B$. Atunci este adevărat că $x \in A$. Fie $B \subseteq A$. Atunci $(A \setminus B) \cup B = (A \cup B) \cup B = (A \cup B) \cap (\bar{B} \cup B) = A$.

d) $(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C)$. Dacă $C \subseteq A \cap (B \cup C)$ rezultă că $C \subseteq A$. Fie $C \subseteq A$. Atunci $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C) = A \cap (B \cup C)$.

12. Fie $x \in A \cap (B \triangle C)$. Atunci $x \in A$ și $x \in B \triangle C$. De unde rezultă că dacă $x \in B$, atunci $x \notin C$ ceea ce înseamnă că $x \in A \cap B$. Dar $x \notin A \cap C$. Dacă $x \in C$, atunci $x \notin B$. Înseamnă că $x \in (A \cap C)$. Dar $x \notin (A \cap B)$, în felul acesta $x \in (A \cap B) \triangle (A \cap C)$ și astfel: $A \cap (B \triangle C) \subseteq (A \cap B) \triangle (A \cap C)$. Fie $x \in (A \cap B) \triangle (A \cap C)$. Dacă $x \in A \cap B$ și $x \notin A \cap C$, atunci $x \in A$, $x \in B$, $x \notin C$. Rezultă că $x \in A \cap (B \triangle C)$. Dacă $x \in A \cap C$ și $x \notin A \cap B$ atunci, $x \in A$; $x \in C$; $x \notin B$. Înseamnă că $x \in A \cap (B \triangle C)$ și astfel $(A \cap B) \triangle (A \cap C) \subseteq A \cap (B \triangle C)$.

13. a) $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cap \bar{B}) \cup (B \cap \bar{A}) = (B \cap \bar{A}) \cup (A \cap \bar{B}) = (B \setminus A) \cup (A \setminus B) = (B \triangle A)$;

b) Dacă $x \in A \triangle (B \triangle C)$ atunci ($x \in A$ și $x \notin B \triangle C$) sau ($x \in B \triangle C$ și $x \notin A$). Dacă ($x \in B \triangle C$ și $x \notin A$) atunci ($x \in B$ și $x \notin C$) sau $[(x \in C \text{ și } x \notin B)]$ și $x \notin A$. Prin urmare: $[(x \in B \text{ și } x \notin C) \text{ sau } x \in C]$. Din relația $(A \triangle B) \triangle C = [(A \triangle B) \setminus C] \cup [C \setminus (A \triangle B)]$, rezultă că: $x \in (A \triangle B) \triangle C$; dacă și numai dacă $x \in (A \triangle B) \setminus C$ sau $x \in C \setminus (A \triangle B)$; Din aceste relații deducem; $x \in A$ și $x \notin B$ și $x \notin C$ sau $x \in B$ și $x \notin A$ și $x \notin C$. Avem $x \in C \setminus (A \triangle B)$ dacă și numai dacă $x \in C$ și $x \notin A \triangle B$. Rezultă că $x \in C \setminus (A \triangle B)$ dacă și numai dacă ($x \in C$ și $x \in A$ și $x \in B$) sau $x \in C$, $x \notin A$ și $x \notin B$). Prin urmare $x \in A \triangle (B \triangle C)$ dacă și numai dacă x aparține tuturor celor trei mulțimi sau aparține unei mulțimi și nu aparține celorlalte două. Se arată urmărind aceeași cale că $x \in A \triangle (B \triangle C)$, dacă x aparține celor trei mulțimi sau aparține unei mulțimi și nu aparține celorlalte două.

c) Demonstrația se poate face urmînd un procedeu analog cu cel de la punctul (b) sau folosind proprietățile operațiilor cu mulțimi după cum urmează: $A \cap (B \triangle C) = A \cap [(B \cap \bar{C}) \cup (\bar{B} \cap C)] = (A \cap B \cap \bar{C}) \cup (A \cap \bar{B} \cap C)$; $(A \cap B) \triangle (A \cap C) = [(A \cap B) \cap (\overline{A \cap C})] \cup \cup [(\overline{A \cap B}) \cap (A \cap C)] = [A \cap B \cap (\bar{A} \cup \bar{C})] \cup [(\bar{A} \cup \bar{B}) \cap (A \cap C)] = (A \cap B \cap \bar{C}) \cup (A \cap \bar{B} \cap C)$.

$$d) A \Delta (A \Delta B) = (A \Delta A) \Delta B = B.$$

$$14. a) (\bar{A} \cap B) \cup (\bar{B} \cap A) = \emptyset \Rightarrow (\bar{A} \cap B = \emptyset) \wedge (\bar{B} \cap A = \emptyset) \Rightarrow A = B. \text{ Reciproc dacă } A = B \Rightarrow (\bar{A} \cap A) \cup (\bar{B} \cap B) = \emptyset.$$

$$b) \text{ Fie } A \Delta B = C. \text{ Atunci } B \Delta C = B \Delta (A \Delta B) = B \Delta (B \Delta A) = A.$$

15. Din condițiile problemei deducem: $B \subseteq X \subseteq \bar{A} \cup B$ și $C \cap (\bar{A}) \subseteq X \subseteq C$. De unde rezultă că: $B \cap (C \cap \bar{A}) \subseteq X \subseteq (\bar{A} \cup B) \cap C = (\bar{A} \cap C) \cup (B \cap C) = (\bar{A} \cap C) \cup B$. Se poate ușor arăta că $X = (C \setminus A) \cup B$ verifică sistemul dat.

$$16. \begin{cases} \bar{A} \cap X = B \\ X \cap \bar{A} = C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \bar{A} \cup X = \bar{B} \\ X \cap \bar{A} = C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A \cap (\bar{A} \cup X) = (A \cap B) \\ X \cap A = C \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A \cap X = A \cap \bar{B} \\ \bar{A} \cap X = C \end{cases} \Leftrightarrow X = (A \cap \bar{B}) \cup C$$

18. Să notăm prin f, g, h funcțiile caracteristice ale mulțimilor E, F și G . Folosind rezultatele de la exercițiul precedent obținem: $[f(x) \cdot g(x)] \cdot h(x) = f(x) \cdot [g(x) \cdot h(x)]$.

Avem: $(f(x) + g(x)) \cdot h(x) = g(x) \cdot h(x) + f(x) \cdot h(x)$.

19. $\{4; 5\} \times \{2; 4\} \subset A \times B \Leftrightarrow [\{4; 5\} \subset A] \text{ și } \{2; 4\} \subset B$.
 Din $A = \{1, 2, 3, x, y\}$ și $\{4; 5\} \subset A$ rezultă că:
 $x = 4, y = 5$, sau $x = 5$ și $y = 4$. Din $B = \{5; 6; x; z\}$
 și $\{2; 4\} \subset B$, rezultă că $x = 4$ și $z = 2$ sau $x = 2, z = 4$.
 Din aceste relații se deduce că:

$$x = 4, y = 5, z = 2.$$

$$31. \frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3} \Rightarrow \frac{x^2}{1} = \frac{y^2}{4} = \frac{z^2}{9} = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{14} = \frac{14}{14} = 1.$$

Se găsește $x = \pm 1, y = \pm 2, z = \pm 3$.

35. Din $x^5 y^3 = 81$ rezultă $xy > 0$ și deci x, y au același semn. Din ecuația a doua rezultă că $x > 0, y > 0$. Vom avea $x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot y \cdot y \cdot y = 81$, $x + x + x + x + x + y + y + y = \frac{27}{2}$, sau

$$\sqrt[8]{x^5 y^3} \leq \frac{5x + 3y}{8} = \frac{27}{16}, \text{ sau } \sqrt[3]{3} < \frac{27}{16} = 1,69.$$

$$38. C_E A \cap C_E B = C_E (A \cup B) = \{7\}. \text{ Se deduce:}$$

$$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}; A = \{2, 4, 6, 8\}.$$

$$39. \frac{x^2 - 9}{x^2 - 6x + 9} = \frac{x+3}{x-3} = \frac{x-3+6}{x-3} = 1 + \frac{6}{x-3}$$

$$x - 3 = \pm 1; x - 3 = \pm 2; x - 3 = \pm 3; x - 3 = \pm 6.$$

44. Dreptele de ecuație $x = -1, y = 0, y = \frac{1}{2}, y = 2$, împart planul în opt regiuni. În regiunea I-a: $x \leq -1, y \leq 2$, soluția $x = y = \frac{1}{2}$ nu convine. În regiunea II-a $x > -1, y > 2$, soluția $x = y = \frac{1}{2}$ nu convine. În regiunea III-a $x \leq -1, \frac{1}{2} y \leq 2$.

Soluția $x - y = \frac{1}{2}$ nu convine, ș.a.m.d. Se găsește că singura soluție este $x = y = -1$, prin urmare $A = \{-1, -1\}$.

$$45. 20k' - 4 = 796 - 20k \Leftrightarrow 20(k+k') = 800, \text{ sau } k + k' = 40; k = 1; k' = 39; k = 2, k' = 38; \dots$$

$$\text{Avem } x = 20 - 4 = 16; x = 796 - 780 = 16 \text{ ș.a.m.d.}$$

$$46. x^2 - xy - 3x + 3y = 1 \Leftrightarrow x(x-y) - 3(x-y) = 1 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (x-y)(x-3) = 1 \Leftrightarrow x = 4, y = 3.$$

$$xy - 2x - 3y + 6 = 1 \Leftrightarrow x(y-2) - 3(y-2) = 1 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (y-2)(x-3) = 1, x = 4, y = 2.$$

$$50. (x, y) \in A \Leftrightarrow 9x + 10y : 3 \Leftrightarrow [(6x + 7y) + (3x + 3y)] : 3 \Rightarrow \\ \Rightarrow 6x + 7y : 3 \Rightarrow (x, y) \in B. \text{ În mod analog se arată că dacă } (x, y) \in B, \text{ atunci } (x, y) \in A.$$

$$51. (x-1)(4x^2 - 4xy + y^2) = 0 \Leftrightarrow (x-1)(2x-y)^2 = 0, \\ x = 1, y = 2.$$

$$52. x^5 - xy^2 + y^2 - 1 = (x^5 - 1) - y^2(x-1) = \\ = (x-1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 - y^2) = 0;$$

$$4x^4 + 4x^3 + 4x + 4 = 4y \Leftrightarrow (2x^2 + x)^2 + 3x^2 + x + 4 = 4y^2$$

$$4y^2 > (2x^2 + x)^2. \text{ Se găsește: } 2y = (2x^2 + x + 1);$$

$$x_1 = -1; x = 3.$$

$$53. x^2 - 2xy + y^2 + y^2 - 2yz + z^2 + z^2 - 6z + 9 = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - 3)^2 = 0.$$

$$54. (x^2 - m^2)^2 + (x + m)^2 + 2 = 0, \text{ imposibil}$$

$$55. x^5 + 5 = 4xq'; x^5 + 4 = 5xq''; q', q'' \in \mathbb{Z}.$$

Scăzînd cele două egalităţi se obţine :

$$1 = x(4q' - 5q''). \text{ Rezultă } x = 1, 4q' - 5q'' = 1.$$

$$56. 6x^2 - 4xy - 9xy + 6y^2 = 19 \Leftrightarrow (3x - 2y)(2x - 3) = \\ = 19 \Leftrightarrow x = \pm 7; y = \pm 11.$$

57. Inecuaţia este echivalentă cu sistemul :

$$\frac{x-1}{x-4} > 0, \frac{x-2}{x-3} > 0; \frac{x-2}{x-3} > \frac{x-1}{x-4}, \text{ sistem care con-} \\ \text{duce la cercetarea semnului funcţiilor } f_1 = \frac{x-1}{x-4} \text{ şi } f_2 = \\ = \frac{5-2x}{(x-3)(x-4)}. \text{ Se găseşte } A = (-\infty, 1).$$

$$58. x - 2y = 0; x + 3 = 0; x = -3.$$

Cap. 15. Relaţii

3. Dreapta dusă prin punctul O întâlneşte cercul în două puncte. Aceste puncte au o singură imagine şi deci putem spune că este o funcţie. Dacă punctul O este interior cercului atunci avem o *aplicaţie*. Această aplicaţie nu este nici surjectivă şi nici injectivă. Există două puncte invariante care se confundă cu imaginile lor.

4. a) aplicaţie; b) bijectivă; c) A este imaginea mijlocului BC ; d) Imaginea este un punct care împarte latura AC în acelaşi raport;

7. Este o aplicaţie bijectivă şi $f^{-1} = f$

8. Aplicaţie bijectivă: $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}^{-1}$

9. Aplicație bijectivă : $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}^{-1}$

11. $f: A \rightarrow B$; $g: B \rightarrow C$; $h: C \rightarrow D$;

$$y = f(x); z = g(y); t = h(z)$$

Trebuie să studiem $h \circ (g \circ f)(x)$ și $((h \circ g) \circ f)(x)$ Aplicând definiția compunerii aplicațiilor avem :

$$h \circ (g \circ f)(x) = h(z); (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(y) = z$$

$$(h \circ (g \circ f))(x) = h((g \circ f)(x))$$

$$((h \circ g) \circ f)(x) = ((h \circ g)f(x)) = (h \circ g)(y) = h(g(y)) = h(z)$$

Cele două elemente a lui D sînt egale oricare ar fi x , prin urmare funcțiile sînt egale.

$$63. f(x_1) - f(x_2) = (x_1 - x_2)[(x_1^2 - 5x_1 + 6) + (x_2^2 - 5x_2 + 4) + x_1x_2].$$

64. Valorile lui a și b se determină din ecuațiile $a + b = 1$ și $2a + b = 4$. Se deduce că $y = 3x - 2$ este corespunzătoare pe $(1, 2)$ și f este monoton crescătoare. Mai departe f este injectivă, ceea ce rezultă din monotonie. Se verifică ușor că este și surjectivă.

65. Se notează : $u(x) = \left(\frac{3x}{5} + \frac{\pi}{6}\right)$, de unde rezultă că $-\frac{10\pi}{9} \leq x \leq \frac{5\pi}{9}$. Funcția $u(x)$ este crescătoare pe intervalul

$\left[-\frac{10\pi}{9}, \frac{5\pi}{9}\right]$, iar mulțimea valorilor ei este $[-2, 2]$ și, prin urmare,

funcția $y = a^{2 \sin \left(\frac{3x}{5} + \frac{\pi}{6}\right)}$ este bijectivă și, deci, inversabilă.

Se găsește apoi $f \circ f^{-1} = x$.

Cap. 16. Legile compoziției interne

1. Nu; $4 * 5 = 10$; 2. Da;

$$4. 3 \theta 5 = 3^5; 6. a \theta (b \theta c) = \frac{a + \frac{b+c}{2}}{2} = \frac{2a + b + c}{4}$$

$$(a \theta b) \theta c = \frac{\frac{a+b}{2} + c}{2} = \frac{a + b + 2c}{4}$$

11. a) necomutativă; b) comutativă; c) comutativă;
d) necomutativă; e) comutativă.

18. b) $x^2 + 9 + 3x = 10$; $x \in \left(\frac{-3 - \sqrt{13}}{2}, \frac{-3 + \sqrt{13}}{2} \right)$

Cap. 17. Structuri algebrice — calcul vectorial

29. $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{2 + \sqrt{2}}$;

30. a) vectorii \vec{a} și \vec{b} trebuie să fie perpendiculari;

b) unghiul format de vectorii \vec{a} și \vec{b} trebuie să fie ascuțit;

c) unghiul format de vectorii \vec{a} și \vec{b} trebuie să fie obtuz;

31. Vectorul \vec{b} este de trei ori mai lung decât \vec{a} .

Ei sînt orientați în sensul contrar;

32. $\alpha = 4$; $\beta = -1$;

33. Vectorul \overrightarrow{AB} este de două ori mai lung decât \overrightarrow{CD} și sînt de același sens.

35. $\vec{c} = \{-3; 15; 12\}$;

36. $\alpha = \pm 1$;

38. 0;

45. $\overrightarrow{AB} = \frac{\vec{a} - \vec{b}}{2}$; $\overrightarrow{BC} = \frac{\vec{a} + \vec{c}}{2}$; $\overrightarrow{CD} = \frac{\vec{b} - \vec{a}}{2}$; $\overrightarrow{DA} = \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2}$;

46. $\overrightarrow{AB} = \frac{\lambda \vec{a} - \vec{b}}{1 + \lambda}$; $\overrightarrow{BC} = \frac{\vec{a} + \vec{b}}{1 + \lambda}$; $\overrightarrow{CD} = \frac{\lambda \vec{b} - \vec{a}}{1 + \lambda}$; $\overrightarrow{DA} = -\frac{\lambda(\vec{a} + \vec{b})}{1 + \lambda}$;

49. $\overrightarrow{EF} = \frac{\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}}{2}$

$$50. \overrightarrow{MM'} = \frac{\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'}}{3}$$

$$51. \overrightarrow{AB} = \{1; 0\}; \overrightarrow{BC} = \{-1; 1\}; \overrightarrow{CD} = \{-2; 1\}; \overrightarrow{DE} = \{-1; +0\}; \overrightarrow{EF} = \{1; -1\}; \overrightarrow{FA} = \{2; -1\}.$$

$$52. \overrightarrow{AB} = \{0, 1\}; \overrightarrow{BC} = \{\lambda; 0\}; \overrightarrow{CD} = \{1 - \lambda, -1\}; \\ \overrightarrow{DA} = \{-1, 0\}; \overrightarrow{AC} = \{\lambda; 1\}; \overrightarrow{BD} = \{1; -1\};$$

$$54. \overrightarrow{AB} = \{-1, 1, 0\}; \overrightarrow{BC} = \{0, -1, 1\}; \overrightarrow{CA} = \{1, 0, -1\}, \\ \overrightarrow{DE} = \left\{ -\frac{1}{2}; \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\};$$

$$57. \vec{r}_4 = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 + \vec{r}_3;$$

$$59. \overrightarrow{AD} = \frac{\overrightarrow{AB}|\overrightarrow{AC}| + \overrightarrow{AC}|\overrightarrow{AB}|}{|\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{AC}|}$$

$$61. \text{Avem: } \overrightarrow{PA} = \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OA}; \overrightarrow{PB} = \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OB};$$

$$\overrightarrow{PC} = \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OC}; \overrightarrow{PD} = \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OD}. \text{ Adunăm membru cu membru aceste egalități și obținem: } \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD} =$$

$$= 4\overrightarrow{PO} + (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) + (\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$$

Dacă notăm cu M și N mijloacele coardelor AB și CD obținem:

$$2\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}; 2\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} \text{ și prin urmare avem:}$$

$$\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD} = 4\overrightarrow{PO} + 2\overrightarrow{OM} + 2\overrightarrow{ON} = 4\overrightarrow{PO} + 2\overrightarrow{OP} = 2\overrightarrow{PO}.$$

$$62. -\frac{3}{2}; 63.0; 64. \text{ Din relațiile evidente } \overrightarrow{PA} = \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BA}$$

$$\text{și } \overrightarrow{PC} = \overrightarrow{PD} + \overrightarrow{DC} \text{ se obține: } \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PC} = (\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{CD})(\overrightarrow{PD} - \overrightarrow{CD}) = \\ = \overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{PD} + \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{PD} - \overrightarrow{CD}^2 - \overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{PD} + \\ + \overrightarrow{CD}(\overrightarrow{PD} - \overrightarrow{PB}) - \overrightarrow{CD}^2 = \overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{PD} + \overrightarrow{CD}^2 - \overrightarrow{CD}^2 = \overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{PD}.$$

65. Din ipoteză avem: $\vec{b} = \vec{x} + \vec{y} = \lambda \vec{a} + \vec{y}$. Dacă în mulțime ambii membri ai egalității date scalar cu vectorul \vec{a} obținem:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \lambda \vec{a}^2 + \vec{a} \cdot \vec{y} = \lambda \vec{a}^2 \Leftrightarrow \lambda = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{a^2}.$$

Prin urmare avem: $x = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{a^2} \cdot \vec{a}$; $y = \vec{b} - \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{a^2} \cdot \vec{a}$.

$$66. x = \frac{(\vec{b} \cdot \vec{b}) \vec{a} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{b}}{a^2 b^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2};$$

70. Un paralelogram $ABCD$ avem: $\vec{DB} = \vec{DA} + \vec{AB}$;

$\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC}$. De unde rezultă egalitățile:

$$\vec{DB}^2 = \vec{DA}^2 + \vec{AB}^2 + 2\vec{DA} \cdot \vec{AB}; \vec{AC}^2 = \vec{AB}^2 + \vec{DA}^2 - 2\vec{DA} \cdot \vec{AB} \text{ sau } \vec{DB}^2 + \vec{AC}^2 = 2(\vec{AD}^2 + \vec{AB}^2).$$

71. În triunghiul ABC ($A = 90^\circ$) ducem $AD \perp BC$ și avem:

$$\vec{CD} = \vec{CA} + \vec{AD} = \vec{CB} \cdot \vec{CA} \text{ sau } \vec{CB} \cdot \vec{CD} = (\vec{CA} + \vec{AB}) \cdot \vec{CA} = \vec{CA}^2 \text{ sau } \vec{CA}^2 = \vec{CB} \cdot \vec{CD} = CB \cdot CD.$$

72. Ducem perpendiculara în D pe SD care taie cercul în A' . În triunghiul SDA' avem: $\vec{SD} = \vec{SA'} + \vec{A'D}$. Înmulțim egalitatea membru cu membru cu \vec{SA} și se obține:

$$\vec{SA} \cdot \vec{SD} = \vec{SA} (\vec{SA'} + \vec{A'D}) = \vec{SA} \cdot \vec{SA'} + \vec{SA} \cdot \vec{A'D}. \text{ Produsul scalar } \vec{SA} \times \vec{A'D} \text{ este nul, deoarece vectorii sînt ortogonali și prin urmare avem: } \vec{SA} \cdot \vec{SD} = \vec{SA} \cdot \vec{SA'}. \text{ Din triunghiurile } SOA \text{ și } SOA' \text{ vectorii } \vec{SA} \text{ și } \vec{SA'} \text{ se scriu astfel: } \vec{SA} = \vec{SO} + \vec{OA}; \vec{SA'} = \vec{SO} + \vec{OA'} = \vec{SO} - \vec{OA} \text{ și prin urmare avem: } \vec{SA} \cdot \vec{SD} = (\vec{SO} + \vec{OA})(\vec{SO} - \vec{OA}) = SO^2 - OA^2 = d^2 - R^2$$

73. Fie O punctul de intersecție al diagonalelor dreptunghiului M și N mijloacele laturilor AD și BC . Avem : $\overrightarrow{OM} = 2(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD})$, $\overrightarrow{ON} = 2(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = -2(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD})$.

74. Fie O punctul de intersecție al diagonalelor dreptunghiului. Avem : $\overrightarrow{OL} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{QL}$; $\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{NS}$, $\overrightarrow{OL} = -\overrightarrow{QP} = -\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{NM} = -\overrightarrow{NS}$; $\overrightarrow{OQ} = -\overrightarrow{ON}$ sau $\overrightarrow{OL} = -\overrightarrow{NS} - \overrightarrow{ON} = -(\overrightarrow{NS} + \overrightarrow{ON}) = -\overrightarrow{OS}$.

78. Din centrul O se construiesc perpendicularele OM, OP, OQ, OR, OS pe mijloacele laturilor pentagonului. Se construiesc apoi bisectoarele unghiurilor formate de aceste perpendiculare cu razele OA, OB, OC, OD și OE și se notează cu $M_1, M_2; P_1, P_2; Q_1, Q_2; R_1, R_2; S_1, S_2$, intersecțiile cu laturile AB, BC, CD, DE, EA ale paralelogramului.

Mai departe se deduc relațiile $\overrightarrow{OM}_1 + \overrightarrow{OM}_2 = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} \dots$ și se pun apoi în evidență vectorii opuși.

79. Dacă G și G' sînt centrele celor două triunghiuri avem :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OG} &= \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{3}, \quad \overrightarrow{OG'} = \frac{\overrightarrow{OA}_1 + \overrightarrow{OG}_1 + \overrightarrow{OC}_1}{3} = \\ &= \frac{(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) + (\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA}) + (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})}{6} = \frac{2(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})}{6}. \end{aligned}$$

80. $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PE}$. Dacă O este intersecția dreptelor AD și CF , atunci $\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$ și $\overrightarrow{AF} = K \cdot \overrightarrow{CD}$. Se deduce apoi $\overrightarrow{BE} = (K + 1) \overrightarrow{CD}$.

81. Se deduce ușor $\frac{\overrightarrow{XM} + \overrightarrow{MA}}{\overrightarrow{XM} + \overrightarrow{MB}} = k$.

Se obține relația $(1-k) \overrightarrow{XM} = \overrightarrow{MA} \left(k \frac{\overrightarrow{MB}}{\overrightarrow{MA}} - 1 \right)$ și deoa-

rece $\frac{\overrightarrow{MB}}{\overrightarrow{MA}} = \pm \frac{R}{r}$. Se deduce $\overrightarrow{XM} = \overrightarrow{MA} \left(\frac{-1 \pm K \frac{R}{r}}{k-1} \right)$.

Este deci un cerc omotetic cu cercul de diametru MA .

82. Se notează $\overrightarrow{AP} = \lambda \overrightarrow{PB}$ și atunci se scriu relațiile :

$$\overrightarrow{OR} = \frac{1}{1+\lambda} \overrightarrow{OC} + \frac{\lambda}{1+\lambda} \overrightarrow{OD}; \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \lambda \overrightarrow{OB}.$$

$$\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OP} = \frac{1}{1+\lambda} \overrightarrow{AC} + \frac{\lambda}{1+\lambda} \overrightarrow{BD}. \text{ De unde se deduce } \overrightarrow{PR} \cdot \overrightarrow{QS} = 0.$$

89. Dacă notăm $\overrightarrow{BC} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BA} = \vec{c}$, atunci din relația $\overrightarrow{ma} = \overrightarrow{mc} = 0$ (\vec{m}_a și \vec{m}_c fiind vectorii medianei, deducem : $\cos B = \frac{4}{5} \frac{a^2 + c^2}{ac}$).

Cap. 18. Construcții algebrice de mulțimi

10. Divizorii lui a și b divid de asemenea sumele $5a + 3b$ și $13a + 8b$ și reciproc toți divizorii lui $5a + 3b$ și $13a + 8b$ divid a și b .

$$\begin{cases} 8(5a + 3b) - 3(13a + 18b) = a \\ 5(13a + 8b) - 13(5a + 3b) = b. \end{cases}$$

Prin urmare perechile (a, b) și $(5a + 3b, 13a + 8b)$ au aceeași mulțime de divizori.

12. $7^n \equiv (-1)^n \pmod{8}$

Dacă n este par avem : $7^n + 1 \equiv 2 \pmod{8}$ și prin urmare restul împărțirii numărului $7^n + 1$ prin 8 este egal cu 2.

15. Avem : $37 = 7 \cdot 5 + 2$; $16 = 7 \cdot 2 + 2$; $23 = 7 \cdot 3 + 2$.

$37 \equiv 2 \pmod{7}$; $16 \equiv 2 \pmod{7}$; $23 \equiv 2 \pmod{7}$

Din aceste relații se obține :

$$37^{n+2} \equiv 2^{n+2} \pmod{7}; 16^{n+1} \equiv 2^{n+1} \pmod{7}$$

$$23^n \equiv 2^n \pmod{7}, \text{ sau :}$$

$$37^{n+2} + 16^{n+1} + 23^n \equiv 2^n \cdot 7 \pmod{7}$$

$$16. 3^5 = 243 = 181 + 62; 4^5 = 1024 = 181 \cdot 6 - 62$$

$$3^5 \equiv 62 \pmod{181}; 4^5 \equiv -62 \pmod{181}$$

sau :

$$3^{105} \equiv 62^{21} \pmod{181}; 4^{105} \equiv -62^{21} \pmod{181}$$

Adunăm cele două egalități membru cu membru și obținem :

$$3^{105} + 4^{105} \equiv 0 \pmod{181}.$$

$$17. 7a + 3 \equiv 3 \pmod{7}; 7b + 25 \equiv -3 \pmod{7}$$

Din aceste relații obținem :

$$(7a + 3)^{2n+1} \equiv 3^{2n+1} \pmod{7},$$

$$(7b + 25)^{2n+1} \equiv -3^{2n+1} \pmod{7}.$$

Adunăm cele două egalități membru cu membru și obținem :

$$7(a + 3)^{2n+1} + (7b + 25)^{2n+1} \equiv 0 \pmod{7}$$

$$18. 28 = 25 + 3; 47 = 25 \cdot 2 - 3; 72 = 25 \cdot 3 - 3,$$

$$\text{atunci } 72 \equiv -3 \pmod{25}, 47 \equiv -3 \pmod{25}; 28 \equiv 3 \pmod{25}$$

$$72^{2n+2} \equiv 3^{2n+2} \pmod{25}$$

$$47^{2n} \equiv 3^{2n} \pmod{25}$$

$$28^{2n-1} \equiv 3^{2n-1} \pmod{25}$$

$$72^{2n+2} - 47^{2n} + 28^{2n-1} \equiv 3^{2n+2} - 3^{2n} + 3^{2n-1} \pmod{25}$$

Cum însă : $3^{2n+2} - 3^{2n} + 3^{2n-1} = 3^{2n-1}(3^3 - 3 + 1) = 25 \cdot 3^{2n-1}$,

rezultă că : $72^{2n+2} - 47^{2n} + 28^{2n+1} \equiv 3^{2n-1} \cdot 25 \pmod{25} \equiv 0 \pmod{25}$

$$19. 2^4 = 16 = 13 + 3;$$

$$7^2 = 49 = 13 \cdot 4 - 3$$

$$2^4 \equiv 3 \pmod{13}; 7^2 \equiv -3 \pmod{13}$$

$$\text{Obținem : } 2^{60} \equiv 3^{15} \pmod{13}; 7^{30} \equiv -3^{15} \pmod{13}$$

Din aceste două relații obținem :

$$2^{60} + 7^{30} \equiv 0 \pmod{13} \text{ și prin urmare :}$$

$$2^{60} + 7^{30} \text{ se divide cu } 13.$$

$$20. N = 4^n + 15n - 1 = 4^n - 1 - 3n + 18n$$

$$(4^n - 1) : 3 = (4^n - 1) : (4 - 1) = 4^{n-1} + 4^{n-2} + \dots + 4 + 1$$

$$\text{Să notăm : } N_1 = 4^n - 1 - 3n = 3(4^{n-1} + 4^{n-2} + \dots + 4 + 1 - n) = 3[(4^{n-1} - 1) + (4^{n-2} - 1) + (4^{n-3} - 1) + \dots + (4^2 - 1) + (4 - 1)].$$

Fiecare termen al acestei sume se divide la 3 și prin urmare :

$$N_1 : 9. \text{ Dar } N = N_1 + 18n, \text{ și deci } N : 9.$$

21. Avem :

$$\begin{aligned} a(x^3 + a^2x^2 + a^2 - 1) &= ax^3 + a^3x^2 + a(a^2 - 1) = \\ &= ax^3 + ax^2 + (a^3 - a)x^2 + (a^3 - a) = (a^3 - a)(x^2 + 1) + ax^2(x + 1). \end{aligned}$$

Avem : $a^3 - a = (a + 1)(a - 1)a$, care se divide la 6. Prin urmare $(a^3 - a)(x^2 + 1)$ se divide la 6 pentru orice valori întregi ale lui x .

Pentru ca polinomul dat să se dividă la 6 este necesar ca expresia $ax^2(x + 1)$ să se dividă la 6 pentru orice a , adică în particular și pentru $a = -1$. Din această condiție rezultă că $x(x + 1)$ trebuie să se dividă la 3 și această proprietate are loc dacă :

$$x = 3k \text{ sau } x = 3k - 1.$$

22. Avem : $10N = 4 \cdot 25^n \cdot 2^n + 15 \cdot 3^n \cdot 4^n = 4(50^n - 12^n) + 19 \cdot 12^n$.

Deoarece $50^n - 12^n$ se împarte la diferența :

$50 - 12 = 38 = 19 \cdot 2$ atunci $10N$ se divide la 19.

23. $P_n = a^{4n+1} - a$. Pentru $n = 1$ avem :

$$\begin{aligned} P_1 &= a^5 - a = a(a-1)(a+1)[(a^2-4)+5] = \\ &= (a-2)(a-1)a(a+1)(a+2) - 5(a-1)a(a+1). \end{aligned}$$

Produsul $(a-2)(a-1)(a+1)(a+2)a$, se divide la $5! = 120$ și prin urmare se divide la 30. Produsul $5(a-1)a(a+1)$ se divide de asemenea la $5 \cdot 3! = 30$. Prin urmare P_1 se divide la 30. Avem :

$$P_{n+1} = a^{4n+5} - a = P_n + a^{4n+5} - a^{4n+1} = P_n + a^{4n} \cdot P_1.$$

Aplicînd principiul inducției deducem că P_{n+1} se divide la 30.

24. $n^2 + 1 = n(n+1) - (n-1)$. Punînd condiția ca $n^2 + 1$ să se dividă prin $n+1$, rezultă că $n-1$ trebuie să se dividă la $n+1$. De aici deducem că $n-1 = 0$ sau $n = 1$. Prin urmare numai pentru $n = 1$, expresia $n^2 + 1$ se divide la $n+1$.

$$25. \text{ Avem : } x^2y^3 - 4x^2y = x^2y(y+2)(y-2)$$

$$\begin{aligned} \text{și } x^4 + x^2 - 2 &= x^4 - x^2 + 2x^2 - 2 = x^2(x^2 - 1) + 2(x^2 - 1) = \\ &= (x^2 + 2)(x+1)(x-1) \end{aligned}$$

În felul acesta obținem :

$$N = x^2y(x+1)(x-1)(y+2)(y-2)(x^2+2)$$

Avem : $216 = 2^3 \cdot 3^3$. Dacă x este un număr par atunci x^2 se divide la 4 și $x^2 + 2$ se divide la 2 prin urmare N se divide la 8. Dacă x este un număr impar, atunci unul din factorii $(x+1)(x-1)$ se divide la 4 și celălalt se divide la 2 și prin urmare N se divide și în acest caz la 8.

$$[x = 2p + 1 \Rightarrow (x+1)(x-1) = (2p+2) \cdot 2p = 4p(p+1) : 8].$$

Unul din factorii $y+2$, y și $y-2$ se divid la 3. Pentru $x = 3k$, $x+1$ se divide la 3. Pentru $x = 3k \pm 1$, unul din factorii $x-1$

și $x + 1$ se divide la 3. În ambele cazuri expresia $x^2 + 2$ se divide la 3, deoarece avem: $x^2 + 2 = 9k^2 \pm 6k + 1 + 2 = 3(3k^2 \pm 2k + 1)$. Rezultă că N se divide la $3^3 = 27$. Prin urmare N se divide la $8 \cdot 27 = 216$.

26. Fie $x - y = a$, $y - z = b$, $z - x = c$; $a + b + c = 0$, $c = -(a + b)$. Avem: $(x - y)^5 + (y - z)^5 + (z - x)^5 = a^5 + b^5 - (a + b)^5 = a^5 + b^5 - a^5 - 5a^4b - 10a^3b^2 - 10a^2b^3 - 5ab^4 - b^5 = -5ab(a^3 + 2a^2b + 2ab^2 + b^3) = -5ab[(a + b)(a^2 + ab + b^2) + 2ab(a + b)] = -5ab(a + b)(a^2 + ab + b^2)$.

Prin urmare numărul $N = (x - y)^5 + (y - z)^5 + (z - x)^5$ se divide la $-5ab(a + b) = 5abc = 5(x - y)(y - z)(z - x)$.

27. Avem:

$$N = \frac{2^{5n-1} \cdot 2 - 1}{2 - 1} = 2^{5n} - 1 = 32^n - 1.$$

Diferența $32^n - 1$ se divide la $32 - 1 = 31$.

28. Avem: $2n^3 - 3n^2 + n = (n^3 - n) + (n^3 - 3n^2 + 2) = n(n^2 - 1) + n(n^2 - 3n + 2) = (n - 1)(n + 1)n + n(n - 2)(n - 1)$.

Expresia obținută este suma a doi termeni. Fiecare termen este produsul a trei numere naturale consecutive care este divizibilă cu 6.

29. $2^6 = 64 \equiv 1 \pmod{9}$; $2^{6n} \equiv 1 \pmod{9}$ în afară de aceasta avem $2^{6n+2} \equiv 2^2 \pmod{9}$ și prin urmare obținem: $2^{6n+2} \equiv 2^2 \pmod{18}$. Prin urmare avem: $2^{6n+2} = 18k + 2^2$. Mai departe avem: $2^{18} - 1 = (2^9 + 1)(2^9 - 1) = 513 \cdot 511$ de unde rezultă evident că $2^{18} - 1$ se divide la 19 sau $2^{18} \equiv 1 \pmod{19}$ sau $2^{18k} \equiv 1 \pmod{19}$.

Dar:

$$2^{18k+2} = 2^{18k} \cdot 2^2 \equiv 2^2 \pmod{19};$$

$$2^{2^{6n+2}} \equiv 16 \pmod{19}, \text{ de unde rezultă că:}$$

$$2^{2^{6n+2}} + 3 \equiv 16 + 3 \equiv 0 \pmod{19}$$

Prin urmare $2^{2^{6n+2}} + 3$ se divide la 19.

$$30. A_{n+1} - A_n = 10^{6n+8} - 10^{6n+2} + 10^{3n+4} - 10^{3n+1} = \\ = 10^{6n+2}(10^6 - 1) + 10^{3n+1}(10^3 - 1) = (10^3 - 1)[(10^3 + 1) \cdot \\ \cdot 10^{6n+2} + 10^{3n+1}].$$

Deoarece $10^3 - 1 = 999 = 9.111$, rezultă $A_{n+1} - A_n \equiv 0 \pmod{111}$.

$$32. \text{Numărul: } n^8 + 4n^7 + 6n^6 + 4n^5 + n^4 = \\ = n^4(n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1) = n^4(n+1)^4 = \\ = [n(n+1)]^4 \text{ se împarte la } 2^4 = 16.$$

34. Avem :

$$N = [1^{2n+1} + (2a)^{2n+1}] + [2^{2n+1} + (2a - 1^2)^{2n+1}] + \dots + \\ + [a^{2n+1} + (a^2 + 1)^{2n+1}], \text{ sau :}$$

$$N = \sum_{k=1}^a [k^{2n+1} + (2a + 1 - k)^{2n+1}].$$

35. Avem :

$$n^{8888} - n^{7777} + 1 = n^2(n^3)^{\frac{8888}{3}} - n(n^3)^{\frac{7776}{3}} + 1 =$$

$$n^2[(n^3)^{\frac{8888}{3}} - 1] - n[(n^3)^{\frac{7776}{3}} - 1] + n^2 - n + 1.$$

Dar $(n^3)^{\frac{8888}{3}} - 1 = (n^2)^{2962} - 1$ se divide la :

$$n^3 + 1 = (n+1)(n^2 - n + 1) \text{ și } (n^3)^{\frac{7776}{3}} - 1 = (n^3)^{2592} - 1$$

se divide la $n^3 + 1$. Prin urmare numărul dat se divide la : $n^2 - n + 1$.

$$36. 9x^5 - 5x^3 - 4x = 9x^5 - 6x^3 - 3x + x^3 - x = \\ = 3(3x^5 - 2x^3 - x) + (x-1)x(x+1), \text{ care se divide la } 3. \\ 9x^5 - 5x^3 - 4x = 10x^5 - 5x^3 - 5x - x^5 + x = \\ = 5(2x^5 - x^3 - x) - x(x-1)(x+1), \text{ care se divide la } 5.$$

Expresia se mai poate scrie :

$$9x^5 - 5x^3 - 4x = x[8x^4 - 8 + (x^4 - 5x^2 + 4)] = \\ = x[8(x^4 - 1) + (x^2 - 4)(x - 1)(x + 1)].$$

Dacă x este un număr impar, atunci $x - 1$ și $x + 1$ sînt numere pare și produsul lor care se divide la 8 și deci $N : 8$. Dacă x este un număr par se arată că expresia $9x^5 - 5x^3 - 4x$ se divide la 8. Prin urmare $9x^5 - 5x^3 - 4x$ se divide la produsul $3 \cdot 5 \cdot 8 = 120$.

$$37. 9^n(9^n + 1) + 1 = 9^{2n} + 2 \cdot 9^n + 1 - 9^n = \\ = (9^n + 1)^2 - (3^n)^2 = (9^n + 1 - 3^n)(9^n + 1 + 3^n) = \\ = [3^n(3^n - 1) + 1][3^n(3^n + 1) + 1], \text{ care în mod evident se } \\ \text{divide la } 3^n(3^n + 1) + 1.$$

$$42. \text{ Avem : } 1000a + 100b + 10c + a = (5c + 1)^2, \\ \text{unde } 0 < a < 9; 0 < b < 9; 0 < c < 9 \text{ sau : } \\ 1000a + 100b - 25c^2 = 1 - a.$$

Partea stîngă a acestei egalități se divide la 25 și prin urmare din condiția ca $1 - a$ să se dividă la 25 obținem $a = 1$. Prin urmare avem : $c^2 = 4(b + 10)$. De unde rezultă că $b + 10 = 16$ sau $b = 6$ și $c = 8$. Numărul căutat este 1681.

$$43. \frac{(2n)!}{n!(n+1)!} = 4C_{2n-1}^n - C_{2n+1}^n$$

44. Să presupunem că ar exista un astfel de număr \overline{xyz} . Să notăm cu d rația progresiei și atunci obținem :

$$y = x + d; z = x + 2d$$

Avem : $x + y + z = 3x + 3d = 3(x + d)$ și prin urmare suma cifrelor sale se divide la 3.

45. Dacă $a = 0$, atunci ecuația dată are forma $x = 0$. Dacă $a = -1$, atunci ecuația devine $x - 2 = 0$; $x = 2$. Dacă $a \neq 0$ și $a \neq -1$, obținem :

$$x_1 = \frac{a-1}{a}, x_2 = -\frac{a}{a+1}, \text{ unde } x_1 = 1 - \frac{1}{a}; x_2 = -1 + \frac{1}{a+1}$$

Dacă $a = 1$, atunci $x_1 = 0$ și dacă $a = -2$, atunci $x_2 = -2$.

Răspuns :

$$a = 0; x = 0;$$

$$a = -1; x = 2;$$

$$a = 1; x = 0;$$

$$a = -2; x = -2;$$

46. Avem
$$\begin{cases} x + y = a^2 \\ |x - y| = a \end{cases}$$

1. Fie $x > y$, atunci: $\begin{cases} x + y = a^2 \\ x - y = a \end{cases}$, de unde rezultă că

$x = \frac{a(a+1)}{2}$ și $y = \frac{a(a-1)}{2}$, unde a este un număr natural diferit de unitate.

2. Fie $x < y$ atunci obținem :

$$x = \frac{a(a-1)}{2}, \quad y = \frac{a(a+1)}{2}$$

47. Avem : $3x^2 \equiv 0 \pmod{3}$, $y^2 \equiv 0 \pmod{3}$ sau $y^2 \equiv 1 \pmod{3}$, de unde rezultă că $y^2 - 3x^2 \equiv 0 \pmod{3}$ sau $y^2 - 3x^2 \equiv 1 \pmod{3}$. Dar $8 \equiv 2 \pmod{3}$.

48. Ecuația dată poate fi scrisă sub forma :

$$y^2 - (1 - 2x)y + (x^2 - 3x - 150) = 0$$

$$y_{1,2} = \frac{1 - 2x \pm \sqrt{1 - 4x + 4x^2 - 4x^2 + 12x + 600}}{2}$$

$$\text{sau } y_{1,2} = \frac{1 - 2x \pm \sqrt{8x + 601}}{2}$$

Avem :

$$8x + 601 = (2x + 1)^2 = 4x^2 + 4x + 1.$$

De unde rezultă că :

$$y_1 = 76 - \frac{x(x-1)}{2}$$

$$y_2 = 75 - \frac{x(x+3)}{2},$$

se obțin două sisteme de inecuații :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{x(x+1)}{2} - 75 > 0 \\ 76 - \frac{x(x-1)}{2} > 0 \end{array} \right. \text{ și } \left\{ \begin{array}{l} \frac{x(x+1)}{2} - 75 > 0 \\ 75 - \frac{x(x+3)}{2} > 0 \end{array} \right.$$

Din aceste două sisteme deducem :

$$x^2 + x > 150; \quad x^2 - x < 152.$$

Înmulțim ambii membri ai acestor egalități cu 4 și adunăm 1, se obține :

$$(2x+1)^2 > 601 \quad (2x-1)^2 < 609 \quad (1)$$

sau :

$$\begin{array}{l} (2n+1) > 24 \\ n > 11,5 \end{array} \quad \begin{array}{l} (2n-1) < 25 \\ n < 13 \end{array}$$

Din condițiile (1) rezultă că $n = 12$ și atunci $x = 3$, $y = 10$. Din cel de-al doilea sistem obținem :

$$x^2 + 3x < 150 < x^2 + x.$$

Ecuatia dată admite în mulțimea numerelor întregi soluția :

$$x = 3, \quad y = 10.$$

49. Avem : $3y^2 = 2(12 + xy)$. Partea dreaptă a acestei ecuații se divide la y . Dacă y este un divizor al numărului 24, atunci el poate fi : ± 2 ; ± 4 ; ± 6 ; ± 8 ; ± 12 ; ± 24 .

Substituind aceste valori în ecuația de bază se obțin soluțiile :

$$\begin{cases} x_1 = 3 \\ y_1 = 2 \end{cases} \begin{cases} x_2 = -3 \\ y_2 = -2 \end{cases} \begin{cases} x_3 = -3 \\ y_3 = 4 \end{cases} \begin{cases} x_4 = 3 \\ y_4 = 4 \end{cases} \begin{cases} x_5 = -7 \\ y_5 = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_6 = 7 \\ y_6 = -6 \end{cases} \begin{cases} x_8 = 17 \\ y_8 = -12 \end{cases}$$

50. Ecuația dată poate fi pusă sub forma :

$$2x^2 + xy - 4x - 2xy - y^2 + 4y + 6x + 3y - 12 = 72$$

$$x(2x + y - 4) - y(2x + y - 4) + 3(2x + y - 4) = 72$$

$$(2x + y - 4)(x - y + 3) = 72.$$

Din sistemul : $\begin{cases} 2x + y - 4 = -72 \\ x - y + 3 = 1 \end{cases}$ se obțin soluțiile :

$3x - 1 = 73$ și atunci $x = \frac{74}{3} = 24 \frac{2}{3}$. Din acest sistem nu se obțin soluții în mulțimea numerelor întregi.

Răspuns :

$$x_1 = 13, y_1 = 14, x_2 = 6, y_2 = 1$$

51. Ecuația dată poate fi scrisă sub forma :

$$x^3 + y^3 + 3x^2y + 3xy^2 + 1 = 3x^2y + 3xy^2 + 3xy$$

sau :

$$(x + y)^3 + 1 - 3xy(x + y + 1) = 0$$

$$(x + y + 1)[(x + y)^2 - (x + y) + 1] - 3xy(x + y + 1) = 0$$

$$(x + y + 1)(x^2 - xy + y^2 - x - y + 1) = 0.$$

Dacă $x > 0, y > 0$, atunci $x + y + 1 \neq 0$ și atunci :

$$x^2 - xy + y^2 - x - y + 1 = 0$$

sau :

$$x^2 - (y + 1)x + (y^2 - y + 1) = 0;$$

$$x = \frac{y + 1 \pm (y - 1)\sqrt{-3}}{2}.$$

Pentru ca x să fie un număr real este necesar ca $y - 1 = 0$, $y = 1$.

Rezultă că $x = \frac{y + 1}{2} = 1.$

52. Ecuația dată se poate scrie sub formă :

$$2^{x^2-4}(2^{x+2} - 1) = 2^5 \cdot 31.$$

Mai departe se obține sistemul :

$$\begin{cases} 2^{x^2-4} = 2^5 \\ 2^{x+2} - 1 = 31 \end{cases}$$

Din prima ecuație se obține $x^2 = 9$ sau $x = \pm 3$. Dacă înlocuim $x = 3$ în cea de-a doua ecuație, obținem : $2^5 - 1 = 31$. Singura soluție a ecuației date este $x = 3$.

53. Avem $yz - y - z = 5$

$$yz - y - z + 1 = 6$$

$$(y - 1)(z - 1) = 6.$$

Dacă $y < z$, atunci din ultima ecuație se obține sistemul :

$$\begin{cases} y - 1 = 1 & y - 1 = 2 \\ z - 1 = 6 & z - 1 = 3. \end{cases}$$

Din primul sistem se obține : $y = 2$, $z = 7$ și din al doilea $y = 3$, $z = 4$. Înlocuind aceste valori în ecuațiile date se obțin soluțiile :

$$x_1 = 5; y_1 = 2; z_1 = 7;$$

$$x_2 = 7; y_2 = 3; z_2 = 4.$$

Sistemul fiind simetric relativ la necunoscutele $y, z (y > z)$. Avem :

$$x_3 = 5; y_3 = 7; z_3 = 2;$$

$$x_4 = 7; y_4 = 4; z_4 = 3.$$

54. Ecuația dată poate fi scrisă sub forma :

$$(x^x - 2x) + (y^y - y) = 0 \text{ sau}$$

$$x(x^{x-1} - 2) + y(y^{y-1} - 1) = 0.$$

Dacă $x > 2$ atunci $x - 1 > 1$.

Obținem : $x^{x-1} > 2^{x-1} > 2^1 x - 1$ și prin urmare pentru $x > 2$ are loc inegalitatea : $x(x^{x-1} - 2) > 0$.

În mod asemănător, dacă $y > 1$ are loc inegalitatea :

$$y(y^{y-1} - 1) > 0.$$

În final se găsește că $x = 2, y = 1$, este soluția ecuației date în mulțimea numerelor naturale.

$$55. (xy + 2x + y + 2) = 2xy$$

$$x(y - 2) + (y - 2) = 4$$

$$(x - 1)(y - 2) = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = 1 \\ y - 2 = 4 \end{cases} \vee \begin{cases} x - 1 = 4 \\ y - 2 = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x - 1 = 2 \\ y - 2 = 2 \end{cases}$$

62. Să notăm $\frac{1}{x} = y$ și atunci obținem :

$$x + y = 1 \text{ și } xy = 1$$

$$x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = 1 - 2 = -1$$

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 &= (x + y)(x^2 - xy + y^2) = x^2 - xy + y^2 = \\ &= (x^2 + y^2) - xy = -2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^5 + \frac{1}{x^5} &= x^5 + y^5 = (x^2 + y^2)(x^3 + y^3) - x^2 y^2 (x + y) = \\ &= (-1) \cdot (-2) - 1^2 \cdot 1 = 1 \end{aligned}$$

63. $\frac{2}{3} = 1 - \frac{1}{3}$ și atunci avem :

$$P = 3 \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 + \frac{1}{3}\right) \left(1 + \frac{1}{3^2}\right) + \dots + \left(1 + \frac{1}{3^{2^n-1}}\right)$$

$$\left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 + \frac{1}{3}\right) = 1 - \frac{1}{3^2};$$

$$\left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{3^2}\right) = 1 - \frac{1}{3^{2^2}}$$

$$P = 3 \left(1 - \frac{1}{3^{2^n}}\right).$$

64. Avem egalitatea :

$$2xy = (x + y)^2 - (x^2 + y^2); 2ab = (a + b)^2 - (a^2 + b^2).$$

Ținând seama de condițiile problemei obținem :

$$\begin{cases} xy = ab \\ x + y = a + b \end{cases} \text{ de unde rezultă că } x = a; y = b \text{ sau}$$

$$x = b; y = a.$$

În ambele cazuri avem : $x^n + y^n = a^n + b^n$.

$$65. (ax + by + cz)^2 = 0, a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 + 2bcyz + 2caxz + 2abxy = 0. \quad (I)$$

Numitorul expresiei raționale poate fi scris sub forma :

$$a(b + c)x^2 + b(c + a)y^2 + c(a + b)z^2 - 2bcyz - 2caxz - 2abxy.$$

Dacă scădem din această egalitate partea stângă egalitate (1) care este egală cu zero, atunci obținem :

$$a(a + b + c)x^2 + b(a + b + c)y^2 + c(a + b + c)z^2,$$

sau :

$$(a + b + c)(ax^2 + by^2 + cz^2).$$

Fracția dată poate fi adusă la forma :

$$\frac{ax^2 + by^2 + cz^2}{(a + b + c)(ax^2 + by^2 + cz^2)} = \frac{1}{a + b + c}.$$

66. $a + b + c = 0$ sau $a^2 + b^2 + c^2 \neq 2ab + 2ac + 2bc = 0$
De unde obținem : $a^2 + b^2 + c^2 = 2(ab + bc + ca)$. Dacă ridicăm ambii membri ai acestei expresii la pătrat obținem :

$$(a^2 + b^2 + c^2)^2 = [4(a^2b^2 + b^2c^2) + a^2 + 2abc(a + b + c)].$$

Din condiția $a + b + c = 0$ obținem :

$$(a^2 + b^2 + c^2) = [4(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)] \quad (1)$$

Pe de altă parte, avem :

$$(a^2 + b^2 + c^2)^2 = a^4 + b^4 + c^4 + 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)$$

Prin urmare avem :

$$a^4 + b^4 + c^4 + 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) = 4(a^2b^2 + c^2a^2 + b^2c^2).$$

De unde rezultă că :

$$2(a^4 + b^4 + c^4) = 4(a^2 + b^2 + b^2c^2 + c^2a^2). \quad (2)$$

Din egalitățile (1),(2) se obține :

$$(a^2 + b^2 + c^2)^2 = 2(a^4 + b^4 + c^4).$$

67. Se înmulțesc ambii membri ai acestei egalități cu $\sqrt[3]{a}$ și se obține : $a\alpha + b\sqrt[3]{a^2} = c\sqrt[3]{a}$. Dacă se elimină între cele două egalități $\sqrt[3]{a^2}$ se obține : $(b^2 + ac) \cdot \sqrt[3]{a} = bc + a^2\alpha$ sau :

$$\begin{cases} b^2 + ac = 0 \\ bc + a^2\alpha = 0 \end{cases} \quad \alpha = -\frac{bc}{a^2} = \frac{-abc}{a^3} = -\frac{b^3}{a^3}; \quad \sqrt[3]{a} = -\frac{b}{a}$$

$$a = 0; \quad b = 0; \quad b^2 + ac = 0$$

68. Se notează : $\frac{\sqrt[3]{a\sqrt{\alpha^2} + b\sqrt{\alpha} + c}}{\sqrt[3]{a'\sqrt{\alpha^2} + b'\sqrt{\alpha} + c'}} = \lambda$. Din această relație

se obține $(a - \lambda a')\sqrt[3]{\alpha^2} + (b - \lambda b')\sqrt[3]{\alpha} = -(c - \lambda c')$,
sau :

$$a - \lambda a' = 0; b - \lambda b' = 0; \lambda - \lambda c' = 0.$$

69. Din relația evidentă $\frac{ax + b}{a'x + b'} = r$ se deduce :

$$ax + b = r(a'x + b') \text{ sau : } x(a - ra') = rb' - b.$$

Deoarece $rb' - b$ este rațional, $x(a - ra')$ este rațională și prin urmare $a - ra' = 0$

$$\frac{a}{a'} = r; rb' - b = 0; \frac{b}{b'} = r \text{ sau } \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = r$$

70. $\cos 30^\circ = 2 \cos^2 15^\circ - 1 = 1 - 2 \sin^2 15^\circ$ sau $\sin 15^\circ =$
 $= \sqrt{\frac{1 - \cos 30^\circ}{2}}$

71. Se notează $a = 3 + \sqrt[3]{\frac{371}{27}}; b = -3 + \sqrt[3]{\frac{371}{27}}; x = \sqrt[3]{a -$
 $-\sqrt[3]{b}}$ și se obține : $x^3 = a - b - 3\sqrt[3]{ab}x; a - b = 6; ab =$
 $= \left(\frac{5}{3}\right)^3$

de unde rezultă $a^3 = 6 - 5x \Leftrightarrow (x - 1)(x^2 + x + 6) = 0 \Rightarrow x = 1$

72. Să notăm $x = \sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2} \Leftrightarrow x - \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{3}$
sau $(x - \sqrt[3]{2})^3 = 3 = x^3 - 3\sqrt[3]{2}x^2 + 6x - 2\sqrt[3]{2}$.
Din această relație obținem :

$$(x^3 + 6x - 3)^2 = 2(3x^2 + 2)^2$$

sau :

$$x^6 - 6x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 36x + 1 = 0$$

observă că $x = \pm 1$ nu sînt rădăcini.

$$74. z = \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{4};$$

$$76. z = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + i \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}$$

$$83. \alpha = \frac{k\pi}{2n}; k \in N; \quad 90. z = \left[1, \frac{2k\pi}{5} \right];$$

$$84. S_n = \frac{\sin \frac{nx}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \cos(n+1) \frac{x}{2}; \quad T_n = \frac{\sin \frac{nx}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \sin(n+1) \frac{x}{2};$$

$$85. E = \cos 2x + i \sin 2x;$$

$$86. E = -1;$$

$$87. x_k = -\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{3} + \frac{k\pi}{3}\right);$$

$$88. Z = \frac{3}{2} - 2i;$$

$$89. S_1 = \frac{\sin \frac{(k+1)\pi}{2}}{\sin \frac{\pi}{2}} \cos\left(x + \frac{k\pi}{2}\right),$$

$$S_2 = \frac{\sin \frac{(k+1)\pi}{2}}{\sin \frac{\pi}{2}} \sin\left(x + \frac{k\pi}{2}\right)$$

$$90. |z| = 1;$$

$$96. z = 0, \text{ dacă } n \neq 1; \quad z = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}$$

$$\begin{aligned} 102. \frac{(1+i)^{2n+1} \cdot (1+i)^{2n-1}}{2^{2n-1}} &= \frac{(1+i)^{4n}}{2^{2n-1}} = \frac{[(1+i)^2]^{2n}}{2^{2n-1}} = \\ &= \frac{(2i)^{2n}}{2^{2n-1}} = \frac{2^{2n}}{2^{2n-1}} \cdot i^{2n} = (-1)^n \cdot 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 103. & \left| \left(\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}} + i \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}} \right)^2 \right|^{12} = \\
 & = 2^{12} (\sqrt{2 + \sqrt{3}} + i \sqrt{2 - \sqrt{3}})^{12} = 2^{12} [(\sqrt{2 + \sqrt{3}} + i \sqrt{2 - \sqrt{3}})^2]^6 = \\
 & = 2^{12} (2\sqrt{3} + 2i)^6 = 2^{18} (\sqrt{3} + i)^6 = 2^{18} [(\sqrt{3} + i)^2]^3 = \\
 & = 2^{18} \cdot 2^3 (1 + i\sqrt{3})^3 = 2^{21} \cdot (-2)^3 = -2^{24}.
 \end{aligned}$$

107. Din ecuația dată avem: $a = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$ sau

$$a_1 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}; \quad a_2 = \frac{1}{a_1} = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2};$$

$$a = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3};$$

$$\frac{1}{a} = \cos \frac{2\pi}{3} - i \sin \frac{2\pi}{3}.$$

108. $Z|Z|^{-1} + |Z|Z^{-1} = m(\cos \alpha + i \sin \alpha)m^{-1} +$
 $+ m \cdot m^{-1}(\cos \alpha - i \sin \alpha) = 2 \sin \alpha.$

Cap. 19. Matrici

$$3. \quad x = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}; \quad x = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix};$$

$$\begin{aligned}
 4. \quad x &= \frac{1}{17} (A - 6B - 2C); \quad 7. \quad A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};
 \end{aligned}$$

$$9. \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab - ab \\ ac - ac & a^2 + bc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$11. B^2 = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ -\sin 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$12. A^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + cd & bc + d^2 \end{pmatrix};$$

$$13) a) \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 0 \end{pmatrix};$$

$$14. a) \begin{pmatrix} 13 & -14 \\ 21 & -22 \end{pmatrix}; b) \begin{pmatrix} 304 & -61 \\ 305 & -62 \end{pmatrix}; c) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$d) \begin{pmatrix} \cos n\alpha & -\sin n\alpha \\ \sin \alpha & -\cos n\alpha \end{pmatrix}; e) \begin{pmatrix} \lambda_1^k \\ \lambda_2^k \\ \vdots \\ \lambda_n^k \end{pmatrix};$$

$$15. a) \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}; b) \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}; c) \begin{pmatrix} 6 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$17. a) \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}; b) \begin{pmatrix} -8 & 29 & -11 \\ -5 & 18 & -7 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix};$$

$$c) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}; d) \begin{pmatrix} 1-a & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1-a & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1-a & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

$$21. a) 2; b) 3; c) 4; d) 5.$$

$$23. b) -2(x^3 + y^3); c) \sin(\alpha - \beta); d) 0; h) 0; i) 2ab; j) 0$$

$$27. a) 0; b) 0; c) 0; d) 0.$$

37. Să punem $\begin{pmatrix} a + bi & c + di \\ -c + di & a - bi \end{pmatrix} = aE + bI + cJ + dK,$

unde $I = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$ Avem :

$$I^2 = J^2 = K^2 = -E; IJ = JI = c$$

Cap. 20. Calcul informațional

16. Pentru ca din trei segmente să se poată construi un triunghi, fiecare dintre ele trebuie să fie mai mic decât suma celorlalte două. Deoarece suma celor trei segmente este egală cu l , fiecare segment va trebui să fie mai mic decât $\frac{l}{2}$. Coordonatele punctelor B și C , adică x și y , vor trebui să satisfacă dubla inegalitate: $0 \leq x \leq l$ și $0 \leq y \leq l$.

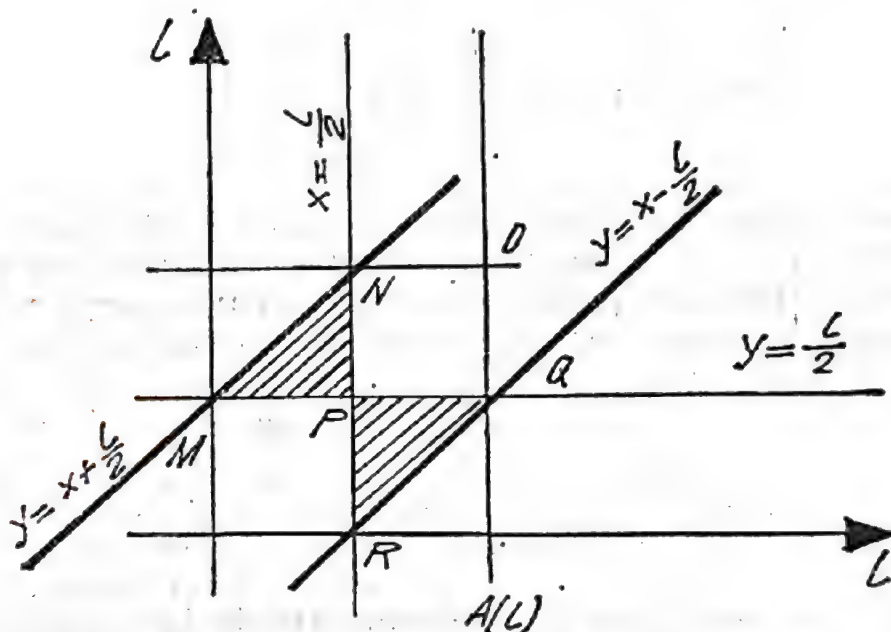


Fig. 20.1

Aceste coordonate sînt satisfăcute de coordonatele oricărui punct din interiorul patratului (fig. 20.1).

1) Să considerăm primul caz în care punctul O este mai la dreapta de punctul B .

Deoarece segmentul are o lungime mai mică decât $\frac{l}{2}$, atunci și coordonatele x și y trebuie să satisfacă condițiile :

$$x < \frac{l}{2}, y - x < \frac{l}{2};$$

$$l - y < \frac{l}{2},$$

sau :

$$\boxed{x < \frac{l}{2}; y < x + \frac{l}{2}; y > \frac{l}{2}} \quad (1)$$

În al doilea caz presupunem că punctul B se află la dreapta punctului C .

În acest caz, coordonatele x și y verifică dubla inegalitate :

$$y < \frac{l}{2}; x - y < \frac{l}{2}; 1 - x < \frac{l}{2} \text{ sau :}$$

$$\boxed{y < \frac{l}{2}; y < x - \frac{l}{2}; x > \frac{l}{2}} \quad (2)$$

Mulțimea punctelor din plan, ale căror coordonate satisfac inegalitățile (1) și (2), aparțin interiorului triunghiurilor hașurate MNP și PQR . Mulțimea punctelor aleatoare care aparțin triunghiurilor hașurate formează mulțimea evenimentelor posibile. Probabilitatea căutată este :

$$P = \frac{\text{suprafața } g}{\text{suprafața } G} = \frac{\frac{l^2}{8} + \frac{l^2}{8}}{l^2} = \frac{1}{4}.$$

20. Poziția unei drepte este determinată de doi parametri : distanța p de la centru pînă la coardă și unghiul φ care-l face direcția coardei cu direcția pozitivă a axei xx' (fig. 20.2).

Domeniul D al punctelor (p, φ) care generează mulțimea coardelor este dreptunghiul determinat de relațiile :

$$0 \leq p \leq R;$$

$$0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

Dacă dreapta este mai mică decât latura triunghiului, atunci : $p < a_3$ (a_3 este apotema triunghiului echilateral).

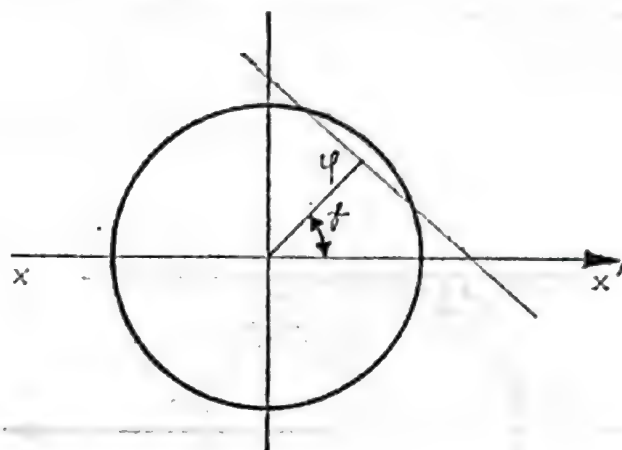


Fig. 20.2

Domeniul D_0 al punctelor (p, φ) care generează submulțimea coardei mai mici decât latura triunghiului este domeniul determinat de relațiile :

$$D_0 = \left\{ (p, \varphi) \mid \frac{R}{2} \leq p \leq R; 0 \leq \varphi \leq 2\pi \right\}$$

Avem :

$$\mu(D) = 2\pi R, \mu(D_0) = \pi R$$

Atunci :

$$p(\eta) = \frac{\mu(D_0)}{\mu(D)} = \frac{\pi R}{2\pi R} = \frac{1}{2}$$

Observație : Acesta este singurul caz în care se aplică formula grupului de invarianță al transformărilor ortogonale. Dacă se consideră că poziția unei drepte din familie este determinată prin alte condiții, atunci se obțin soluții diferite de aceasta. De aceea, este important să se precizeze parametrii familiei. În cazul când familia de drepte depinde de un singur parametru trebuie considerat intervalul său de variație, ale cărei puncte generează familia de drepte. Măsura unei mulțimi a familiei de drepte este egală cu lungimea intervalului (a, b) de variație al parametrului : $\mu(\eta) = \mu[(a, b)] = b - a$ (fig. 20.3). Măsura fami-



Fig. 20.3

liei este lungimea e a întregului interval de variație care generează familia. Probabilitatea unei submulțimi de drepte se notează ca și în cazul precedent cu $P(\eta)$ și este egală cu raportul celor două măsuri :

$$P(\eta) = \frac{b - a}{2}$$

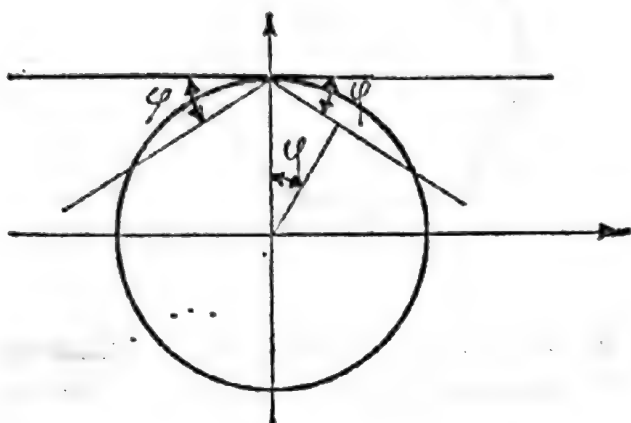


Fig. 20.4

21. Se observă că domeniul O al parametrilor (p, φ) ale cărui puncte generează familia de coordonate este : (fig. 20.5) :

$$D = \left\{ (p, \varphi) / 0 \leq p \leq R; 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \right\}$$

Fie AB latura triunghiului echilateral înscris în cerc. Avem :

$$P_0 = \overline{OP} = a_3 = \frac{R}{2}; \quad \varphi_0 = \frac{\pi}{3}$$

Domeniul D al parametrilor (p, φ) care generează subfamilia de drepte este reuniunea a două domenii (fig. 20.5a și fig. 20.5b)

$$D_1 = \left\{ (p, \varphi) / 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3}; \frac{R}{2} \leq p \leq R \right\}$$

$$D_2 = \left\{ (p, \varphi) / \frac{2\pi}{3} \leq \varphi \leq \pi; \frac{R}{2} \leq p \leq R \right\},$$

deci :

$$D_0 = D_1 \cup D_2 \quad D_1 \cap D_2 = \emptyset.$$

Avem :

$$\mu(D_0) = \mu(D_1) + \mu(D_2)$$

sau :

$$\mu(D_0) = \frac{R\pi}{6} + \frac{R\pi}{6} = \frac{2\pi R}{6}.$$

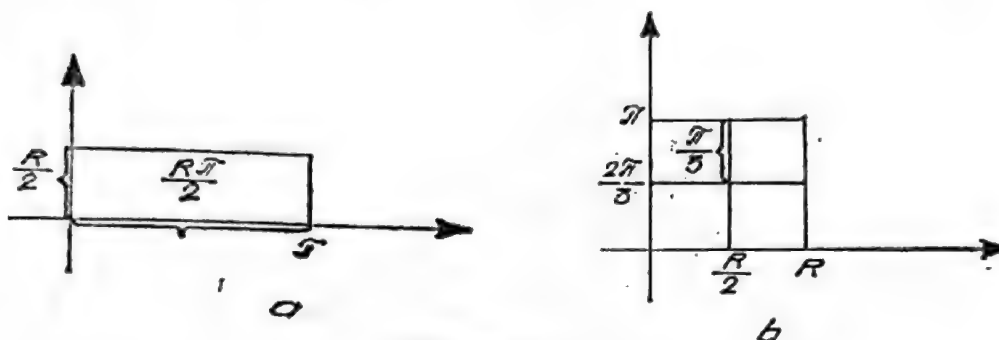


Fig. 20.5

Atunci rezultă :

$$P(\eta) = \frac{\mu(D_0)}{\mu(D)} = \frac{\frac{2\pi R}{6}}{\frac{\pi R}{2}} = \frac{2}{3}.$$

Să observăm că această problemă admite o soluție foarte simplă dacă considerăm mulțimea de drepte depinzând de un singur parametru.

Parametrul este unghiul pe care-l face direcția coardei cu direcția pozitivă a tangentei în punctul A. În intervalul de variație $[0, \pi]$ al unghiului ale cărui puncte generează familia de coarde subfamilia de coarde este generată de reuniunea de intervale :

$$\left[0, \frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{2\pi}{3}, \pi\right]$$

Avem :

$$\mu(I) = \mu(I_0) = \mu\left[0, \frac{\pi}{3}\right] + \mu\left[\frac{2\pi}{3}, \pi\right] = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$$

$$P(\mu) = \frac{\mu(I_0)}{\mu(I)} = \frac{\frac{2\pi}{3}}{\frac{\pi R}{2}} = \frac{2}{3}$$

22. Este necesar să atragem atenția că în această problemă se consideră aleatoare poziția unui punct pe bisectoare. Fie M un punct oarecare situat pe bisectoarea AD a triunghiului ABC . Să notăm cu d și d' distanțele de la punctul M la laturile AB și BC ale triunghiului. Din fig. 20.6 rezultă :

$$db + dc + d'a = 2s \text{ sau } d(b + c) + d'a = 2s$$

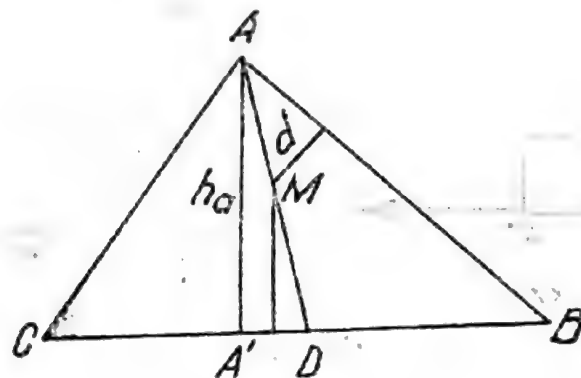


Fig. 20.6

de unde :

$$d = \frac{2s - d'a}{b + c}$$

Tot din figură rezultă :

$$\frac{d'}{AA'} = \frac{MD}{AD} \text{ sau } \frac{d'}{h_a} = \frac{MD}{AD} = m \text{ deci } d' = mh_a$$

Din relațiile de mai sus rezultă :

$$d = \frac{3s - maha}{b + c} \cdot \frac{2s - 2s_m}{b + c} = \frac{2s(1 - m)}{b + c}$$

Să notăm cu $1 - m = m'$ și observăm că :

$$1 - m = 1 - \frac{MD}{AD} = \frac{AD - MD}{AD} = \frac{AM}{AD}$$

Din ipoteza problemei rezultă că : $d < \frac{s}{b + c}$

sau :

$$\frac{2sm'}{b + c} < \frac{s}{b + c} ; m' < \frac{1}{2}$$

Deci evenimentele $d < \frac{s}{b+c}$ și $m' < \frac{1}{2}$ sint echivalente. Măsură geometrică a mulțimii punctelor situate pe bisectoare este AD , va măsura mulțimea punctelor care realizează evenimentul $m' < \frac{1}{2}$ este $\frac{AD}{2}$.

Rezultă că :

$$P\left(d < \frac{s}{b+c}\right) = \frac{\frac{AD}{2}}{AD} = \frac{1}{2}.$$

23. Se consideră aleatoare poziția unui punct pe înălțime. Ducem $AA' \perp BC$ și notăm cu E intersecția acestei perpendiculare cu dreapta MN . Dacă notăm cu a, b, c laturile triunghiului, atunci din figura 20.7 rezultă :

$$\frac{MC}{CA} = \frac{BN}{BA} = \frac{EA'}{AA'}$$

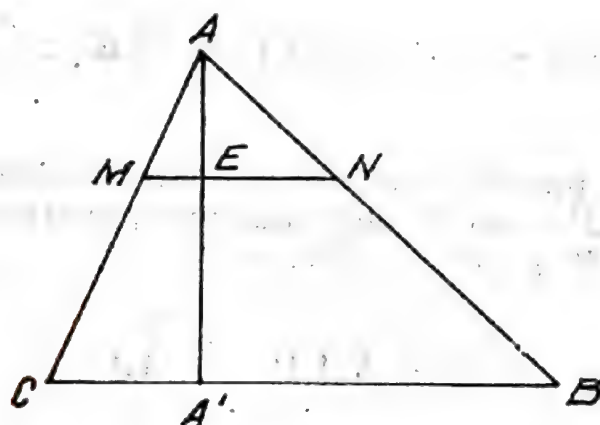


Fig. 20.7

Să notăm $\frac{EA'}{AA'} = K$ Atunci rezultă că :

$$\frac{MC}{CA} = \frac{BN}{BA} = K; \frac{NC + BM}{CA + CB} = K,$$

sau :

$$MC + BN = K(b + c).$$

Să observăm că :

$$1 - K = 1 - \frac{A'E}{AA'} = \frac{AA' - A'E}{AA'} = \frac{AE}{AA'} =$$

$$= \frac{MN}{a} \text{ sau } MN = a(1 - K)$$

Ținând seama de condiția dată în problema și de relațiile de mai sus deducem :

$$K(b + c) < a(1 - K)$$

De unde rezultă imediat :

$$K(a + b + c) < a \text{ sau } K < \frac{a}{2p}.$$

Evenimentele $NB + MC < MN$ și $K < \frac{a}{2p}$ sînt echivalente, deci :

$$P(NB + MC < MN) = P\left(K < \frac{a}{2p}\right).$$

Măsura mulțimii punctelor aflate pe înălțime este egală cu lungimea înălțimii ($AA' = h$). Măsura mulțimii punctelor care realizează evenimentul : $NB + MC < MN$, este :

$$EA' = KAA' = \frac{a}{2p} AA'$$

$$\text{Atunci : } P(NB + MC < NM) = \frac{EA'}{AA'} = \frac{a}{2p}.$$

Probabilitatea cerută este $\frac{a}{2p}$.

24. Fie M mijlocul segmentului de dreapta BC . Poziția unui anumit segment din familie este determinată dacă se cunoaște distanța p de la punctul M la mijlocul segmentului.

Familia segmentelor de dreaptă depinde de un singur parametru (fig. 20.8 a).

Fie RQ poziția unui segment din familie care intersectează ambele laturi ale triunghiului, în punctele R și Q . (fig. 20.8 b)

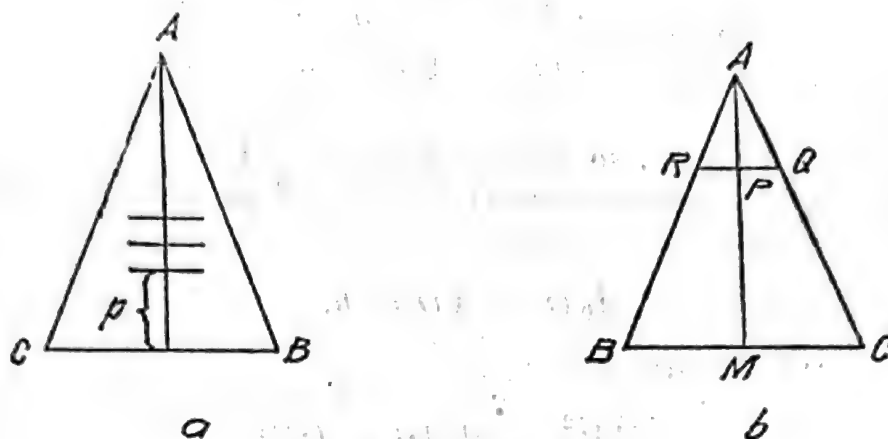


Fig. 20.8

$$\text{Avem : } \frac{AP}{AM} = \frac{PQ}{MC}, \text{ sau } \frac{\overline{AP}}{\sqrt{a^2 - b^2}} = \frac{1}{b}; \text{ rezultă : } AP = \frac{1\sqrt{a^2 - b^2}}{b}$$

deci :

$$MP = AM - AP = \sqrt{a^2 - b^2} - \frac{1\sqrt{a^2 - b^2}}{b} = \frac{(b - 1)\sqrt{a^2 - b^2}}{b}$$

Intervalul de variație al parametrului p care generează submulțimea de segmente care intersectează laturile AB și AC este :

$$I_0 = \left\{ p \mid \frac{(b - 1)\sqrt{a^2 - b^2}}{b} \leq p \leq \sqrt{a^2 - b^2} \right\}.$$

Intervalul de variație al parametrului p ale cărui puncte generează familia de segmente este :

$$I = \{p \mid 0 \leq p \leq \sqrt{a^2 - b^2}\}$$

Avem :

$$\mu(I) = \sqrt{a^2 - b^2}, \mu(I_0) = \frac{1\sqrt{a^2 - b^2}}{b};$$

atunci :

$$P(\eta) = \frac{\mu(I_0)}{\mu(I)} = \frac{\frac{l\sqrt{a^2 - b^2}}{b}}{\sqrt{a^2 - b^2}} = \frac{l}{b}$$

Ținînd seama că $l < b$, se constată $P(\eta) < 1$.

25. Fie M_0 poziția punctului aleator M pe dreapta AC pentru care avem satisfăcută relația :

$$M_0D = AD = b. \quad (1)$$

Din figura 20.9 rezultă :

$$\overline{EM_0}^2 = \overline{M_0D}^2 - \overline{DE}^2$$

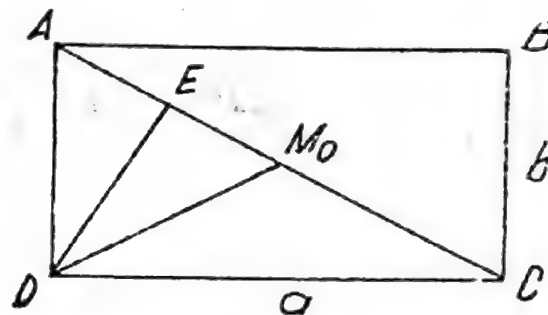


Fig. 20.9

$$DE = \frac{ab}{AC} = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad (2)$$

deci :

$$\overline{EM_0}^2 = b^2 - \frac{a^2b^2}{a^2 + b^2} = \frac{b^4}{a^2 + b^2}; \quad \overline{EM_0} = \frac{b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \quad (3)$$

Măsura mulțimii punctelor care realizează evenimentul $MD > b$ este :

$$\gamma(l_0) = M_0C$$

$$M_0C = \sqrt{a^2 + b^2} - \frac{2b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{a^2 - b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Măsura mulțimii întregii familii de puncte este :

$$\gamma(l) = AC = a^2 + b^2,$$

deci :

$$P(\eta) = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}. \quad (5)$$

26. Din relațiile cunoscute dintr-un triunghi dreptunghic deducem :

$$b = \frac{a}{2}; \quad c = \frac{a\sqrt{3}}{2}; \quad h = \frac{a\sqrt{3}}{4}. \quad (1)$$

Să notăm cu M' poziția punctului de pe ipotenuză pentru care avem satisfăcută relația : $AM' = \frac{BC}{2}$.

Fie M'' simetricul punctului M față de punctul H . Din figura 20.10 deducem :

$$HM' = \sqrt{AM'^2 - AH^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} - \frac{3a^2}{16}} = \frac{a}{4}. \quad (2)$$

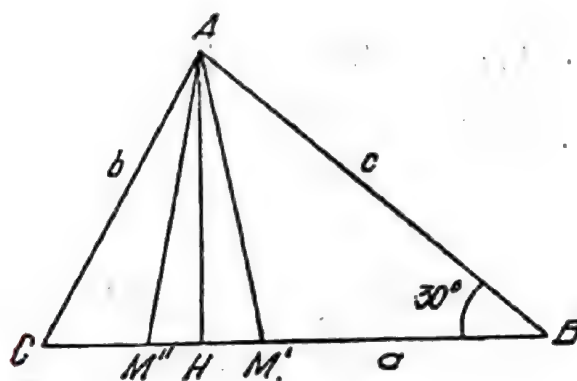


Fig. 20.10

Măsura geometrică a mulțimii punctelor care realizează evenimentele :

$$AM < \frac{BC}{2} \text{ este } \gamma(l_0) = \frac{a}{2}. \quad (3)$$

Măsura mulțimii punctelor dreptei BC este $\gamma(l) = a$;

$$P(\eta) = \frac{\gamma(l_0)}{\gamma(l)} = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2}. \quad (4)$$

Să se afle care este probabilitatea luînd la întîmplare un punct M pe bisectoarea unghiului A al triunghiului ABC , să avem relația $\widehat{CMB} > 90^\circ + \frac{A}{2}$.

27. Să notăm cu O centrul cercului înscris în triunghiul ABC .

$$\widehat{COB} = \widehat{COD} + \widehat{DOB} = \frac{\hat{A}}{2} + \frac{\hat{C}}{2} + \frac{\hat{A}}{2} + \frac{\hat{B}}{2} = 90^\circ + \frac{\hat{A}}{2}. \quad (1)$$

Rezultă deci că mulțimea punctelor care realizează evenimentul :

$$\widehat{CMB} > 90^\circ + \frac{\hat{A}}{2} \text{ este } \gamma(l_0) = \overline{OD}.$$

Măsura mulțimii punctelor situate pe bisectoarea unghiului A este $\gamma(l) = AD$. Din figură deducem :

$$\frac{AD}{\sin B} = \frac{BD}{\sin \frac{A}{2}} = \frac{\frac{ac}{b+c}}{\sin \frac{A}{2}}. \quad (2)$$

De unde rezultă :

$$AD = \frac{ac \sin B}{(b+c) \sin \frac{A}{2}} = \frac{2s}{(b+c) \sin \frac{A}{2}}. \quad (3)$$

Din triunghiul dreptunghic OEA ($OE \perp AC$), rezultă :

$$OA = \frac{r}{\sin \frac{A}{2}} = \frac{s}{p \sin \frac{A}{2}}. \quad (4)$$

De unde avem :

$$OD = AD - OA = \frac{2sp - s(b+c)}{p(b+c) \sin \frac{A}{2}} = \frac{sa}{p(b+c) \sin \frac{A}{2}} \quad (5)$$

$$P(\gamma) = \frac{\gamma(l_0)}{\gamma(l)} = \frac{OD}{AD} = \frac{sa}{p(b+c) \sin \frac{A}{2}} \cdot \frac{(b+c) \sin \frac{2A}{2}}{2s} = \frac{a}{24}. \quad (6)$$

Cap. 24. Probleme cu conținut practică

Soluție :

$$1. 20 \text{ kg} \cdot 15^\circ\text{C} \cdot 0,09 \text{ cal/g}^{-1} \cdot \text{grd}^{-1} + 120 \text{ kg} \cdot 1 \text{ cal/g}^{-1} \cdot \text{grd}^{-1} 15^\circ\text{C} + \\ + 80 \text{ kg} \cdot 1 \text{ cal/g}^{-1} \cdot \text{grd}^{-1} \geq 20 \text{ kg} 30^\circ\text{C} \cdot 0,09 \text{ cal/g}^{-1} \cdot \text{grd}^{-1} + \\ + (120 \text{ kg} + x) 1 \text{ cal/g}^{-1} \cdot \text{grd}^{-1} \cdot 30^\circ\text{C};$$

$$20 \text{ kg} \cdot 15^\circ\text{C} \cdot 0,09 \text{ cal} \cdot \text{g}^{-1} \cdot \text{grd}^{-1} + 120 \text{ kg cal g}^{-1} \text{grd}^{-1} \cdot 15^\circ + \\ + 80 \text{ kg} \cdot 1 \text{ cal g}^{-1} \cdot \text{grd}^{-1} x \leq 20 \text{ kg} \cdot 40^\circ\text{C} \cdot 0,09 \text{ cal} \cdot \text{g}^{-1} \cdot \text{grd}^{-1} + \\ + (120 \text{ kg} + x) \cdot 1 \text{ cal} \cdot \text{g}^{-1} \cdot \text{grd} \cdot 40^\circ\text{C}.$$

Rezultă : $36,540 \text{ kg} \leq x \leq 76,125 \text{ kg}.$

2. Fie $0 < b < a$. Frația $\frac{a}{b}$ este subunitară, numărătorul și

numitorul sînt pozitivi. Din diferența $\frac{a+c}{b+c} - \frac{a}{b}$ pentru

$0 < c$, rezultă $\frac{a+c}{b+c} - \frac{a}{b} = \frac{(b-a)c}{b(b+c)} < 0$, deoarece conform

datelor avem $0 < b < a$ și $0 < c$. Atunci în cazul considerat avem:

$\frac{a+c}{b+c} < \frac{a}{b}$. O fracție subunitară al cărui numărător și numitor

sînt pozitivi, se micșorează dacă numărătorului și numitorului i se adaugă același număr pozitiv. Raportul dintre suprafața pardoselii și suprafața ferestrelor se micșorează dacă se măresc simultan cu aceeași cantitate. Exemplu :

— Fie suprafața pardoselii 24 m^2 , iar a ferestrelor 2 m^2 . Vom avea $\frac{24}{2} \cdot 100 = 1200\%$. Dacă vom mări în același timp cu

6 m^2 , vom obține : $\frac{30}{8} \cdot 100 = 375\% < 1200\%$.

3. Din formula aplicată în fizică $\frac{1}{g} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$, unde b este distanța imaginii, g distanța obiectului, f distanța focală a oglinzii concave, rezultă :

$$\frac{b}{g} = \frac{f}{g - f}. \quad (1)$$

Factorul de proporționalitate dintre mărirea liniară a imaginii și a obiectului este $\frac{b}{g}$. Din ecuația (1), ținând cont de datele problemei, rezultă sistemul de ecuații :

$$\frac{f}{|g - f|} > 2; \frac{f}{|g - f|} < 3. \quad (2)$$

Distingem două cazuri :

1) — Formarea unei imagini reale. Dacă $f < g$, atunci avem $0 < g - f$ și deci $|g - f| = g - f$. În acest caz sistemul (2) ia forma :

$$\begin{cases} \frac{f}{g - f} > 2 \\ \frac{f}{g - f} < 3 \end{cases} \quad (3)$$

Dacă rezolvăm sistemul (3) în raport cu g , obținem :

$$1 \frac{1}{3} f < g < 1 \frac{1}{2} f.$$

2) — Forma unei imagini virtuale. Dacă $g < f$ și, deci, $g - f < 0$, atunci avem $|g - f| = f - g$. În acest caz sistemul (2) devine :

$$\begin{cases} \frac{f}{f - g} > 2 \\ \frac{f}{f - g} < 3 \end{cases} \quad (4)$$

Rezultă $\frac{1}{2}f < g < \frac{2}{3}f$.

În cazul în care $g = f$, raza reflectată este dirijată paralel cu axa optică deci nu se produce nici o imagine.

4. Pentru ca masa sulului de hîrtie să se micșoreze cu m_1 (kg), ea trebuie derulată pînă la diametrul d_1 (cm). Dacă masa ar trebui să se micșoreze cu m_2 (kg), sulul ar trebui derulat pînă la diametrul d_2 . Fie diametrul căutat notat cu d_x .

Din $m_1 \leq m_x \leq m_2$, rezultă $d_2 \leq d_x \leq d_1$. (1)

Pentru volumul întregului sul de hîrtie și hîrtia derulată, se obține :

$$V = \frac{\pi b D^2}{4} \quad (2)$$

$$V_1 = \frac{\pi b (D^2 - d_1^2)}{4} \quad (3)$$

$$V_2 = \frac{\pi b (D^2 - d_2^2)}{4} \quad (4)$$

În acest caz b este lățimea sulului, V — volumul întregului sul, iar V_1 și V_2 — volumul hîrtiei derulate cu masa m_1 și, respectiv, cu masa m_2 . Fie D — diametrul întregului sul de hîrtie. Evident, vom avea : $\frac{m_1}{m_2} = \frac{V_1}{V_2}$ și $\frac{m_2}{m} = \frac{V_2}{V}$. Prin urmare, rezultă :

$$\frac{m_1}{m} = \frac{D^2 - d_1^2}{D^2} \quad (5)$$

$$\frac{m_2}{m} = \frac{D^2 - d_2^2}{D^2} \quad (6)$$

și, mai departe :

$$d_1 = D \sqrt{\frac{m - m_1}{m}} \quad (7)$$

$$d_2 = D \sqrt{\frac{m - m_2}{m}} \quad (8)$$

Din (7), (8) și (1) rezultă :

$$D \sqrt{\frac{m - m_2}{m}} \leq d_z \leq D \sqrt{\frac{m - m_1}{m}}. \quad (8)$$

5. Fie x adâncimea arăturii iar puterea tractorului y (CP). Atunci pentru aratul unui hectar de teren la o rezistență specifică f (N/cm²) se va consuma un lucru mecanic :

$$a \cdot x \cdot f \cdot \frac{10\,000 \text{ m}^2}{a}$$

În acest caz se consideră (a) lățimea brazdei în m, iar după simplificări se obține $10^4 \cdot f \cdot x \text{ m}^2$. Dacă lucrul mecanic se efectuează în timpul t , atunci puterea necesară va fi :

$$\frac{10^4 \cdot f \cdot x}{75 \cdot 3600}, \text{ adică } \frac{f x}{27 f} \cdot \frac{m \cdot CP \cdot h}{N}.$$

În mod analog rezultă puterea necesară pentru aratul unui hectar, în timpul t_1 (în ore) la rezistența specifică a terenului de f_1 (în N/cm²), și anume :

$$\frac{f_1 x}{27 t_1} \cdot \frac{m \cdot CP \cdot h}{N}.$$

Problema conduce la sistemul :

$$\frac{f x}{27 t} \leq y \leq \frac{f_1 x}{27 t_1},$$

unde $0,1 \text{ m} < x < 0,85 \text{ m}$, trebuie să fie adevărat.

Pentru $f = 8 \text{ N/cm}^2$, $t = 1 \text{ h}$; $f_1 = 12 \text{ N/cm}^2$ și $t_1 = 1,4 \text{ h}$, rezultă :

$$296,3 \text{ CP} \cdot \text{m}^{-1} x \leq y \leq 317,6 \text{ CPm}^{-1} x.$$

Fie $x = 0,25 \text{ cm}$, rezultă $74,1 \text{ CP} \leq y \leq 79,4 \text{ CP}$.

6. Problema duce la sistemul de inecuații :

$$\frac{24}{x - 6} + \frac{24}{x + 6} \leq 3. \quad 6 < x.$$

Acest sistem poate fi simplificat astfel :

$$0 \leq x^2 - 16x - 36, \quad 6 < x.$$

De aici pentru viteza măsurată în km/h, se obține $18 \leq x$.

7. Dacă notăm cu R_1, R_2, \dots, R_n rezistența celor n conductori dați, cu R_s rezistența totală pentru conductorii legați în serie și R_p pe cea a conductorilor legați în paralel, în inecuația lui Bun-jakovski, avem :

$$(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) \geq (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n),$$

mărimile a_1, a_2, \dots, a_n se pot înlocui cu $\frac{1}{\sqrt{R_1}}, \frac{1}{\sqrt{R_2}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{R_n}}$, iar mărimile :

b_1, b_2, \dots, b_n , respectiv cu $\sqrt{R_1}, \sqrt{R_2}, \dots, \sqrt{R_n}$, obținem :

$$\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n} \right) (R_1 + R_2 + \dots + R_n) \geq n^2. \quad (1)$$

În această inecuație n este un număr cunoscut dat inițial. De aici, tragem următoarea concluzie :

$$\left[\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n} \right) (R_1 + R_2 + \dots + R_n) \right] \max = n^2,$$

aceasta avînd loc numai atunci cînd $R_1 = R_2 = \dots = R_n$, cînd toate rezistențele sînt egale între ele. Conform cunoscutelor legi din fizică privind rezistența conductorilor legați în paralel și în serie, avem : $R_r = R_1 + R_2 + \dots + R_n$, respectiv :

$$\frac{1}{R_p} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n}.$$

Astfel pentru problema dată în ecuația (2) se poate simplifica în felul următor :

$$\frac{R_r}{R_p} \geq n^2.$$

unde $\frac{R_r}{R_p} = n^2$, are loc atunci și numai atunci cînd toate rezisten-

țele sînt egale, deci : $R_1 = R_2 = \dots = R_n$.

Exemplu numeric :

Fie $n = 3$; $R_1 = 2\Omega$, $R_2 = 3\Omega$ și $R_3 = 4\Omega$.

Atunci $R_e = 6\Omega$, $R_p = \frac{2}{3}\Omega$, $\frac{R_e}{R_p} = 6 : \frac{2}{3} = 9 = 3^2$.

$$R_R = (2 + 3 + 4)\Omega = 9\Omega; R_p = \frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}}\Omega = \frac{12}{13}\Omega;$$

$$\frac{R_R}{R_p} = 9 : \frac{12}{13} = 9 \frac{3}{4} > 3^2 = 9.$$

Fie $n = 3$, $R_1 = R_2 = R_3 = 2\Omega$.

8. În ecuația lui Bunjakowski:

$$(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) \geq (a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n)^2,$$

vom pune: $b_1 = b_2 = \dots = b_n$, inecuația va lua forma:

$$(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)n \geq (a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2 \text{ sau:}$$

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n \leq \sqrt{(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)n}$$

a_1, a_2, \dots, a_n , fiind perimetrul ferestrelor în m,

$a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 = A$ — suprafața totală a ferestrelor în m^2 .

Atunci, din inecuația (1), rezultă:

$$4(a_1 + a_2 + \dots + a_n) \leq 4\sqrt{A_n},$$

unde $(a_1 + a_2 + \dots + a_n)$ este lungimea totală a perimetrelor celor n ferestre.

Rezultă că valoarea căutată se poate exprima prin inecuația:

$$[4(a_1 + a_2 + \dots + a_n)d] I_{\max} = 4\sqrt{A_n d} \quad (3)$$

inecuație ce este valabilă atunci când:

$$a_1 + a_2 = \dots = a_n = \frac{\sqrt{A_n}}{n} = \sqrt{\frac{A}{n}},$$

adică atunci când toate n ferestre sînt egale între ele.

9. Valoarea absolută pentru viteza proprie a bărcii, o vom nota cu y m/s, iar viteza curentului apei cu x m/s. Problema conduce atunci la sistemul de inecuații:

$$\frac{60 \text{ m}}{(x + y) \text{ m/s}} \geq 5,4 \text{ s.}$$

$$\frac{60 \text{ m}}{(y - x) \text{ m/s}} \leq 7,2 \text{ s}; 0 \frac{\text{m}}{\text{s}} < x \frac{\text{m}}{\text{s}} < y \frac{\text{m}}{\text{s}}, \quad (1)$$

unde avem :

$$(30 + x) \frac{\text{km}}{\text{h}} \leq y \frac{\text{km}}{\text{h}} \leq (40 - x) \frac{\text{km}}{\text{h}} \quad (2)$$

$$0 \frac{\text{km}}{\text{h}} < x \frac{\text{km}}{\text{h}} \leq 5 \frac{\text{km}}{\text{h}}.$$

Exemplu numeric :

— Fie viteza curentului de $2 \text{ km/h} = 0,55 \text{ m.s}^{-1}$; atunci valoarea absolută a vitezei proprii a bărcii va fi :

$$32 \frac{\text{km}}{\text{h}} \leq y \frac{\text{km}}{\text{h}} \leq 38 \frac{\text{km}}{\text{h}}.$$

Probă. Considerăm viteza proprie de $35 \text{ km/h} = 9,72 \text{ m/s}$. Din sistemul de inecuații (1), rezultă :

$$\frac{60}{(9,72 + 0,55)} \text{ s} \approx 5,8 \text{ s} > 5,4 \text{ s},$$

$$\frac{60}{(9,72 - 0,55)} \text{ s} \approx 6,5 \text{ s} < 7,2 \text{ s}.$$

10. Notînd cu x distanța căutată \overline{DK} din figura 24.1 se vede că ochii observatorului sînt protejați împotriva efectului de orbire dacă unghiul \widehat{DAC} nu este mai mic decît unghiul \widehat{BAC} , adică avem :

$$\text{tg } \widehat{BAC} \leq \text{tg } \widehat{DAC}. \quad (1)$$

Din triunghiurile dreptunghice BAC și DAC se obține :

$$\text{tg } \widehat{DAC} = \frac{\overline{DK}}{\overline{AK}} = \frac{x}{r_2 + r_1} \quad (2)$$

respectiv :

$$\text{tg } \widehat{BAC} = \frac{\overline{CB}}{\overline{AC}} = \frac{h}{r_2 + r_1 + l} \quad (3)$$

Din ecuațiile (1) și (3), rezultă inecuațiile :

$$\frac{h}{r_2 + r_1 + l} \leq \frac{x}{r_2 + r_1} \quad (4)$$

respectiv :

$$h \cdot \frac{r_2 + r_1}{r_2 + r_1 + l} \leq x.$$

Exemplu numeric : Fie dat $h = 1,00$ m ; $r_2 = 0,25$ m ; $r_1 = 0,01$ m și $l = 1,00$ m. vom avea :

$$l \cdot \frac{0,26}{1,26} \text{ m} \leq x, \text{ sau } 21 \text{ cm} \leq x = \overline{DK}.$$

11. Vom prelungi dreptele \overline{AC} și \overline{BD} pînă la intersectarea lor și vom nota acest punct de intersecție cu E (vezi fig. 24.2), apoi, aplicînd teorema cosinusurilor în triunghiul ECD , vom obține :

$$\overline{EC}^2 + \overline{ED}^2 - 2\overline{EC} \cdot \overline{ED} \cos \widehat{CED} = \overline{CD}^2. \quad (1)$$

Mai departe :

$$\widehat{CED} = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ \quad (2)$$

$$\overline{AE} = AB \operatorname{tg} 60^\circ = AB \sqrt{3} \quad (3)$$

$$\overline{EC} = (AB \sqrt{3} + 200 \text{ m})$$

$$\overline{BE} = \frac{AB}{\cos 60^\circ} = 2 AB$$

$$\overline{ED} = (2 AB + 100) \quad (4)$$

$$\overline{CD} \leq 130 \text{ m}. \quad (5)$$

Din ecuația (1) și inecuația (5), după simplificare, rezultă următoarea inecuație de gradul II cu o necunoscută :

$$\overline{AB}^2 + 100 \overline{AB} - 1540 \leq 0.$$

Rezolvînd această inecuație și, ținînd seama de faptul că problema are sens numai pentru valorile $0 \leq \overline{AB}$, vom obține :

$$0 \leq AB \leq 13,56 \text{ m}$$

12. Fie M centrul pămîntului, F racheta geofizică, iar $FA = x$ înălțimea de deasupra suprafeței terestre. Fie FN distanța orizontului vizibil. Astfel, în triunghiul dreptunghic FMN vom avea :

$$\sqrt{(\overline{MA} + x)^2 - \overline{MN}^2} = \overline{FN} \quad (1)$$

Dacă în datele problemei considerăm $\overline{MA} = \overline{MN} = 6370$ km și $2000 \text{ km} \leq \overline{FN}$, după simplificări rezultînd următoarea inecuație de gradul II cu o necunoscută :

$$0 \leq x^2 + 12\,740 x - 4\,000\,000. \quad (2)$$

Această problemă are sens numai pentru $0 < x$. Rezolvind ecuația (2) obținem :

$$x > 310 \text{ km.}$$

13. Din triunghiul oarecare COC_1 (vezi fig. 24.3) cu ajutorul teoremei cosinusului, obținem :

$$(l_0 + a)^2 = l_0^2 + s_c^2 - 2s_cl_0 \cos(\theta + \gamma)$$

sau :

$$s_c^2 - 2l_0 s_c \cos(\delta + \gamma) - (2al_0 + a^2) = 0.$$

Rezolvând această ecuație, obținem :

$$s_{c_{1,2}} = l_0 \cos(\theta + \gamma) \pm \sqrt{l_0^2 \cos^2(\theta + \gamma) + 2al_0 + a^2}.$$

Vom alege valoarea lui s_{c_1} , care are semnul pozitiv înaintea radicalului, obținând $s_c = s_{c_1}$. În cazuri speciale, obținem :

$$\delta = 80^\circ, a = 5,5 \text{ cm}, l_0 = 23,9 \text{ cm} \text{ și } \gamma = 60^\circ \text{ și :}$$

$$s_c = 23,9 \cos(80^\circ + 60^\circ) + \sqrt{23,9^2 \cos^2(80^\circ + 60^\circ) + 2 \cdot 5,5 \cdot 23,9 + 5,5^2}$$

$$s_c \approx 6,7 \text{ cm.}$$

14. În trapezul $ABCD$, vom nota înălțimea \overline{BE} și unghiul \widehat{BAD} cu x .

Vom avea :

$$\overline{AD} = 2a \cos x + a \text{ și } \overline{BE} = a \sin x,$$

și suprafața trapezului va fi :

$$A = a^2 (1 + \cos x) \sin x, \quad (1)$$

sau, aplicînd formulele trigonometrice :

$$A = 4a^2 \cdot \cos^3 \frac{x}{2} \sin \frac{x}{2}. \quad (2)$$

Suprafața A ia valoarea maximă dacă $\cos^3 \frac{x}{2} \sin \frac{x}{2}$ ia un maximum și acest produs este pozitiv deoarece, conform condițiilor problemei, avem : $0^\circ < x < 90^\circ$.

Rezultă :

$$\cos^3 \frac{x}{2} \sin \frac{x}{2} = \sqrt{\cos^6 \frac{x}{2} \cdot \sin^2 \frac{x}{2}}$$

$$= \sqrt{\cos^2 \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2} \sin^2 \frac{x}{2}}$$

$$\cos^3 \frac{x}{2} \sin \frac{x}{2} = \sqrt[27]{\frac{\cos^2 \frac{x}{2}}{3} \cdot \frac{\cos^2 \frac{x}{2}}{3} \cdot \frac{\cos^2 \frac{x}{2}}{3} \cdot \sin^2 \frac{x}{2}}$$

Dar :

$$\frac{\cos^2 \frac{x}{2}}{3} + \frac{\cos^2 \frac{x}{2}}{3} + \frac{\cos^2 \frac{x}{2}}{3} + \sin^2 \frac{x}{2} = 1, \text{ iar, pe baza teo-}$$

remei menționate în observație, se stabilește că :

$\cos^6 \frac{x}{2} \sin^2 \frac{x}{2}$ și, deci, $\cos^3 \frac{x}{2} \sin \frac{x}{2}$, ia valoare maximă atunci când :

$$\frac{\cos^2 \frac{x}{2}}{3} = \sin^2 \frac{x}{2}.$$

Soluția acestei ecuații trigonometrice este :

$$x = 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}} = 60^\circ.$$

15. Fie un dreptunghi $ABCD$ într-un cerc cu diametrul dat. Suprafața $ABCD$ este exprimată prin ecuația : $A = \overline{AB} \cdot \overline{BC}$. Problema conduce astfel la a determina valorile pentru \overline{AB} și \overline{BC} , astfel încât produsul lor pentru diagonala $\overline{AC} = d$, dată inițial, să fie minimă. Deoarece avem O mai mic decât A , valoarea AB și

BC , care corespund maximului A corespunde maximului A^2 deoarece funcția $A = AB \cdot BC$ se pot înlocui prin: $A^2 = \overline{AB^2} \cdot \overline{BC}$, conform teoremei lui Pitagora, avem: $\overline{AB^2} + \overline{BC^2} = \overline{AC^2} = d^2$. De aici rezultă că $A^2 = \overline{AB^2} \cdot \overline{BC^2}$ constituie produsul a doi factori pozitivi a căror sumă are o valoare constantă. Aceasta este maximă atunci când $\overline{AB^2} = \overline{BC^2}$. Dar pentru $\overline{AB} = \overline{BC}$, dreptunghiul căutat devine pătrat. Deci, dacă dintr-o bară trebuie să se taie o bară dreptunghiulară cu deșeu minim, atunci secțiunea ei trebuie să fie pătrată. Aceasta întrucât produsul a doi factori pozitivi, a căror sumă $x + (p - x) = p$ este cunoscută, ia valoarea maximă atunci când ambii factori sînt egali:

$$x = p - x. \quad (2)$$

Din (2) rezultă că din toate dreptunghiurile cu perimetrul dat $2p$ pătratul are cea mai mare suprafață.

16. Volumul cisternei este:

$$V = \pi r^2 h = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{2\pi r^2 \cdot \pi r h \cdot \pi r h},$$

unde:

$$0 < 2\pi r^2 \text{ și } 0 < \pi r h.$$

În problemă avem:

$$2\pi r^2 + \pi r h + \pi r h = 2\pi r^2 + 2\pi r h = A.$$

În condițiile problemei, A poate fi considerată o constantă dată. Rezultă că V ia valoarea sa maximă când $2\pi r^2 = \pi r h$. Aceasta înseamnă că $2r = h$ și că cilindrul are înălțimea egală cu lungimea diametrului.

Din sistemul de ecuații:

$$\begin{cases} 2r = h \\ 2\pi r^2 + 2\pi r h = A \end{cases}$$

$$\text{rezultă că } r = \sqrt{\frac{A}{6\pi}} \text{ și } h = 2 \sqrt{\frac{A}{6\pi}}.$$

Volumul cisternei ia așadar valoarea maximă când:

$$V = \pi \left(\sqrt{\frac{A}{6\pi}} \right)^2 \cdot 2 \sqrt{\frac{A}{6\pi}} = \frac{A}{3} \sqrt{\frac{A}{6\pi}}.$$

17. Problema cere ca relațiile dintre raza r a suprafeței de bază și înălțimea h a cilindrului, să se determine astfel încît pentru volumul V stabilit anterior, să se poată determina suprafața A_0 ca valoare minimă. Astfel avem :

$$A_0 = 2\pi rh + 2\pi r^2 \quad (1)$$

$$h = \frac{V}{\pi r^2} \quad (2)$$

De aici obținem :

$$A_0 = \frac{2V}{r} + 2\pi r^2 = \frac{V}{r} + \frac{V}{r} + 2\pi r^2. \quad (3)$$

Astfel se va afla valoarea razei r pentru care suma $\frac{V}{r} + \frac{V}{r} + 2\pi r^2$ devine minimă. Expresia $\frac{V}{r} + \frac{V}{r} + 2\pi r^2 = 2\pi V$, formează o sumă a trei termeni de adunare pozitivi al căror produs pentru volumul V dat inițial este o constantă.

Pentru volumul V al suprafeței A_0 , ia valoarea maximă atunci cînd : $\frac{V}{r} = 2\pi r^2$, adică : $V = 2\pi r^3$. (4)

Din ecuațiile (2) și (4), rezultă în final :

$$h = 2r. \quad (5)$$

18. Masa piesei este $m = \rho V = \frac{\rho\pi}{4} (d^2 + D^2y)$, unde x și y sînt lungimile corespunzătoare pieselor cu diametrul d și D .

Distanța de la partea frontală a piesei cilindrice cu diametrul D pînă la centrul de greutate al piesei este :

$$a = \frac{\rho \frac{\pi}{4} \left[\frac{D^2 y^2}{2} + d^2 x \left(\frac{x}{2} + y \right) \right]}{m}.$$

După transformare, obținem un sistem de două ecuații cu două necunoscute :

$$\frac{4m}{\pi \rho d^2} = x + \frac{D^2}{d^2} y; \quad \frac{4am}{\pi \rho d^2} = \frac{x^2}{2} + xy + \frac{1}{2} \cdot \frac{D^2}{d^2} y^2.$$

Eliminând pe x din această ecuație, obținem :

$y^2 - 2Ay + B = 0$, unde am introdus, pentru prescurtare,

$$A = \frac{4m}{\pi \rho d^2} \text{ și } B = A \frac{A \frac{D^2}{d^2} - 2a}{\frac{D^2}{d^2} - 1}.$$

Coefficientul A dă înălțimea unui cilindru cu diametrul D , a cărui masă este m . Rezolvând ecuația dată, găsim lungimea piesei cu diametrul D : $y = A \pm \sqrt{A^2 - B}$ sau, după transformarea

corespunzătoare $y = A \left(1 \pm \sqrt{\frac{\frac{2a}{A} - 1}{\frac{D^2}{d^2} - 1}} \right).$

Cum $2a > A$ și $D > d$, sînt valabile semnele dinaintea radicalului. Totuși, A trebuie să fie mai mare decît y , astfel masa piesei va fi mai mare decît m .

Prin urmare : este valabilă relația :

$$y = A \left(1 - \sqrt{\frac{\frac{2a}{A} - 1}{\frac{D^2}{d^2} - 1}} \right).$$

Lungimea piesei cu diametrul d o găsim în prima ecuație a sistemului :

$$x = \frac{D^2}{d^2} A - \frac{D^2}{d^2} y = \frac{D^2}{d^2} (A - y);$$

pentru valorile numerice date, obținem :

$$A = \frac{4 \cdot 85 \cdot 10^3 \text{ g}}{\pi \cdot 7,85 \text{ g cm}^{-3} (18 \text{ cm}^2)} \approx 42,6 \text{ cm}^3$$

$$y = 42,6 \left(1 - \sqrt{\frac{\frac{2 \cdot 28}{42,60} - 1}{\left(\frac{18}{10}\right)^2 - 1}} \right) \approx 26,6 \text{ cm.}$$

$$x = \left(\frac{18}{10}\right)^2 (42,6 - 26,6) \approx 52 \text{ cm.}$$

19. Din figura 24.6 se vede că avem :

$$a^2 + h^2 = d^2.$$

Grinda va avea atunci forța portantă maximă, cînd între a și h există relația ah^2 , unde $0 < a$ și $0 < h$.

Avem astfel :

$$ah^2 = 2 \sqrt{a^2 \cdot \frac{h^2}{2} \cdot \frac{h^2}{2}}.$$

Dar:

$$a^2 + \frac{h^2}{2} + \frac{h^2}{2} = a^2 + h^2 = d^2, \text{ este o m\u0103rim\u0103 constant\u0103 dat\u0103 ini\u021bial.}$$

$$\text{Produsul } ah^2 \text{ ia de asemenea valoare maxim\u0103 atunci c\u00e2nd } a^2 = \frac{h^2}{2}. \quad (3)$$

De aici rezult\u0103 c\u0103 dintr-un trunchi circular de diametru d se poate ob\u021bine o grind\u0103 de sec\u021biune ortogonal\u0103 cu l\u0103\u021bimea a \u0219i \u00een\u0103l\u021bimea h de portant\u0103 maxim\u0103, dac\u0103 \u00een\u0103l\u021bimea ia valori de : $\frac{1}{3} d\sqrt{3}$ respectiv $\frac{1}{3} d\sqrt{6}$.

20. Vom nota cu x, y \u0219i z lungimile muchiilor. Volumul chio\u0219cului va fi :

$$V = \frac{1}{6} x y z. \quad (1)$$

M\u0103rimile x, y \u0219i z pot fi considerate ca m\u0103rimi variabile. Suma lor $x + y + z = l$, este o constant\u0103. Volumul ia valoarea maxim\u0103 c\u00e2nd avem :

$$x = y = z = \frac{l}{3}.$$

Substituind aceast\u0103 valoare \u00een ecua\u021bia (1) rezult\u0103 :

$$V_{\max} = \frac{l^3}{162}.$$

21. Se separ\u0103 partea algebric\u0103 de cea transcendent\u0103 $\frac{x-2}{0,1} = \sin x$, sau :

$$10x - 20 = \sin x,$$

apoi se reprezint\u0103 curbele :

$$y = 10x - 20 \quad \text{\u0219i} \quad y = \sin x.$$

Abscisa punctului A , OA' este abscisa punctului de intersecție a celor două curbe. $x = OA' \approx 2,1$ rad.

Din tabelele care transformă radianii în grade se obține $x \approx 119^\circ$ sau se calculează $x = 2,1 \cdot \frac{\pi}{180} \approx 119^\circ$.

22. Fie $AC + l : BC = h$. Vectorul AA'' , a cărei direcție trece prin B , este viteza mișcării ce trebuie să rezulte din compunerea vitezei v a apei și a vitezei v_1 a înotătorului.

Din $\triangle AA'A''$ rezultă :

$$\sin x + \frac{A'A''}{v_1} = \frac{A''A''' - A'A''}{v_1}.$$

Din asemănarea triunghiurilor $A'A''A$ și CBA , se calculează $A'A'' = \frac{hv_1}{l} \cos x$.

Înlocuind în relația precedentă, se obține :

$$V_1 \sin x = V - \frac{hV_1}{l} x \cos x,$$

adică ecuația trigonometrică :

$$lV_1 \sin x + hV_1 \cos x = V_1.$$

Ea este de forma : $a \sin x + b \cos x = c$, a cărei reducere la două ecuații trigonometrice simple se obține folosind metoda unghiului auxiliar.

$$\sin(x + \alpha) = \frac{c}{a^2 + b^2} \quad \text{unde} \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{a}.$$

În cazul problemei :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{h}{l}, \quad \alpha = \operatorname{arctg} \frac{h}{l} \quad \text{și} \quad \sin(x + \alpha) = \frac{lv}{V_1 \sqrt{l^2 + h^2}}.$$

În cazul particular ecuația este :

$$\sin x + \cos x = 1.$$

Pentru $a = l$, $b = l$ și $c = l$, rezultă :

$$\alpha = \operatorname{arctg} 1 = 45^\circ$$

$$\sin(x + 45^\circ) = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

adică cel mai mic argument pozitiv este :

$$(x + 45^\circ) = 45^\circ$$

și, aplicând formulele de periodicitate :

$$x + 45^\circ = 360^\circ k + 45^\circ$$

$$x + 45^\circ = (2k + 1)180^\circ - 45^\circ.$$

Singura soluție acceptabilă ($0 \leq x \leq 90^\circ$) este $x = 0$; deci, în acest caz, înotătorul pleacă perpendicular pe direcția apei.

23. Înlocuind în ecuațiile mișcării $V_0 = 300$ $x = 1200$ și $y = 0$, se obține din prima ecuație : $t = \frac{4}{\cos \alpha}$, iar din a doua ecuație (excluzând $t = 0$) :

$$t = \frac{600 \sin \alpha}{9,81},$$

adică :

$$\frac{4}{\cos \alpha} = \frac{400 \sin \alpha}{9,81},$$

sau :

$$\sin 2\alpha = \frac{9,81}{75} \cdot (1)$$

Din tabele se obțin valorile :

$$\alpha' = 3^\circ 45' \text{ (tragere de distrugere)}$$

$$\alpha'' = 86^\circ 15' \text{ (tragere prin doborire)}$$

și timpurile respective :

$$t' = 4 \text{ s}; t'' = 61 \text{ s}.$$

24. Spațiul descris de culisa AB este $s = a \cos \omega t$ și viteza $v = -a\omega \sin \omega t$, unde amplitudinea mișcării este a ; frecvența $s = 6$ ture/min, perioada $T = \frac{1}{f} = \frac{1}{6} \text{ min} = 10 \text{ s}$.

Pulsația va fi :

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{10} = \frac{\pi}{5} \text{ rad/s}.$$

Viteza este deci reprezentată prin relația :

$$v = 10 \frac{\pi}{5} \sin \frac{\pi t}{5}$$

$$v = -2\pi \sin \frac{\pi t}{5},$$

iar curbele vor fi :

$$s = 10 \cos \frac{\pi t}{5}$$

$$v = -2\pi \sin \frac{\pi t}{5}.$$

În particular, pentru $\alpha = 30^\circ$, vom avea :

$$v = -2\pi \sin 30^\circ = -3,14 \text{ m/s}.$$

25. (1) Din datele problemei rezultă următoarea inecuație :

$$(1) \quad A \leq x \frac{60 \cdot 75 \cdot 981 \text{ J}}{s} \cdot 200 \cdot 3600 \text{ s}.$$

În acest caz, x este numărul de tractoare căutat, iar A lucrul mecanic total (în J) pentru ararea suprafeței unui teren de 3 000 ha. Pentru determinarea lui A se calculează mai întâi lucrul mecanic necesar pentru un hectar :

$$5000 \cdot 2 \cdot 0,35 \cdot 12\,000 \cdot 9,81 \text{ J} = 35 \cdot 12 \cdot 10^5 \text{ J}.$$

De aici, rezultă pentru întreaga suprafață :

$$(2) \quad A \leq 5000 \cdot 35 \cdot 12 \cdot 10^5 \text{ J} = 6 \cdot 35 \cdot 10^9 \text{ J}.$$

Astfel, rezultă :

$$6 \cdot 35 \cdot 10^9 \text{ J} \leq 6 \cdot 75 \cdot 72 \cdot 10^5 \text{ J } x$$

sau $65 \leq x$.

26. Această problemă ne conduce la următorul sistem de inecuații :

$$\begin{cases} 1400 \text{ m} < 1900 \text{ m} - 4 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot x; \\ 1580 \text{ m} - 4,5 \frac{\text{m}}{\text{s}} < 1400 \text{ m}; \end{cases}$$

sau :

$$\left(1900 \text{ m} - 4 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot x\right) - 1400 \text{ m} < 1400 \text{ m} - \left(1580 \text{ m} - 4,5 \frac{\text{m}}{\text{s}} x\right).$$

În acest caz x este timpul căutat, care a trecut de la saltul parașu-
tiștilor A și B (vezi fig. 24.8). Soluția sistem acestui este :

$$80 < x < 125 \text{ s.}$$

27. Problema conduce la un sistem de două inecuații :

$$\begin{cases} \frac{6,5 \text{ m}}{0,85 \text{ m} \cdot 0,75} \cdot 750 \text{ m} \geq 5 \text{ h} \cdot x \frac{\text{m}}{\text{h}} \\ \frac{6,5 \text{ m}}{0,85 \text{ m} \cdot 0,75} \cdot 750 \text{ m} \cdot 2 \leq 6 \text{ h} x \frac{\text{m}}{\text{h}} \end{cases}$$

În acest caz viteza căutată s-a considerat $x \text{ m} \cdot \text{h}^{-1}$. Dacă rezolvăm
acest sistem și-l convertim în $\text{km} \cdot \text{h}^{-1}$ obținem :

$$2,5 \frac{\text{km}}{\text{h}} \leq x \frac{\text{km}}{\text{h}} \leq 3 \frac{\text{km}}{\text{h}}.$$

28. Pentru un sabot de frână, se calculează forța de frecare după
formula $F = N \cdot \mu$. Momentul de frecare este :

$M_{fr} = F \cdot D = N \cdot \mu \cdot D$. După înlocuirea valorii pentru M_{fr} în
inegalitatea $M_{fr} \geq \beta M$, obținem :

$$N \cdot \mu \cdot D \geq \beta \cdot M, \text{ din care } N \geq \frac{\beta \cdot M}{\mu D} = \frac{1,75 \cdot 3000 \text{ kg} \cdot \text{cm}}{0,15 \cdot 50 \text{ cm}} = 700 \text{ kg.}$$

29. Evident că la începutul deplasării în sus tensiunea în cablu
este mai mare decât la începutul deplasării în jos. La începutul de-
plasării în sus încărcarea cablului trebuie să fie egală cu F . Astfel
rezultă inecuația :

$$\frac{F}{x} < \frac{\sigma}{n}$$

x fiind secțiunea transversală căutată a cablului în cm^2 . Avem :

$$F = (m \cdot g + m \cdot a)$$

de unde rezultă :

$$\left(\frac{mg + ma}{x} \right) < \frac{\sigma}{n}$$

iar de aici :

$$\frac{mg \left(1 + \frac{a}{g} \right) n}{\sigma} < x.$$

30. Notăm cu q_1 debitul ce trece prin țeava B pe secundă, iar cel care trece prin țeava C cu q_2 .

Pentru scăderea de presiune din țeava B , se utilizează relația :

$$h_1 = 0,83 \text{ kg} \cdot \text{dm}^{-3} \cdot \lambda_1 \cdot l_1 \frac{q_1^2}{d_1^5},$$

iar pentru țeava C :

$$h_2 = 0,83 \text{ kg} \cdot \text{dm}^{-3} \cdot \lambda_2 \cdot l_2 \frac{q_2^2}{d_2^5}.$$

După supoziția problemei, scăderea presiunii ar trebui să fie egală în cele două ramificații ale conductei.

Prin urmare :

$$h_1 = h_2 \text{ sau } \lambda_1 l_1 \frac{q_1^2}{d_1^5} = \lambda_2 l_2 \frac{q_2^2}{d_2^5}.$$

Cantitatea totală de apă pe fiecare secundă, care curge prin conductă este $q = q_1 + q_2$. În acest mod putem obține mărimile necunoscute q_1 și q_2 dintr-un sistem de două ecuații :

$$q_2^2 = \frac{\lambda_1 l_1}{\lambda_2 l_2} \left(\frac{d_2}{d_1} \right)^5 q_1^2; q_1 + q_2 = q.$$

Pentru simplificarea metodei de calcul se substituie :

$$X = \frac{\lambda_1 l_1}{\lambda_2 l_2} \left(\frac{d_2}{d_1} \right)^5.$$

Rezultă :

$$\begin{cases} q_2^2 = X q_1^2 \\ q_1 + q_2 = q. \end{cases}$$

Substituind valoarea lui q_2 din a doua ecuație în prima ecuație, obținem :

$$(q - q_1)^2 = X q_1^2,$$

sau :

$$q - q_1 = \pm q_1 \sqrt{X}.$$

Obținem cantitatea de apă ce curge prin țeava B , în unitatea de timp : $q_1 = \frac{q}{1 \pm \sqrt{X}}$, iar prin țeava C curge în unitatea de timp cantitatea de apă :

$$q_2 = q - q_1 \text{ sau } q_2 = q - \frac{q}{1 \pm \sqrt{X}} = \frac{\pm q \sqrt{X}}{1 \pm \sqrt{X}}.$$

Alegem semnul pozitiv dinaintea radicalului, căci astfel cantitatea de apă ce curge prin una din țevi ar fi negativă ceea ce nu este în concordanță cu ipoteza problemei.

De aceea :

$$q_1 = \frac{q}{1 + \sqrt{X}} \text{ și } q_2 = \frac{q \cdot \sqrt{X}}{1 + \sqrt{X}}.$$

Rezultă :

$$1) X = \frac{\lambda_1 l_1}{\lambda_2 l_2} \left(\frac{d_2}{d_1} \right)^5 = \frac{0,04 \cdot 30 \text{ m}}{0,03 \cdot 50 \text{ m}} \left(\frac{100 \text{ mm}}{50 \text{ mm}} \right)^5 \approx 25,6$$

$$2) \sqrt{X} \approx \sqrt{25,6} \approx 5,06;$$

$$3) q_1 = \frac{25 \text{ l.s}^{-1}}{1 + 5,06} \approx 4,13 \text{ l/s.}$$

$$4) q_2 = \frac{5,06}{1 + 5,06} \cdot 25 \text{ l/s} \approx 20,87 \text{ l/s.}$$

31. Fie triunghiul dreptunghic ABC . Avem deci $\overline{CD} \perp \overline{AB}$ (vezi fig. 24.11).

Trebuie demonstrată relația: $\overline{CD} \leq \frac{1}{2\sqrt{2}} (\overline{AC} + \overline{BC})$.

Dacă o aplicăm la ambele triunghiuri dreptunghice (ACD și BCD), obținem:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (\overline{CD} + \overline{AD}) \leq \overline{AC} \quad (1)$$

și

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (\overline{CD} + \overline{DB}) \leq \overline{BC}. \quad (2)$$

Prin adunarea ambelor inecuații, se obține:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (2 \overline{CD} + \overline{AB}) \leq \overline{AC} + \overline{BC}. \quad (3)$$

Dacă în inecuația (3) înlocuim \overline{AB} cu $\frac{\overline{AC} + \overline{BC}}{\sqrt{2}}$ rezultă:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left(2 \overline{CD} + \frac{\overline{AC} + \overline{BC}}{\sqrt{2}} \right) \leq \overline{AC} + \overline{BC}. \quad (4)$$

Rezolvând inecuația (4), obținem:

$$\overline{CD} \leq \frac{\overline{AC} + \overline{BC}}{2\sqrt{2}}; \quad (5)$$

în cazul $\overline{AC} = \overline{BC}$, această inecuație se transformă în ecuație.

32. În triunghiul dreptunghic ABC din figura 24.12, avem:

$$\overline{AC} = \overline{AB} \cos \alpha \quad (1)$$

și

$$\overline{BC} = \overline{AB} \cos \beta; \quad (2)$$

de aici, decurge:

$$\begin{aligned} \overline{AC} + \overline{BC} &= \overline{AB} (\cos \alpha + \cos \beta) \\ &= \overline{AB} \cdot 2 \cdot \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \\ &= \overline{AB} \cdot 2 \cdot \cos 45^\circ \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \end{aligned}$$

Așadar :

$$\overline{AC} + \overline{BC} = \overline{AB} \sqrt{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}; \quad (3)$$

se obține :

$$\overline{AB} = \frac{1}{\sqrt{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}} (\overline{AC} + \overline{BC}). \quad (4)$$

Deoarece însă $0 < \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \leq 1$, din formula (4) deducem :

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (\overline{AC} + \overline{BC}) \leq \overline{AB}. \quad (5)$$

Inecuația (5) se transformă în ecuație numai atunci când avem $\overline{AC} = \overline{BC}$ adică, numai dacă este vorba de un triunghi dreptunghic isoscel.

Din inecuația (5), ținând seama de relația $\overline{AB} < \overline{AC} + \overline{BC}$, se obține :

$$0 < (\overline{AC} + \overline{BC}) - \overline{AB} \leq \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) (\overline{AC} + \overline{BC})$$

$$0 < (\overline{AC} + \overline{BC}) - \overline{AB} \leq \frac{2 - \sqrt{2}}{2} (\overline{AC} + \overline{BC}).$$

33. Dacă în cazul acestei probleme se presupune că numărul orificiilor, diametrele lor și presiunea apei sînt egale, atunci cantitatea de apă irigată în unitatea de timp pe unitatea de suprafață este direct proporțională cu orificiile de stropire.

Deducem următoarea inecuație :

$$\pi \overline{AM}_1 \cdot \overline{AS} + \pi \overline{AM}_1^2 < 2\pi \cdot \overline{M}_2\overline{S} \cdot \overline{M}_1\overline{S}. \quad (1)$$

Dacă notăm cu x unghiul \widehat{ASM}_1 , avem :

$$\overline{M}_1\overline{S} = \overline{AS} \cos x; \quad \overline{M}_2\overline{S} = \frac{\overline{AS}}{2 \cos x} \text{ și } \overline{AM}_1 = \overline{AS} \sin x.$$

Înlocuind în inecuația (1) segmentele $\overline{M}_2\overline{S}$, $\overline{M}_1\overline{S}$ și \overline{AM}_1 , corespunzător relațiilor mai sus arătate, cu \overline{AS} , iar unghiul cu x , după simplificare obținem inecuația :

$$\sin^2 x + \sin x - 1 < 0. \quad (2)$$

Rezolvând această inecuație și ținând seama de relația $0 < x < 90^\circ$, obținem :

$$0 < x < 38^\circ 12'. \quad (3)$$

Deoarece $\widehat{AM_2B} = 360^\circ - 4x$, rezultă :

$$360^\circ - 4 \cdot 38^\circ 12' < \widehat{AM_2B} < 360^\circ, \quad (3)$$

adică :

$$207^\circ 12' < \widehat{AM_2B} < 360^\circ. \quad (4)$$

De aici rezultă că, pentru o presiune egală a apei și pentru aceeași densitate și mărime a orificiilor, instalația de irigare la care apa este ejectată prin orificiile din capacul conului cu un arc căruia îi corespunde un unghi la centru $207^\circ 12'$ este mai productivă decât instalația la care orificiile se află pe suprafața de bază și pe mantaua conului.

34. Înlocuind datele problemei în formula :

$$x = \frac{1}{2} g t^2 \sin \alpha,$$

obținem :

$$\sin \alpha = 0,1134 \text{ sau } \alpha = 6^\circ 0' \quad (0^\circ < \alpha < 90^\circ),$$

Viteza corpului coborînd pe planul înclinat de la înălțime este

$$v = \sqrt{2gh} = 6,06 \text{ m/s.}$$

36. Din triunghiul dreptunghic OAB (fig. 24.13) se ia :

$$OA^2 - AB^2 = OB^2, \text{ sau } \left(\frac{d}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{d}{2} - x\right)^2,$$

unde x este distanța căutată.

Dacă extragem rădăcina obținem :

$$\frac{d}{2} - x = \pm \frac{1}{2} \sqrt{d^2 - b^2}$$

de unde :

$$x_{1,2} = \frac{1}{2} (d \pm \sqrt{d^2 - b^2}). \quad (1)$$

Din problemă rezultă că $x = x_1 = \frac{1}{2} (d - \sqrt{d^2 - b^2})$, fiindcă x nu poate fi mai mare decât raza frezei și în cazul nostru :

$$x = \frac{1}{2} (100 \text{ mm} - \sqrt{100^2 \text{ mm}^2 - 80^2 \text{ mm}^2}) = 20 \text{ mm.}$$

Aranjind ecuația (1), obținem :

$$x = \frac{d}{2} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{b^2}{d^2}} \right). \quad (2)$$

Din ecuația (2), rezultă că, dacă mărim raportul b/d , drumul suplimentar crește și atinge valoarea maximă $\frac{b}{d} = 1$. În ultimul caz

$x = \frac{d}{2}$ iar $\frac{b}{d} > 1$. Prelucrarea dintr-o singură trecere nu este posibilă fiindcă freza nu acoperă toată lățimea suprafeței prelucrate.

Pentru scurtarea timpului de prelucrare trebuie urmărit ca drumul acoperit de freză să fie cât mai mic, aceasta putându-se realiza dacă majorăm diametrul frezei. Dar mai există o posibilitate pentru atingerea acestui scop. Astfel, de exemplu, piesele de prelucrat se vor așeza la distanțe mici una de alta.

37. Un corp cu masa m , care se găsește față de centrul Pământului la distanța x , este atras cu o forță : $F_1 = \frac{km \cdot m_1}{x^2}$, unde k este un factor de proporționalitate și m_1 este masa Pământului. Dacă m se află pe o dreaptă care leagă punctele centrelor Pământului și Lunii, aceasta este atrasă de Lună cu o forță : $F_2 = \frac{k \cdot m \cdot m_2}{(l - x)^2}$, unde m_2 reprezintă masa Lunii. Din enunț, rezultă : $F_1 = F_2$ sau

$$\frac{k \cdot m \cdot m_1}{x^2} = \frac{k \cdot m \cdot m_2}{(l - x)^2}, \text{ sau } \frac{x}{l - x} = \pm \sqrt{\frac{m_1}{m_2}};$$

rezolvind ecuațiile, obținem :

$$x_1 = l \frac{\sqrt{\frac{m_1}{m_2}}}{1 + \sqrt{\frac{m_1}{m_2}}} = 3,84 \cdot 10^5 \text{ km} \cdot \frac{\sqrt{81,5}}{1 + \sqrt{81,5}} \approx 3,46 \cdot 10^5 \text{ km},$$

$$x_2 = l \frac{\sqrt{\frac{m_1}{m_2}}}{\sqrt{\frac{m_1}{m_2}} - 1} = 3,84 \cdot 10^5 \text{ km} \cdot \frac{\sqrt{81,5}}{\sqrt{81,5} - 1} \approx 4,32 \cdot 10^5 \text{ km}.$$

Evident, prima soluție a ecuației dă un punct situat între Pământ și Lună, iar a doua soluție un punct situat dincolo de Lună. În primul punct forțele de atracție ale Pământului și Lunii sînt egale, dar îndreptate în sens contrar, iar în punctul al doilea acționează forțele de atracție cu același sens.

38. Vom nota lungimea și lățimea căutată cu x și, respectiv, y (în m). Lungimea întregii împrejuriri a parcului se va nota cu z vezi (fig. 24.14). Vom avea : $2xy + \frac{\pi y^2}{4} = A$ (1) și $4x + 2y + \pi y = z$ (2).

Se caută valorile pentru x și y care pentru constanta dată A (în m^2), corespund celei mai mici valori ale lui z . Din ecuațiile (1) și (2), x , se exprimă în funcție de $x = \frac{A}{2y} - \frac{\pi y}{8}$ (3). Din ecuațiile (2) și (3)

rezultă : $z = \frac{2A}{y} + \frac{\pi + 4}{2} y$ (4). Ecuația (4) exprimă în sfîrșit că z se poate reprezenta ca sumă a doi termeni pozitivi al căror produs este o constantă, deoarece avem :

$\frac{2A}{y} \cdot \frac{\pi + 4}{2} y = (\pi + 4) A$, iar A , conform condițiilor problemei, este o mărime dată inițial. Prin urmare, z ia valoarea maximă atunci cînd y satisface relația : $\frac{2A}{y} = \frac{\pi + 4}{2} y$. Rezolvînd această ecuație, se obține :

$$y = 2 \sqrt{\frac{A}{\pi + 4}}. \quad (5)$$

Din ecuațiile (3) și (5), valoarea corespunzătoare pentru x devine :

$$x = \sqrt{\frac{A}{\pi + 4}}. \quad (6)$$

Din ecuațiile (4) și (5) rezultă în final :

$$z_{\min} = 2\sqrt{(\pi + 4)A}. \quad (7)$$

Exemplu numeric : $A = 10\,000\,m^2$, înlocuind în ecuațiile (5), (6) și (7) avem :

$$x = 2 \sqrt{\frac{100\,000}{\pi + 4}}\,m \approx 56,5\,m$$

$$y = 2 \sqrt{\frac{100\,000}{\pi + 4}}\,m \approx 113\,m$$

$$z_{\min} = 2\sqrt{(\pi + 4)100\,000}\,m \approx 535\,m$$

39. Să notăm cu l_1 lungimea unei suduri și cu l_2 lungimea celei de a doua suduri, iar lungimea laterală a sudurii cu l_s , aceasta însemnând că $l_s = l_1 + l_2$.

Lungimea minimă admisibilă, l_s , se găsește în ipoteza ca tensiunea maximă în care sudurile să nu depășească tensiunea admisibilă: $\sigma_{\max} \leq \sigma_{\text{adm}}$, această formulă exprimând așa-numita condiție de rezistență. Fiindcă tensiunea maximă în secțiunea cordonului de sudură se precizează în tehnică cu ajutorul formulei: $\tau_{\max} = \frac{F}{0,7 t l_s}$, condiția de rezistență admisibilă are forma: $\frac{F}{0,7 t l_s} < \tau_{\text{ad}}$;

de aici rezultă: $l_s = \frac{F}{0,7 t \tau_{\text{ad}}} = \frac{150000 \text{ N}}{0,7 \cdot 0,8 \text{ cm} \cdot 10000 \text{ N} \cdot \text{cm}^{-2}} \approx 26,8 \text{ cm}$, astfel se obține $l_1 + l_2 = 26,8 \text{ cm}$. Totodată împărțind forțele care acționează prin frecare din cele două lungimi de sudură invers proporțional cu distanța lor de la linia de acționare a forței F , aceasta înseamnă că este valabil $\frac{l_1}{l_2} = \frac{b - z_0}{z_0}$, măsurimile b și z_0 găsindu-se în tabele speciale. După un astfel de tabel s-a stabilit $z_0 = 2,1 \text{ cm}$ și $b = 7,5 \text{ cm}$. În acest fel, se obțin două ecuații:

$$\begin{cases} l_1 + l_2 = l_s \\ \frac{l_1}{l_2} = \frac{b - z_0}{z_0} \end{cases} \quad \begin{cases} l_1 + l_2 = 26,8 \text{ cm.} \\ \frac{l_1}{l_2} \approx 2,57 \text{ cm.} \end{cases}$$

Rezolvând acest sistem, obținem:

$$l_1 = 16,4 \text{ cm și } l_2 = 10,4 \text{ cm.}$$

40. Să notăm că F_1 forța pe care o comprimă resortul interior și cu F_2 cea care comprimă resortul exterior. Dat fiind că suma acestor forțe este egală cu F , putem nota ecuația $F_1 + F_2 = F$. Pentru găsirea celei de a doua ecuații, folosim ipoteza că la comprimare ambele arcuri se scurtează la aceeași valoare, aceasta însemnând că $T_1 = T_2$. Scurtarea primului și celui de al doilea arc îl precizăm după formula: $t_1 + \frac{F_1}{C_1}$ și $t_2 = \frac{F_2}{C_2}$, iar a doua ecuație va fi de forma: $\frac{F_1}{C_1} = \frac{F_2}{C_2}$ sau $C_2 F_1 = C_1 F_2$.

Rezolvând sistemul de ecuații: $\begin{cases} F_1 + F_2 = F \\ C_2 F_1 = C_1 F_2 \end{cases}$,

obținem : $F_1 = \frac{C_1}{C_1 + C_2} \cdot F$ și $F_2 = \frac{C_2}{C_1 + C_2} \cdot F$.

41. Prin logaritmare obținem :

$$\lg F = \lg \alpha + \lg \varphi + 2 \lg n_s + 4 \lg D$$

sau : $\lg F = \lg 0,18 + \lg 0,125 + 2 \lg 25 + 4 \lg 2,1 \approx 2,4368$

rezultînd : $F = 273,4 \text{ N}$.

Prin logaritmare : $\lg P = \lg \beta + \lg \rho + 3 \lg n_s + 5 \lg D$,

sau : $\lg P = \lg 0,28 + \lg 0,125 + 3 \lg 25 + 5 \lg 2,1 \approx 4,3488$

Rezultă : $P = 223300 \text{ W}$.

42. Prin logaritmare a formulei, obținem :

$$\lg v = \lg 32,6 - 0,16 \lg s - 0,38 \lg \lambda = \lg 32,6 - 0,16 \lg 2 - 0,38 \lg 0,4 \approx 1,616; \text{ de unde : } v \approx 41,3 \text{ m} \cdot \text{mm}^{-1}.$$

43. Cablul remorcherului A , trebuie să formeze cu axa lui unghiul x , iar cablul remorcherului B trebuie să formeze cu aceeași axă unghiul y (vezi fig. 24.18). Din datele problemei, rezultă următorul sistem de ecuații :

$$\begin{cases} 6 \cos x + 4 \cos y > 5 \\ 10 \cos x + 5 \cos y > 8 \\ 0 < x < 90^\circ : 0 < y < 90^\circ. \end{cases}$$

Dacă vom rezolva acest sistem în raport cu y , rezultă :

$$0 < y < \arccos \frac{5 - 6 \cos x}{4} \quad (1)$$

Pentru $\arccos \frac{5}{6} < x < \arccos 0,7$ și anume : $33^\circ 31' < x <$

$$< 45^\circ 30', 0 < y < \arccos \frac{8 - 10 \cos x}{5}, \quad (2)$$

pentru $\arccos 0,3 < x < \arccos 0,7$ și anume : $45^\circ 30' < x < 72^\circ 30'$.

Exemplu numeric :

Fiind dat $x = \arccos 0,5 = 60^\circ$, vom avea :

$$0^\circ < y < \arccos \frac{8 - 10 \cdot 0,5}{5}, \text{ adică } 0^\circ < y < 53^\circ.$$

Probă :

Considerind $\gamma = 50^\circ$, rezultă

$$6 \cos 60^\circ + 4 \cos 50^\circ = 3 + 4 \cdot 0,643 \approx 5,57 > 5.$$

$$10 \cos 60^\circ + 5 \cos 50^\circ = 5 + 5 \cdot 0,643 \approx 8,26 > 8.$$

44. Vagonetul încărcat dezvoltă la coborîre pe planul înclinat datorită masei sale, forța de tracțiune $F_1 = F_G(\sin \varphi - \mu \cos \varphi)$.

În acest caz φ este egal cu unghiul de înclinare căutat. Forța care este necesară pentru ridicarea uniformă a n vagonete grele este $F_2 = n f_G(\sin \varphi + \mu \cos \varphi)$.

De aici rezultă următoarea inecuație :

$n f_G(\sin \varphi + \mu \cos \varphi) \leq F_G(\sin \varphi - \mu \cos \varphi)$, după care rezolvînd inecuația și ținînd seama că : $f_G = m_G g$ și $F_G = M_G g$, rezultă :

$$\arctg \frac{\mu(F_G + n f_G)}{F_G - n f_G} \leq \varphi < 90^\circ.$$

Din această ultimă inecuație, se vede că problema se poate rezolva numai cînd $n f_G < F_G$.

Exemplu numeric :

Fie dat : $F_G = 2,5 \text{ t}$, $f_G = 0,4 \text{ t}$, $\mu = 0,02$

Pentru ca, vagonetul încărcat în coborîrea lui trebuie să ridice cel puțin 5 vagonete goi, unghiul de înclinare μ , trebuie să aibă următoarele limite :

$$\arctg \frac{0,02(2,5 + 5 \cdot 0,4)}{2,5 - 5 \cdot 0,4} \approx \arctg 0,18 \leq \varphi \leq 90^\circ,$$

adică $10^\circ 18' \leq \varphi \leq 90^\circ$.

45. Volumul filtrului conic se poate determina cu formula :

$$V = \frac{1}{3} \pi x^2 \sqrt{r^2 - x^2} (1), \text{ unde } x \text{ este raza suprafeței de bază.}$$

Din (1) se vede că funcția pozitivă $x^2 \sqrt{r^2 - x^2}$ ia valoarea maximă simultan cu funcția : $x^2 (r^2 - x^2)$, deoarece aceasta din urmă este doar o parte din cele prezentate anterior. Produsul $x^4 (r^2 - x^4)$

poate fi adus la forma $\frac{1}{2} x^2 \cdot x^2 (2r^2 - 2x^2)$, printr-o transformare

identică. Suma $x^2 + x^2 + (2r^2 - 2x^2) = 2r^2$ este încă o constantă, deoarece r este o mărime fixă. Volumul V ia valoarea maximă atunci cînd avem : $x^2 = 2r^2 - 2x^2$,

sau
$$x = \frac{r\sqrt{6}}{3} \quad (2)$$

Deoarece :
$$2\pi x = b_1 = \frac{\pi r(360^\circ - \widehat{AMB})}{180^\circ}, \quad (3)$$

din formulele (2) și (3), rezultă în final că volumul V ia valoarea maximă când avem : $\widehat{AMB} \approx 66^\circ$.

46. Dacă notăm cu A aria secțiunii inelare, obținem :

$$A = \frac{\pi}{4} (D^2 - d^2) = \frac{\pi D^2}{4} (1 - a^2).$$

Se formează sistemul :

$$\begin{cases} (D^2 - d^2) = 4A \\ D - d = 2S \end{cases}$$

Se va găsi : $D = 200$ mm și $d = 152$ mm.

47. Rezolvind sistemul :

$$\begin{cases} \pi(D^2 - d^2) = 4A \\ \frac{d}{D} = a \end{cases}$$

obținem : $D = 2\sqrt{\frac{A}{(1 - a^2)}}, \quad d = 2a\sqrt{\frac{A}{(1 - a^2)}}.$

49. Din $\triangle OCA$, se obține (fig. 24.20) :

$$\left(\frac{D}{2} - v\right)^2 = \left(\frac{l}{2}\right)^2 + \left[\frac{D}{2} - (v + H)\right]^2, \text{ dar pentru simplifi-}$$

carea calculului se introduce o nouă variabilă :

$$x = \frac{D}{2} - r \text{ (vezi fig. 24.20).}$$

Vom obține ecuația : $x^2 = \left(\frac{l}{2}\right)^2 + (x - H)^2$, de unde :

$$x = \frac{l^2 + 4H^2}{8H}.$$

Înlocuind pe x cu valoarea $\frac{D}{2} - r$, se obține :

$$D = H + \frac{l^2}{4H} + 2r.$$

În cazul măsurării diametrului exterior, ecuația inițială va fi de forma :

$$\left(\frac{D}{2} + r\right)^2 = \left(\frac{l}{2}\right)^2 + \left[\frac{D}{2} - H + r\right]^2,$$

de unde :

$$D = H + \frac{l^2}{4H} - 2r.$$

50. $R = G = \frac{\pi}{4}(D^2 - d^2) h \gamma - V \gamma$, unde V este volumul, iar

$R = R$ piesă finisată.

Notăm cu x adâncimea descufundare abacului în apă (vezi fig. 24.23). Bacul are la suprafața apei lățimea

$$y = a + 2x \operatorname{tg} \alpha.$$

Bacul dislocă un volum de apă $V = \frac{a + y}{2} \cdot xl$.

Din principiul lui Arhimede, bacul este împins cu o forță $F = V \rho m = mg$, iar $m = (ax + x^2 \operatorname{tg} \alpha) l \rho$ sau $x^2 \operatorname{tg} \alpha + ax - \frac{m}{l \rho} = 0$. După rezolvarea ecuației și înlocuirea valorilor date în problemă, obținem $x = 0,405$ m.

53. Pentru precizarea mărimilor S_1 și S_2 , trebuie rezolvat sistemul de ecuații :

$$\begin{cases} S_1 - S_2 = 200 \text{ N} \\ S_1 + S_2 = 500 \text{ N} \end{cases}$$

Rezultă $S_1 = 350$ N, $S_2 = 15$ N.

54. Notăm x timpul necunoscut. Întrucât numărul de ture al compresorului este $n = 150$ rot/min, cantitatea de aer comprimată în rezervor într-un minut va fi :

$$V_{\text{min}} = n \Delta V.$$

Volumul total al aerului comprimat în timpul x în rezervor și al aerului existent în rezervorul W înainte de pornirea compresorului va fi indicat în termenul $(x+1)$ al progresiei aritmetice, al cărei prim termen este V_k și a cărei rație este V_{min} : $V = V_k + xV_{\text{min}}$. În acest caz, aerul va fi comprimat la volumul V_k . La presiune crescătoare și temperatură constantă, conform legii Boyle-Mariotte: $pV_k = p_0V$, la care $p_0 = 1$ at (presiunea atmosferică).

De aceea $V = \frac{p}{p_0} \cdot V_k$ sau $V_k + xV_{\text{min}} = \frac{p}{p_0} V_k$,

din care :

$$x = \frac{V_k}{V_{\text{min}}} \left(\frac{p}{p_0} - 1 \right) = \frac{100 \text{ dm}^3}{150 \text{ min}^{-1} 0,5 \text{ dm}^{-3}} \left(\frac{4 \text{ at}}{1 \text{ at}} - 1 \right).$$

55. Pentru precizarea adâncimii H a puțului și τ timpul de cădere a pietrei, obținem un sistem de două ecuații cu două necunoscute :

$$\begin{cases} H = \frac{g\tau^2}{2} \\ H = c(t - \tau). \end{cases} \quad (1)$$

Prin eliminarea lui H , rezultă :

$$\frac{g\tau^2}{2} = c(t - \tau) \text{ sau : } \tau^2 + \frac{2c}{g} \tau - \frac{2ct}{g} = 0,$$

din care :

$$\tau_{1,2} = -\frac{c}{g} \pm \sqrt{\frac{c^2}{g^2} + \frac{2ct}{g}}.$$

Timpul de cădere a pietrei nu poate fi negativ, prin urmare unica soluție este :

$$\tau = \tau_1 = \sqrt{\frac{c^2}{g^2} + \frac{2ct}{g}} - \frac{c}{g} = \frac{c}{g} \left(\sqrt{1 + \frac{2gt}{c}} - 1 \right). \quad (2)$$

Introducem timpul determinat τ în a doua ecuație a sistemului (1) și găsim adâncimea puțului :

$$H = c \left[t - \frac{c}{g} \left(\sqrt{1 + \frac{2gt}{c}} - 1 \right) \right]. \quad (3)$$

Exemplu numeric : $t = 5 \text{ s}$, $c = 340 \text{ m/s}$ și $g = 9,81 \text{ m/s}^2$.

56. Notăm cu x forța care va fi transmisă prin piciorul 1 al suportului (vezi fig. 24.26). Forțele ce vor fi transmise prin picioarele 2 și 4 sînt egale între ele fiindcă sînt dispuse simetric față de diagonale cu picioarele 1 și 3. Aceste forțe egale le notăm cu y . Piciorul 3 transmite forța z pe suporti. Evident, suma acestor forțe este egală cu forța care acționează pe suport, piesa de fontă și masă.

Greutatea mesei este neglijabilă în comparație cu aceea a piesei de fontă.

Avem deci: $x + 2y + z = F$.

Dacă calculăm suma momentelor tuturor forțelor față de diagonala ce trece prin picioarele 2 și 4, obținem o a doua ecuație

$$x \cdot \frac{l\sqrt{2}}{2} - Ft\sqrt{2} - z \frac{l\sqrt{2}}{2} = 0 \text{ sau } lx - 2Ft - lz = 0.$$

Putem presupune că, sub acțiunea forței \vec{F} , placa mesei ia o poziție care este reprezentată prin linia punctată $A-A$. Aceasta înseamnă că scurtarea picioarelor 2 și 4 este egală cu media aritmetică de scurtare a picioarelor 1 și 3. Scurtarea picioarelor este însă proporțională cu efectul forțelor de apăsare, de aceea :

$$\frac{x + z}{2} = 2y \text{ sau } x + z = 4y.$$

Ca rezultat, obținem un sistem de 3 ecuații :

$$\begin{cases} x + 2y + z = 3000 \text{ N} \\ x - z = 600 \text{ N} \\ x - 4y = z = 0 \text{ N} \end{cases}$$

Obținem : $x = 1300 \text{ N}$, $y = 500 \text{ N}$, $z = 700 \text{ N}$.

58. Lungimea unei spire în prima situație a cablului (considerat pe linia mediană a cablului) este egală cu $\pi(D+d)$.

Lungimea spirelor din următoarele situații este cu $2\pi d$ mai mare decât cele anterioare. Lungimea tuturor spirelor, fiecare în situația respectivă este cu $2\pi dm$, mai mare decât cele anterioare.

Este evident că lungimea totală a cablului, este suma primilor termeni n ai unei progresii aritmetice a cărei rație este $2\pi dm$.

Primul rînd ai progresiei este $\pi m(D+d)$, iar al n — lea termen este :

$$\pi m(D+d) + (n-1) 2\pi dm = \pi m [D + (2n-1)d].$$

Obținem deci pentru lungimea totală a cablului :

$$l = \frac{\pi m(D + d) + \pi m[D + (2n-1)d]}{2} \cdot n \approx \pi mn(D + nd).$$

Pentru distanța de depășire avem relația :

$$l = \frac{x}{2} = a_1 + l_B + v_B \cdot t + a_2 + l_A, \text{ unde :}$$

t este timpul de depășire și $l = \frac{x}{2} = v_A t$.

Prin rezolvarea acestei ecuații obținem :

$$t = \frac{a_1 + a_2 + l_A + l_B}{v_A - v_B}$$

$$x = 2v_A \cdot \frac{a_1 + a_2 + l_A + l_B}{v_A - v_B}.$$

Caz numeric :

Dacă se dă $a_1 = 20$ m, $a_2 = 30$ m, $l_A = 4$ m, $l_B = 6$ m, $v_A = 60$ km/h și $v_B = 40$ km/h, atunci :

$$x = 2 \cdot 60 \cdot \frac{20 + 30 + 4 + 6}{60 - 40} = 360 \text{ m.}$$

59. Cu ajutorul figurii 24.29 se stabilește ușor egalitatea :

$$\frac{d_1 - d_2}{l} = \frac{d_1 - d}{\lambda}.$$

De unde rezultă $d = d_1 - \frac{d_1 - d_2}{l} \lambda$.

Exemplu numeric :

Se dau : $d_1 = 50$ mm ; $d_2 = 30$ mm ; $l = 200$ mm și $\lambda = 50$ mm ; vom obține :

$$d = 50 - \frac{50 - 30}{200} \cdot 50 = 45 \text{ mm.}$$

60. Se cere distanța x , a centrului de greutate C , față de reazemul A (vezi fig. 24.30).

Dacă dinamometrul indică forța $F_1 = 120 \text{ N}$, pe reazemul A , forța aplicată F_2 este : $F_2 = F - F_1 = 150 \text{ N}$, unde F este greutatea corpului.

Forțele F_1 și F_2 sînt în raport invers proporțional cu distanțele lor față de punctul C .

Rezultă :

$$\frac{F_1}{x} = \frac{F_2}{l - x}, \text{ sau } \frac{120 \text{ N}}{x} = \frac{150 \text{ N}}{45 \text{ cm} - x}$$

De aici : $12 \text{ N} (45 \text{ cm} - x) = 15 \text{ N} \cdot x$,
iar $x = 20 \text{ cm}$.

61. În cazul nostru p_0 este egal cu 10 N/cm^2 . Înlocuind mărimile date în ecuația de bază a hidrostaticii, se obține :

$$1,15 \text{ N/cm}^2 = 10 \text{ N/cm}^2 + 150 \text{ cm} \cdot \rho \cdot 981 \text{ cm/s}^2.$$

Din această ecuație rezultă, după efectuarea calculelor :

$$\rho = 0,001 \text{ kg/cm}^3.$$

63. Poziția verticală a diagonalelor \overline{BD} ale brazelor (vezi fig. 24.33) este poziția limită la care brazda nu cade. Din asemănarea triunghiurilor BDE și BAC rezultă că :

$$\frac{BC}{BD} = \frac{AC}{BC}, \text{ de unde :}$$

$$BC = b; BD = \sqrt{a^2 + b^2}; BE = b \text{ și } AC = a.$$

$$\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{a}{b} \text{ sau } b^2 = a \sqrt{a^2 + b^2}$$

Împărțim ambele părți ale ecuației prin a^2 și introducem variabila $x = \frac{b}{a}$.

$$\text{Atunci } x^2 = \sqrt{1 - x^2} \text{ sau } x^4 - x^2 - 1 = 0.$$

$$\text{Să notăm cu } t = x^2 \text{ și avem : } t^2 - t - 1 = 0.$$

Se obține $t_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 1} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{5}$.

Reținem numai soluțiile reale :

$$t = t_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \text{ de unde : } x_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \sqrt{5}}{2}}.$$

Vom reține numai valoarea pozitivă și anume :

$$x = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{5}}{2}}.$$

Obținem în final :

$$\frac{b}{a} = x = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{5}}{2}} \approx 1,27.$$

Mărimea x depinde de construcția plugului a cărui dimensionare se va alege astfel încât $1,27 < x < 2$.

64. La deformarea grinzii în limitele elasticității, pentru rigiditatea sa avem : $c = \frac{F}{\delta}$ în care δ este săgeata la mijlocul grinzii sub acțiunea forței F .

Pentru înălțimea de cădere a greutății inclusiv săgeata grinzii avem :

$$H = h + \delta = h + \frac{F}{c}.$$

Energia cinetică a corpului care este : $W = mgH$.
La șoc această acțiune se transformă în energie potențială a săgeții grinzii ; aceasta înseamnă că $W = W_p$, sau :

$$\frac{F^2}{2c} = mg \left(h + \frac{F}{c} \right).$$

După simplificare, obținem :

$$F^2 - 2mgF - 2mghc = 0, \text{ de unde :}$$

$$F = mg \left(1 \pm \sqrt{1 + 2 \frac{ch}{mg}} \right).$$

Luind valorile reale obținem :

$$F = mg \left(1 + \sqrt{1 + 2 \frac{ch}{mg}} \right), \text{ sau :}$$

$$F = k_d mg$$

în care coeficientul dinamic k_d este :

$$k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2ch}{mg}},$$

care indică de câte ori forța \vec{F} , este mai mare decât greutatea \vec{mg} .

În domeniul elasticității, săgeata grinzii este tensiunea acesteia, proporțională cu acțiunea forței.

Prin urmare :

$\delta = \delta_0 k_d$ și $\sigma = \sigma_0 k_d$, în care σ_0 este tensiunea în grindă la acțiunea forței statice \vec{mg} și δ_0 deformația grinzii prin acțiunea forței egală mg .

Din formula pentru precizarea coeficientului dinamic, se poate reține că acesta este dependent de rigiditate. Cu cât rigiditatea este mai mică, cu atât este mai mic și coeficientul dinamic, ceea ce înseamnă că și șocul va fi atenuat.

Pentru amortizarea șocurilor folosim elemente elastice în formă de arcuri ș. a. m. d.

În cazul considerat, coeficientul dinamic se exprimă prin :

$$k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 500 \cdot 10^4 \text{ N/m}^2 \cdot 0,5 \text{ m}}{20 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m/s}^2}} \approx 51,$$

deci $F = k_d mg = 51 \cdot 20 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 = 1020 \text{ N}$.

65. Cantitatea scursă în prima secundă este :

$$q_1 = ah_1.$$

Cantitatea scursă în secunda a doua este :

$$q_2 = ah_2 = a \left(h_1 - \frac{q_1}{A} \right) = ah_1 \left(1 - \frac{a}{A} \right).$$

Pentru a treia secundă avem :

$$q_3 = ah_3 = a \left(h_1 - \frac{q_2}{A} \right) = a \left[h_1 \left(1 - \frac{a}{A} \right) - h_1 \frac{a}{A} \left(1 - \frac{a}{A} \right) \right],$$

$$q_3 = ah_1 \left(1 - \frac{a}{A} \right)^2.$$

Pentru a patra secundă avem :

$$q_4 = ah_4 = a \left(h_3 - \frac{q_3}{A} \right) = ah_1 \left(1 - \frac{a}{A} \right)^3.$$

Pentru a t -a secundă avem relația :

$$q_t = ah_1 \left(1 - \frac{a}{A} \right)^{t-1}.$$

Stabilim că, pe secundă, cantitatea scursă se micșorează după o progresie geometrică a cărei rație este $\left(1 - \frac{a}{A} \right)$ și ai cărei prim și ultim termeni sînt : $q_1 = ap_1$ și, respectiv

$$q_t = qh_1 \left(1 - \frac{a}{A} \right)^{t-1}.$$

Cantitatea totală scursă este redată prin suma primilor termeni ai acestei progresii :

$$Q = \frac{ah_1 - ah_1 \left(1 - \frac{a}{A} \right)^{t-1} \left(1 - \frac{a}{A} \right)}{1 - \left(1 - \frac{a}{A} \right)} = ah_1 \frac{1 - \left(1 - \frac{a}{A} \right)^t}{\frac{a}{A}}$$

sau :

$$Q = Ah_1 \left[1 - \left(1 - \frac{a}{A} \right)^t \right].$$

Întrucît $Ah_1 = V_1$ (V_1 volumul inițial din rezervor), formula se poate scrie și sub forma :

$$Q = V_1 \left[1 - \left(1 - \frac{a}{A} \right)^t \right].$$

66. Pentru tensiunea unitară a transmisiilor cu cablu avem relația :

$$s_1 = \frac{F}{k}, s_2 = \frac{F}{k^2}, \dots, s_n = \frac{F}{k^n}.$$

Obținem o progresie geometrică a cărei rație este $1/k$.

Greutatea K este egală cu suma tensiunilor în transmisia cu cablu.

$$Q = s_1 + s_2 + \dots + s_n = F \frac{k^{n-1}}{k^n(k-1)} ; \text{ de unde rezultă ;}$$

$$F = s_n k^n = 2430 \text{ N} \cdot 1,02^4 \approx 2630 \text{ N}.$$

$$Q = s_n \frac{k^{n-1}}{k-1} = 2430 \text{ N} \frac{1,02^4 - 1}{1,02 - 1} \approx 10000 \text{ N}$$

67. Din inegalitatea : $\frac{F_k(l_k + b) - F_k(l - b)}{F(l - b)} \geq 1,4$, obținem :

$$F \leq \frac{F_k(l_k + b) - F_k(l - b)}{1,4 \cdot (l - b)}.$$

68. Fie n numărul de zale al lanțului. Pentru ridicarea greutății este necesară forța :

$$F_1 = \frac{mg}{2n}.$$

Lucrul mecanic necesar pentru aceasta este $W_1 = \frac{mg}{2n} \cdot \frac{l}{n} = \frac{mgl}{2n^2}.$

Pentru zala a doua avem :

$$F_2 = \frac{mg}{2n} + \frac{mg}{n} ; W_2 = \frac{mgl}{2n^2} + \frac{mgl}{n^2}.$$

Pentru zala a treia avem :

$$F_3 = \frac{mg}{2n} + \frac{2mg}{n} ; W_3 = \frac{mgl}{2n^2} + \frac{2mgl}{n^2}.$$

Pentru a n -a zală avem :

$$F_n = \frac{mg}{2n} + (n-1) \frac{mg}{n} ; W_n = \frac{mgl}{2n^2} + (n-1) \frac{mgl}{n^2}.$$

Lucrul mecanic ce s-a folosit pentru ridicarea întregului lanț îl putem reda în următoarea progresie aritmetică ca sumă a n zale :

$$W = W_1 + W_2 + W_3 + \dots + W_n = \frac{W_1 + W_n}{2} n ;$$

$$W = \frac{mgl}{n^2} \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + n - 1}{2} n = \frac{mgl}{2}.$$

69. Pentru zborul de ducere la viteza aeronavei față de aerul ambiant se adaugă viteza vântului, iar la întoarcere se scade. De aceea viteza aeronavei este în raport cu suprafața pământului la ducere $v + v_w$, la întoarcere $v - v_w$.

Acum se pot stabili ușor ecuațiile :

$$\frac{s}{v + v_w} = t_1; \frac{s}{v - v_w} = t_2.$$

Rezolvarea lor dă :

$$v = \frac{s}{2} \left(\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} \right); v_w = \frac{s}{2} \left(\frac{1}{t_1} - \frac{1}{t_2} \right).$$

Dacă s este drumul pe care aeronava îl parcurge în timpul $t_1 + t_2$, cu viteza v , atunci putem scrie :

$$s = v(t_1 + t_2) = 2s + (t_1 + t_2)v_w.$$

70. Se cunoaște : $T_2 = T_1 + \Delta t$; $p_2 = p_1 + \Delta p$.

Substituind T_2 și p_2 în formulă, obținem :

$$\begin{aligned} \frac{p_1 + \Delta p}{p_1} &= \left(\frac{T_1 + \Delta t}{T_1} \right)^{\frac{1,2}{1,2-1}} = \left(1 + \frac{\Delta t}{T_1} \right)^6 = \\ &= 1 + 6 \frac{\Delta t}{T_1} + 15 \left(\frac{\Delta t}{T_1} \right)^2 + 20 \left(\frac{\Delta t}{T_1} \right)^3 + \\ &+ 15 \left(\frac{\Delta t}{T_1} \right)^4 + 6 \left(\frac{\Delta t}{T_1} \right)^5 + \left(\frac{\Delta t}{T_1} \right)^6. \end{aligned}$$

Pentru că $\Delta t \ll T_1$, este valabilă și relația : $\frac{\Delta t}{T_1} \ll 1$; prin urmare, toate puterile pot fi neglijate fără urmări pentru exactitatea soluției.

Atunci :

$$\frac{p_1 + \Delta p}{p_1} = 1 + \frac{\Delta p}{p_1} \approx 1 + 6 \frac{\Delta t}{T_1} \text{ de unde :}$$

$$\Delta p \approx 6 \frac{p_1}{T_1} \Delta t = 6 \cdot \frac{20 \text{ N/cm}^2}{300 \text{ K}} \cdot 5 \text{ K} = 2 \text{ N/cm}^2.$$

71. Parașutistul pierde în timpul căderii libere înălțimea

$$h_1 = \frac{gt_1^2}{2}.$$

Spațiul parcurs în cădere cu parașuta deschisă este :

$$h_2 = vt_2$$

Cum $h = h_1 + h_2$, obținem un sistem de două ecuații cu două necunoscute :

$$\begin{cases} gt_1^2 + vt_2 = h \\ t_1 + t_2 = t_0. \end{cases}$$

Prin eliminarea lui t_2 și simplificarea transformărilor rezultă :

$$t_1^2 - \frac{2v}{g} t_1 - \frac{2}{g} (h - vt_0) = 0,$$

iar prin rezolvarea acestei ecuații de gradul II, obținem timpul de cădere cu parașuta închisă :

$$t_1 = \frac{v}{g} \pm \sqrt{\frac{v^2}{g^2} + \frac{2(h - vt_0)}{g}}.$$

Dacă parașuta se deschide imediat după săritură, avem : $h = vt_0$. Dacă săritura este executată cu deschiderea întârziată a parașutei, avem : $h \neq vt_0$. Luând în considerare numai valorile reale obținem :

$$t_1 = \frac{v}{g} \left[1 + \sqrt{1 + \frac{2g(h - vt_0)}{v^2}} \right].$$

72. Fie un corp greu de masă m situat la latitudinea φ . Punctul A este solicitat de două forțe : forța de gravitație \vec{P} , îndreptată către centrul Pământului, a cărei mărime este $P = mg$. (g = accelerația gravitației) și forța centrifugă \vec{F} perpendiculară pe axa Pământului, la distanța $R \varphi$ de ea ; mărimea ei este : $F = m \gamma = m \omega^2 R \varphi$. Greutatea \vec{P}_φ la latitudinea φ este deci rezultanta acestor două forțe, \vec{P} și \vec{F} . Forța \vec{F} este foarte mică în comparație cu forța de gravitație. Calculăm raportul mărimilor lor.

$$\frac{F}{P} = \frac{m \omega^2 R \cos \varphi}{mg} = \frac{\omega^2 R}{g} \cdot \cos \varphi, \text{ înlocuind pe } \omega, R \text{ și } g, \text{ se}$$

obține $\frac{F}{P} = \frac{1}{289} \cos \varphi$. Aceasta înseamnă că, la ecuator, forța centrifugă F este a 289-a parte din forța gravitațională care acționează asupra corpului.

73. Viteza unghiulară ω nu depinde de poziția punctului pe glob; ea este dată de :

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{86400} \text{ rad/s.}$$

$$\omega \approx 7,3 \cdot 10^{-5} \text{ rad/s.}$$

Punctul situat pe suprafața Pământului la latitudinea φ , descrie o circumferință de rază $R \cos \varphi$. Viteza liniară la latitudinea φ este :

$v_\varphi = \omega R \cos \varphi = \omega R \cos \varphi$, în care $R = 6370 \text{ km} = 6,37 \cdot 10^6 \text{ m}$ este valoarea mijlocie a razei Pământului. Înlocuind se obține :

$$v_\varphi = 7,3 \cdot 10^{-5} \cdot 6,37 \cdot 10^6 \cos \varphi$$

$$v_\varphi = 4,69 \cdot 10^2 \cdot \cos \varphi \text{ m/s.}$$

74. Însemnând cu P_1 mărimea componentei a doua din ΔOAP aplicând teorema sinusurilor, obținem :

$$\frac{P}{\sin \beta} = \frac{P_1}{\sin \alpha}$$

$$\text{și } P_1^2 = P^2 + P^2 - 2P \cdot P \cos \alpha = 2P^2(1 - \cos \alpha) = 4P^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}.$$

Deci :

$$P_1 = 2P \sin \frac{\alpha}{2} \text{ și înlocuind } \frac{P}{\sin \beta} = \frac{2P \sin \frac{\alpha}{2}}{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}$$

sau :

$$\sin \beta = \cos \frac{\alpha}{2}, \text{ deci : } \beta = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}.$$

$$75. \text{ Se calculează : } - \lim_{R \rightarrow \infty} p = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{R^2 - r^2}{\sqrt{3R^4 - r^4}} \sigma_t.$$

$$\text{Se va găsi : } p = \frac{\sigma_t \sqrt{3}}{3}.$$

76. Ținând seama de valorile lui A și t se obține :

$$i = \frac{p}{4} \sqrt{1 + a^2}.$$

b) — rezolvînd sistemul format din ecuațiile date, se obține :

$$D = \sqrt{8i^2 + \frac{2I}{\pi i^2}} ; d = \sqrt{8i^2 - \frac{2I}{\pi i^2}} .$$

Aplicație numerică : $I = 2700 \text{ cm} ; i = 7,7$, găsim :
 $D = 20 \text{ cm}, d = 18 \text{ cm}.$

77. În momentul prinderii tablei de către valț, asupra ei acționează următoarele forțe : reacțiunile normale \vec{N} pe direcția razelor AC și BD ale valțurilor, forțele de frecare kN pe direcția tangențelor la valțuri. Proiectînd pe orizontal, ecuația de echilibru este $\cos \left(\alpha + \frac{\pi}{2} \right) + 2kN \cos \varphi = 0$, adică $-\sin \alpha + k \cos \alpha = 0$, din care rezultă $\text{tg } \alpha \leq k$, dar $k = \text{tg } \varphi$ (φ fiind unghiul de frecare între valțuri și fierul înroșit); deci $\text{tg } \alpha \leq \text{tg } \varphi$, adică $\alpha \leq \varphi$. Grosimea maximă (admisibilă) a tablei ce poate fi laminată este baza CD a trapezului $ABCD$, în care AC este egal cu $BD = 2$; $AB = a + 2r$ și $CD = b$ fiind grosimea (admisibilă) avem :

$$AB = b + 2r \cos \alpha, \text{ deci } b + 2r \cos \alpha = a + 2r$$

$$\text{sau } b = a + 2r(1 - \cos \alpha).$$

Folosind relația $\text{tg } \alpha < \text{tg } \varphi$ și înlocuind $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \text{tg}^2 \alpha}}$,

$$\text{rezultă } b \leq a + 2r \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + k^2}} \right).$$

În cazul numeric dat, se obține $b \leq 0,75 \text{ cm}.$

78. Amplitudinea mișcării oscilatorii este $AB = a = 2,5 \text{ cm}$; perioada mișcării se deduce din : $T = \frac{\lambda}{v_0} = \frac{8}{200} = 0,04 \text{ s}.$

$$\text{pulsăția } \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi \cdot 25 = 50\pi \text{ rad/s}.$$

Ecuația mișcării oscilatorii armonice este : $x = a \cos(\omega t + \alpha)$; înlocuind, obținem $x = 2,5 \cos(50\pi t + \alpha)$. Faza inițială se determină prin condițiile inițiale date :

$$\text{pentru } t = 0, k = 0, \text{ deci : } 2,5 \cos \alpha = 0 ; \cos \alpha = 0, \alpha = \pm \frac{\pi}{2}.$$

Ecuatia mișcării este deci :

$$x = 2,5 \cos \left(50 \pi t \pm \frac{\pi}{2} \right)$$

$$x = 2,5 \sin (-50 \pi t) = -2,5 \sin 50 \pi t$$

$$x = 2,5 \sin \left(\frac{\pi}{2} - 50 \pi t + \frac{\pi}{2} \right) = 2,5 \sin 50 \pi t.$$

79. Problema are două necunoscute, α și β , între care există relația : $\alpha + \beta = \varphi$.

A doua ecuație se obține scriind că suma momentelor forțelor în raport cu un punct fix, de exemplu punctul O , este nulă.

$$\begin{cases} \overline{MP}_A = -P_A \cdot \frac{a}{2} \cdot \sin \alpha \\ \overline{MP}_B = P_B \cdot \frac{b}{2} \cdot \sin \beta, \end{cases}$$

căci forțele \vec{P}_A și \vec{P}_B acționează în centrele de greutate ale barelor (adică în mijloacele lor) și sînt verticale. Barele OA și OB fiind omogene, greutatea sînt proporționale cu a și b , deci :

$$-a \frac{a}{2} \sin \alpha + b \frac{b}{2} \sin \beta = 0$$

$$a^2 \sin \alpha - b^2 \sin \beta = 0.$$

Necunoscutele α și β se pot afla deci ca soluții ale sistemului de ecuații trigonometrice.

Substituind $\beta = \varphi - \alpha$ în a doua ecuație, obținem :

$$a^2 \sin \alpha - b^2 \sin (\varphi - \alpha) = 0,$$

care conduce la ecuația trigonometrică simplă :

$$(a^2 + b^2 \cos \varphi) \sin \alpha - b^2 \sin \varphi \cos \alpha = 0, \text{ adică :}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{b^2 \sin \varphi}{a^2 + b^2 \cos \varphi}.$$

80. Din figura 24.39 se vede că distanța articulației A de arcul de cerc descris de articulația B , ia valoarea minimă cînd

unghiul $\widehat{AM_1M_2}$ dintre brațele $\overline{M_1A}$ și $\overline{M_1M_2}$, este 0° sau 360° . Distanța ia valoarea maximă în poziția unghiulară de 180° .

Deci, dacă relațiile dintre valorile $\overline{M_1A}$, \overline{AB} , $\overline{M_2B}$ și $\overline{M_1M_2}$ se aleg

astfel încît unghiul $\widehat{AM_1M_2}$ să ia valorile 0° și 150° , atunci valorile corespunzătoare satisfac pozițiile unghiulare intermediare de la 0° la 360° .

În consecință, sînt suficiente condițiile care permit rotirea liberă a elementului $\overline{M_1A}$ în jurul articulației M_1 (elementul $\overline{M_1A}$ devenind manivelă). Fie $\overline{M_1A} = a$; $\overline{AB} = b$; $\overline{M_2B} = c$ și $\overline{M_1M_2} = d$.

Din figură se vede că unghiul $\widehat{AM_1M_2} = 0^\circ$ (sau 360°) cînd :
 $|b - c| \leq d - a$ (1), iar unghiul $\widehat{AM_1M_2} = 180^\circ$ cînd : $d + a \leq b + c$. (2)

În consecință, $\overline{M_1A}$ poate deveni manivelă dacă se îndeplinește sistemul de inecuații :

$$\begin{cases} d - a \geq |b - c| \\ d + a \leq b + c, \end{cases} \quad (3)$$

unde valorile a, b, c și d , din considerațiuni de ordin fizic, trebuie să fie pozitive.

Exemplu numeric :

Fie : $\overline{AB} = b = 6$ cm ; $\overline{M_2B} = c = 4$ cm și $\overline{M_1M_2} = d = 5$ cm.

Domeniul admisibil pentru elementul $\overline{M_1A}$ trebuie ales în așa fel ca $\overline{M_1A}$ să se poată roti liber în jurul punctului M_1 , adică $\overline{M_1A}$ să devină manivelă. Din sistemul (3) rezultă :

$$\begin{cases} 5 \text{ cm} - a \geq 6 \text{ cm} - 4 \text{ cm} \\ 5 \text{ cm} + a \leq 6 \text{ cm} + 4 \text{ cm} \end{cases}$$

de unde se obține :

$$0 \text{ cm} < a \leq 3 \text{ cm} :$$

81. Fie punctul M de intersecție al diagonalelor pătratului $ABCD$, MF perpendiculara dusă pe acest punct și K mijlocul laturii BC . Unim F cu K și notăm unghiul \widehat{FKM} cu x și segmentul \overline{MF} cu y (vezi fig. 24.40).

Conform legilor opticii, iluminarea (în luși) în punctul K pentru o sursă de lumină de intensitate I (în candel) care se află în punctul F , se obține din formula :

$$E = \frac{I}{FK^2} \cos(90^\circ - x) = \frac{I}{\left(\frac{a}{2 \cos x}\right)^2} \sin x,$$

sau :

$$E = \frac{4I}{a^2} \sin x \cos^2 x.$$

$$E = \frac{4I}{a^2} \sin x (1 - \sin^2 x). \quad (1)$$

Funcția $\sin x (1 - \sin^2 x)$ este numai pozitivă deoarece, conform datelor problemei, sînt admise numai valorile din intervalul $0^\circ < x < 90^\circ$.

Funcția $\sin^2 x (1 - \sin^2 x)^2$ se poate reduce la următoarea formă :

$$\frac{1}{2} [2 \sin^2 x (1 - \sin^2 x) (1 - \sin^2 x)];$$

însă $2 \sin^2 x + (1 - \sin^2 x) + (1 - \sin^2 x) = 2$ este o constantă.

Produsul $2 \sin^2 x (1 - \sin^2 x) (1 - \sin^2 x)$ va avea deci o valoare maximă atunci cînd :

$$2 \sin^2 x = 1 - \sin^2 x,$$

$$\text{adică rezultă } \sin x = \sqrt{\frac{1}{3}}.$$

Iluminarea E atinge valoarea maximă în punctul K atunci cînd $x = \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1}{3}}$.

În triunghiul dreptunghic MFK rezultă că acestei valori a unghiului îi corespunde o lungime a catetei :

$$\overline{MF} = \overline{MK} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{a}{2\sqrt{2}}.$$

Rezultă că un bec care trebuie să lumineze optim o suprafață pătrată cu lungimea laturii $a(m)$ trebuie amplasat deasupra centrului acesteia la o înălțime de $\frac{a}{2\sqrt{2}} \approx 0,36 a$.

82. La înălțimea h_2 , se duce o dreaptă orizontală $\overline{CC_1}$ (vezi fig. 24.41), iar prin punctele A și B se trasează un cerc tangent la dreapta CC_1 . Fie O punctul de contact al cercului cu dreapta. Din acest punct se va privi tabloul sub unghiul maxim. Atunci OC este distanța căutată.

Fie D punctul de intersecție la prelungirii dreptei AB cu dreapta CC_1 . Din teorema secantei și a tangentei, rezultă :

$$OD = \sqrt{AD \cdot BD}$$

și

$$CO = \sqrt{AD(BD - CD)}$$

Avem :

$$AD = AB + BD = a + \frac{BC}{\cos \alpha} = a + \frac{h_1 - h_2}{\cos \alpha}$$

și

$$CD = BC \operatorname{tg} \alpha = (h_1 - h_2) \operatorname{tg} \alpha.$$

Astfel se obține :

$$CO = \sqrt{\left(a + \frac{h_1 - h_2}{\cos \alpha}\right) \frac{h_1 - h_2}{\cos \alpha} - (h_1 - h_2) \operatorname{tg} \alpha}$$

iar după simplificare

$$CO = \frac{1}{\cos \alpha} \sqrt{(a \cos \alpha + (h_1 - h_2)) (h_1 - h_2) - (h_1 - h_2) \sin \alpha}.$$

95. Grosimea maximă a așchiei în cazul frezării cu o freză cilindrică este dată de relația cunoscută din teoria așchierii :

$$a_{\max} = 2 S_d \sqrt{\frac{t}{D} - \frac{t^2}{D^2}} \text{ (mm)}, \quad (1) \text{ în care } S_d \text{ este avansul pe dinte}$$

(în $\frac{\text{mm}}{\text{dinte}}$), F — diametrul frezei (în mm), iar t — adâncimea de așchiere (în mm).

Prin transformarea relației (1) în urma ridicării la pătrat, se obține o ecuație de gradul 2 :

$$4 \frac{S_d^2}{D^2} \cdot t^2 - 4 \frac{S_d^2}{D} \cdot t + a_{\max}^2 = 0, \quad (2)$$

adică forma clasică : $ax^2 + bx + c = 0$, în care $x = t$ este necunoscuta.

De asemenea, se cunoaște :

$$D_s = \sqrt{d^2 + 4dh} \text{ (mm)}, \quad (3)$$

în care d = diametrul corpului cilindric (mm), iar h = înălțimea cilindrului obținut (mm).

În practică problema se poate pune și invers, adică se verifică dacă corpul cilindric cu înălțimea h ce se obține din semifabricatul cu diametrul D_s , va avea diametrul necesar d . Relația (3) se ridică la pătrat și se obține ecuația de gradul doi :

$$d^2 + 4hd - D_s^2 = 0 \quad (4)$$

adică tot forma clasică $ax^2 + bx + c = 0$ în care $x = d$.

96. Fie x distanța DC în km (vezi fig. 24.49). Vom avea $BD = d - x$ și $DA = \sqrt{x^2 + h^2}$. În felul acesta durata mișcării y (mh) pentru distanța totală $BD + DA$ se poate exprima prin ecuația :

$$y = \frac{d - x}{v} + \sqrt{\frac{x^2 + h^2}{v_1}}. \quad (1)$$

Vom căuta valoarea lui x careia în cazul v și v_1 dat îi corespunde valoarea minimă y . Rezolvînd ecuația (1) în raport cu x , obținem :

$$x = \frac{v_1^2 (vy - d) \pm v \sqrt{v_1^2 (vy - d)^2 - h^2 (v^2 - v_1^2)}}{v^2 - v_1^2}. \quad (2)$$

Cum din datele problemei pentru x avem numai valori reale, se poate observa din ecuația (2) că y poate lua numai valori care satisfac inecuația :

$$v_1^2 (vy - d)^2 - h^2 (v^2 - v_1^2) \geq 0. \quad (3)$$

Ca soluție a acestei inegalități, se obține :

$$\frac{h \sqrt{v^2 - v_1^2} + d v_1^2}{v v_1} \leq y. \quad (4)$$

În acest caz $0 < \sqrt{v^2 - v_1^2}$, deoarece conform datelor problemei $v_1 < v$, rezultă deci că și y este un număr real. Cum în problemă h , v , v_1 și d sînt date, din inecuația (4) se poate vedea că valoarea minimă y se exprimă prin următoarea ecuație :

$$y_{\min} = \frac{h \sqrt{v^2 - v_1^2} + d v_1^2}{v v_1}. \quad (5)$$

Dacă vom introduce pe (5) în (2), atunci se vede că y ia valoarea minimă pentru :

$$x = \frac{v_1 h}{v^2 - v_1^2}. \quad (6)$$

Pentru ca transportul pe traseul $(BD + DA)$ sau $(AD + BD)$ să se poată efectua într-un timp minim, punctul D de pe segmentul BC trebuie ales la o distanță $DC = \frac{v_1 h}{\sqrt{v^2 - v_1^2}}$ de punctul C .

Dacă avem : $d \leq \frac{v_1 h}{\sqrt{v^2 - v_1^2}}$ și dacă stația B se află deci în punctul D și C linia în derivație se va trasa din punctul D . Dacă $BC < DC$, atunci și $AB < AD$ și, deci :

$$\frac{AB}{v_1} < \frac{AD}{v_1} < \frac{BD}{v} + \frac{AD}{v_1}.$$

Exemplu numeric :

Fie $d = 100$ km, $h = 40$ km ; $v = 50$ km/h și $v_1 = 30$ km/h.

Din inecuația (3) rezultă

$$x = DC = \frac{30 \cdot 40}{\sqrt{50^2 - 30^2}} \text{ km} = 30 \text{ km.}$$

Cum în acest caz $x < d$ (adică $30 \text{ km} < 100 \text{ km}$) linia în derivație trebuie construită din punctul D .

97. Fie AB un ecran dispus vertical, D punctul de privire al ochiului spectatorului, DM distanța de la ochiul spectatorului la ecran, AM distanța de la marginea inferioară a ecranului și ochi. În enunțul problemei $AB = l$ și $DM = a$, sînt date. Segmentul AM și unghiul de vedere ADB sînt necunoscute. Tot necunoscut este și unghiul ADM . Să notăm cu x unghiul ADB cu y unghiul ADM și cu z distanța AM . Din $\triangle BMD$ rezultă :

$$z + l = a \operatorname{tg} (x + y)$$

$$z + l = a \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y} \quad (1)$$

Din $\triangle ADM$ rezultă :

$$\operatorname{tg} y = \frac{z}{a} \quad (2)$$

Din ecuațiile (1) și (2) decurge :

$$z + l = \frac{a^2 \operatorname{tg} x + az}{a - z \operatorname{tg} x}$$

$$\text{iar de aici } \operatorname{tg} x = \frac{al}{z^2 + lz + a^2}, \quad (3)$$

conform teoremei valorilor extreme ale funcțiilor de gradul 2, termenul pătrat $z^2 + lz + a^2$ în cazul valorilor date inițial pentru l și a , ia valoarea minimă cînd $z = -\frac{l}{2}$.

Deci marginea inferioară a ecranului trebuie să fie cu $\frac{l}{2}$ mai jos

decît punctul de privire al ochiului, l fiind distanța dintre marginea inferioară și cea superioară a ecranului. În acest caz, triunghiul

ADB devine isoscel, iar DM este înălțimea la bază și, totodată, bisectoarea unghiului din vîrf.

Deoarece $DM = a$ și $AM = \frac{l}{2}$, rezultă :

$$\operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} \right)_{\max} = \frac{l}{2} : a = \frac{l}{2a} \quad (4)$$

și $x_{\max} = 2 \operatorname{arctg} \frac{l}{2a}$.

Fie : $l = 3 \text{ m}$; $a = 10 \text{ m}$. Din ecuația (4) rezultă atunci :

$$x = 2 \operatorname{arctg} \frac{3}{20} = 2 \operatorname{arctg} 0,15 \approx 2 \cdot 8^{\circ}30' \approx 16^{\circ}.$$

98. Cum punctele D , C și E se află într-un plan, iar cele două triunghiuri DCQ și ECL sînt egale, volumul mercurului din tub trebuie să rămînă de asemenea egal.

De aici se poate conchide că în cazul presiunii egale din cele două baloane (fig. 24.50) și coloanele de mercur CA și CB au aceeași lungime iar triunghiul ABC este isoscel.

Fie deci un triunghi isoscel AOB și un triunghi oarecare DOC în care avem :

$$AO = OB = \frac{s}{2} \text{ și } OD + OC = AO + OB = s$$

unde s este suma laturilor triunghiurilor care formează unghiul comun, demonstrînd că este valabilă $AB < CD$.

Demonstrația geometrică este :

Din punctul B se duce segmentul $BE = AD$ și paralel cu AD .

Punctele A , B , E și D formează un paralelogram $ABED$, din care se vede că avem :

$$DE \parallel AB \text{ și } DE = AB \quad (1), (2)$$

Deoarece $BE = AD$ și $AD = BC$, ultima reieșind din :

$$AO + BO = OA + OC + CB = AD + AO + OC = DO + OC, \text{ rezultînd : } BE = BC. \quad (3)$$

Deoarece $\angle ABE = \angle OAB$ și $\angle OAB = \angle OBA$, rezultă relația

$$\angle ABE = \angle OBA. \quad (4)$$

Din ecuațiile (3) și (4) se poate deduce că $AB \perp CE$ și, deci, $DE \perp CE$ vom avea atunci :

$$DE < CD \quad (5)$$

Din formulele (1) și (4) rezultă : $AB < CD$,
Demonstrația trigonometrică :

(1) Din ΔDOC , rezultă :

$$\frac{CD}{OC+OD} = \frac{2R \sin \widehat{DOC}}{2R \sin \widehat{ODC} + 2R \sin \widehat{OCD}} =$$

$$= \frac{\sin \frac{\widehat{DOC}}{2} \cos \frac{\widehat{DOC}}{2}}{\sin \frac{\widehat{ODC} + \widehat{OCD}}{2} \cdot \cos \frac{\widehat{ODC} - \widehat{OCD}}{2}}$$

$$\frac{CD}{OC+OD} = \frac{\sin \frac{\widehat{DOC}}{2}}{\cos \frac{\widehat{ODC} - \widehat{OCD}}{2}}$$

Dacă ținem seama că $OC+OD=s$, rezultă :

$$CD = \frac{s \sin \frac{\widehat{DOC}}{2}}{\cos \frac{\widehat{ODC} - \widehat{OCD}}{2}}$$

conform condițiilor problemei $\ast \widehat{DOC}$ și s rămân neschimbate.
De aceea, din ecuația (1) se poate spune că CD ia valoarea minimă
atunci când :

$$\ast \widehat{ODC} = \ast \widehat{OCD}, \text{ adică dacă } OC = OD = \frac{s}{2}. \quad (2)$$

Folosind teorema consinusului, din ΔDOC reiese :

$$(1) CD^2 = OD^2 + OC^2 - 2OD \cdot OC \cos \widehat{DOC}$$

Deoarece $OD = OA + AD = \frac{s}{2} + x$ și $OC = OB - BC = \frac{s}{2} - x$, relația (1) se poate transforma astfel :

$$(2) CD^2 = \left(\frac{s}{2} + x\right)^2 + \left(\frac{s}{2} - x\right)^2 - 2\left(\frac{s^2}{4} - x^2\right) \cos \widehat{DOC}$$

După simplificare se obține :

$$(3) CD = \sqrt{2(1 - \cos \widehat{DOC}) x^2 + \frac{s^2}{2} (1 + \cos \widehat{DOC})}$$

cum \widehat{DOC} și suma s rămân neschimbate, din ecuația (3) rezultă că CD ia valoarea minimă atunci când $x = 0$, adică dacă :

$$OD = OC = \frac{s}{2}.$$

99. Se poate vedea că sînt posibile următoarele șase rute :

$$1) S_1 = OA + b + a + BO$$

$$2) S_2 = OA + c + a + CO$$

$$3) S_3 = OC + b + c + BO$$

$$4) S_4 = OB + a + b + OA$$

$$5) S_5 = OC + a + c + AO$$

$$6) S_6 = OB + c + b + CO$$

cum $S_1 = S_4$, $S_2 = S_5$ și $S_3 = S_6$, problema dată conduce la compararea laturilor triunghiului.

Soluție trigonometrică. Din O se duce normala pe cele trei laturi ale triunghiului ABC , rezultînd punctele K, L, M și avem $OK \perp BC$; $OL \perp AC$ și $OM \perp AB$, precum și $OK = OL$, $OM = r$, unde r este raza cercului înscris. Mai departe avem

$$\widehat{OAL} = \frac{\alpha}{2}, \quad \widehat{OCK} = \frac{\gamma}{2} \text{ și } \widehat{OBA} = \frac{\beta}{2}$$

Vom obține :

$$OA = \frac{r}{\sin \frac{\alpha}{2}} \quad (1)$$

$$OB = \frac{r}{\sin \frac{\beta}{2}}$$

$$OC = \frac{r}{\sin \frac{\gamma}{2}}$$

$$a = BK + KC = r \left(\operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2} \right)$$

$$b = CL + LA = r \left(\operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \right) \quad (2)$$

$$c = AM + MB = r \left(\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} \right)$$

Mai departe, vom obține :

$$S_1 = r \left(\frac{1}{\sin \frac{\alpha}{2}} + \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} + 2 \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2} + \frac{1}{\sin \frac{\beta}{2}} \right)$$

$$S_2 = r \left(\frac{1}{\sin \frac{\alpha}{2}} + \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} + 2 \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2} + \frac{1}{\sin \frac{\beta}{2}} \right) \quad (3)$$

$$S_3 = r \left(\frac{1}{\sin \frac{\gamma}{2}} + 2 \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2} + \frac{1}{\sin \frac{\beta}{2}} \right)$$

Vom forma diferențele $S_1 - S_2$ și $S_3 - S_1$:

$$\begin{aligned}
 S_1 - S_2 &= r \left(\operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2} - \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} + \frac{1}{\sin \frac{\beta}{2}} - \frac{1}{\sin \frac{\gamma}{2}} \right) = \\
 &= r \left[\left(\frac{1}{\sin \frac{\beta}{2}} - \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} \right) - \left(\frac{1}{\sin \frac{\gamma}{2}} - \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2} \right) \right] = \\
 &= r \left(\frac{1 - \cos \frac{\beta}{2}}{\sin \frac{\beta}{2}} - \frac{1 - \cos \frac{\gamma}{2}}{\sin \frac{\gamma}{2}} \right) \\
 S_1 - S_2 &= r \left(\operatorname{tg} \frac{\beta}{4} - \operatorname{tg} \frac{\gamma}{4} \right) < 0.
 \end{aligned}$$

Deoarece din datele problemei se vede că inegalitatea este adevărată rezultă $S_1 < S_2$ (4)

În mod analog se obține:

$$\begin{aligned}
 S_3 - S_1 &= r \left(\frac{1 - \cos \frac{\gamma}{2}}{\sin \frac{\gamma}{2}} - \frac{1 - \cos \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}} \right) \\
 S_3 - S_1 &= r \left(\operatorname{tg} \frac{\gamma}{4} - \operatorname{tg} \frac{\alpha}{4} \right) < 0,
 \end{aligned}$$

de unde, din datele problemei $\gamma < \alpha$, rezultă

$$S_3 < S_1 \quad (5)$$

Din inecuațiile (4) și (5) se poate conchide imediat că cea mai scurtă din rute este dată de S_3 și, respectiv, S_6 , deoarece $S_3 = S_6$.

100. Aplicând teorema sinusurilor în triunghiurile CDE și $C_1D_1E_1$ (vezi fig. 24.51), vom obține :

$$\frac{v}{\sin y} = \frac{x}{\sin \alpha} \quad (1)$$

$$\frac{z}{\sin (\alpha + y)} = \frac{v}{\sin y} \quad (2)$$

$$\frac{z'}{\sin (\alpha - y)} = \frac{v}{\sin y} \quad (3)$$

unde z este viteza vaporului în raport cu malul în timpul mișcării de la A la B , dar z' este viteza în raport cu malul în timpul mișcării de la B la A . Componenta vitezei, datorită curentului se va considera V în CN pe care se bazează puterea motorului va fi notată cu n (în m/s), cu y vom nota unghiul pe care-l formează componenta x cu rezultanta z .

Din ecuațiile (1) și (3) vom obține :

$$x = \frac{v \sin \alpha}{\sin y} \quad (4)$$

$$z = v(\sin \alpha \operatorname{ctg} y + \cos \alpha) \quad (5)$$

$$z' = v(\sin \alpha \operatorname{ctg} y - \cos \alpha). \quad (6)$$

Aceste ecuații dau următorul sistem de inecuații ($S = AB$)

$$\begin{cases} \frac{s}{v(\sin \alpha \operatorname{ctg} y + \cos \alpha)} \geq t \\ \frac{s}{v(\sin \alpha \operatorname{ctg} y - \cos \alpha)} \leq t_1 \end{cases} \quad (7)$$

Soluția acestui sistem este :

$$\operatorname{arctg} \frac{vt \sin \alpha}{s - vt \cos \alpha} \leq y \leq \operatorname{arctg} \frac{vt_1 \sin \alpha}{s + vt_1 \cos \alpha} \quad (8)$$

$$\text{și } \frac{1}{t_1} \sqrt{s^2 + v^2 t_1^2 + 2 s v t_1 \cos \alpha} \leq x \leq \frac{1}{t} \sqrt{s^2 + v^2 t^2 - 2 v t \cos \alpha}$$

Exemplu numeric.

$$\text{Fie } s = 1\,200 \text{ m}$$

$$v = 1,9 \text{ m/s}$$

$$\alpha = 60^\circ$$

$$t = 120 \text{ s.}$$

$$t_1 = 180 \text{ s.}$$

În inecuațiile (8) și (9) rezultă :

$$\arctg 0,18 \leq y \leq \arctg 0,23$$

$$\frac{1395}{180} \leq x \leq \frac{1104}{120}$$

$$\text{adică : } 10^\circ \leq y \leq 12^\circ \text{ și } 7,7 \frac{\text{m}}{\text{s}} \leq x \leq 9,2 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

101. Ca strungul universal cu 3 bacuri (vezi fig. 24.52) se deplasează bacurile (1) simultan în care suprafețele care strâng presa pentru prelucrare se găsesc la distanțe egale față de axa de rotație a axului (pct. c). Aceasta simplifică și accelerează simțitor prinderea pieselor cu suprafețele exterioare cilindrice la care toate axele geometrice ale pieselor trebuie să coincidă. La prelucrarea de piese excentrice axa geometrică a piesei cilindrice prinse în universalul cu 3 bacuri raportat la axa de rotație trebuie să fie deplasată cu excentricitatea e . Pentru aceasta trebuie pus sub unul din bacuri o șaibă măsurată.

Din $\triangle OCA$ se va stabili :

$$OA^2 = AC^2 + OC^2 - 2 OC \cdot KC \quad (1)$$

$$\text{În } \triangle AKC : \widehat{KCA} = \frac{\alpha}{2} = \frac{120^\circ}{2} = 60^\circ \text{ și } KC = \frac{AC}{2}$$

Luăm în considerație că :

$$OA = \frac{D}{2} \cdot DC = e; \quad AC = \frac{D}{2} + x - e \text{ și înlocuind în (1) obținem :}$$

$$\frac{D^2}{4} = \left(\frac{D}{2} - e + x \right)^2 + e^2 - \left(\frac{D}{2} - e + x \right) e,$$

$$\text{sau : } y^2 - ey - \left(\frac{D^2}{4} - e^2 \right) = 0, \quad (2)$$

$$\text{unde } y = \frac{D}{2} - e + x.$$

Rezolvând ecuația de gradul 2, obținem :

$$y_{1,2} = \frac{e}{2} \pm \sqrt{\frac{e^2}{4} + \left(\frac{D^2}{4} - e^2 \right)} = \frac{e}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{D^2 - 3e^2}$$

înlocuind valoarea lui y în (2) găsim ecuația care dă grosimea plăcii

$$x_{1,2} = \pm \frac{\sqrt{D^2 - 3e^2} - (D - 3e)}{2}$$

$$\text{sau : } x_{1,2} = \frac{D}{2} [\pm \sqrt{1 - 3\varepsilon^2} - (1 - 3\varepsilon)]$$

$$\text{unde excentricitatea numerică este : } \varepsilon = \frac{e}{D}.$$

$$\text{În } \Delta \text{ COA luăm excentricitatea teoretică maximă } e_{\max} = \frac{D}{2\sqrt{3}}.$$

Excentricitatea numerică corespunzătoare este următoarea :

$$\varepsilon_{\min} = \frac{e_m}{D} = \frac{1}{2\sqrt{3}} = 0,288.$$

În cazul nostru excentricitatea numerică este :

$$\varepsilon = \frac{10}{100} = 0,1,$$

$$\text{iar grosimea plăcii } x = \frac{100 \text{ mm}}{2} [\sqrt{1 - 3 \cdot 0,1^2} - (1 - 3 \cdot 0,1)] \text{ sau}$$

$$x = 71,2 \text{ mm.}$$

102. Cantitatea Q kg de grâu netreierată conține $\frac{Qk}{100}$ kg impurități și $Q \frac{(100-k)}{100}$ kg boabe de cereale. La treierat rămâne întreaga cantitate de grâu neschimbată. Se schimbă însă partea impurităților — care se micșorează.

După primul treierat cantitatea de amestecuri se micșorează la $\frac{Qk}{100} \cdot \frac{q}{100}$ kg, formînd deci numai $\left(\frac{Qk}{100} - \frac{Qk}{100} \cdot \frac{q}{100} \right)$ kg.

Convertind, rezultă cantitatea de $\frac{Qk}{100} \cdot \frac{100-q}{100}$ kg. Cel de-al doilea treierat reduce cantitatea impurităților la $\frac{100-q}{100}$ din cantitatea rămasă după primul treierat. De aici, rezultă $\frac{Qk}{100} \left(\frac{100-q}{100} \right)^2$ kg.

Prin raționamente analoage, se ajunge la concluzia că după cel de al n -lea treierat masa amestecurilor s-a redus la $\frac{Qk}{100} \cdot \left(\frac{100-q}{100} \right)^n$ kg. Atunci întreaga cantitate rămasă după al n -lea treierat este:

$$\left[\frac{Qk}{100} \cdot \left(\frac{100-q}{100} \right)^n + \frac{Q(100-k)}{100} \right] \text{ kg.}$$

De aici, ținînd seama de condițiile din problemă, se poate formula următoarea inecuație:

$$\frac{\frac{Qk}{100} \cdot \left(\frac{100-q}{100} \right)^n}{\frac{Qk}{100} \cdot \left(\frac{100-q}{100} \right)^n + \frac{(100-k)}{100}} \leq \frac{f}{100}.$$

Această inecuație se poate simplifica astfel:

$$\left(\frac{100-q}{100} \right)^n \leq \frac{f(100-k)}{k(100-f)}.$$

Din (2) se obține prin logaritmare

$$n \lg \frac{100 - q}{100} \leq \lg \frac{f(100 - k)}{f(100 - f)}.$$

Dacă ținem seama în acest caz că $\frac{100 - q}{100} < 1$; deci

$\lg \frac{100 - q}{100} < 0$, atunci prin împărțirea inecuației (3) la valoarea negativă $\lg \frac{100 - q}{100}$, se obține inecuația (4) prezentată mai jos, la care s-a inversat semnul inegalității :

$$\frac{\lg \frac{f(100 - k)}{k(100 - f)}}{\lg \frac{100 - q}{100}} \leq n.$$

BIBLIOGRAFIE SELECTIVĂ

1. ARAMĂ, L., MORUZAN, T., *Culegere de probleme de calcul diferențial și integral*, Edit. tehnică, București, 1967.
2. ARY, QUINTELLA, *Matemática*, Companhia Editora Nacional, São Paulo, 1966.
3. ATANASIAN, S., *Gheometria*, vol. I, Moskva, 1973.
4. BANE, H., *Probleme de matematică*. Edit. didactică și pedagogică, București, 1977.
5. BARTOLI, C., *Mathématiques modernes — Complements*, Ed. Roudil, Paris, 1971.
6. CĂLUGĂRIȚA, G., ȘTEFĂNESCU, V. *Culegere de probleme de matematică*, Universitatea Populară, București, 1972.
7. CIUCU, G., CRAIU, V., SĂCUIU, I., *Probleme de teoria probabilităților*, Edit. tehnică, București, 1974.
8. COLIN, H., MATHIEU, J., *Mathématiques modernes*, Editions Roudil, Paris, 1971.
9. CORDUNEANU, A., RADU, G., POP, I., GRĂMADĂ, V., *Culegere de probleme de matematică*, Edit. Junimea, Iași, 1972.
10. CORNE CHRISTIAN, NATHAN FERNAND, *Eléments d'algèbre au baccalaureat*, 1971.
11. CRAIU, M., ROȘCULEȚ, M., *Culegere de probleme de analiză matematică*, Edit. didactică și pedagogică, București, 1976.
12. DEMIDOVITCH, B., *Recueil d'exercices et des problèmes d'analyse mathématique*, Edit. Mir, Moskva, 1972.
13. DOROFEEV, G., POTAPOV, N., ROZOV, N., *Elementary mathematics*, Edit. Mir, Moskva, 1973.
14. DRAGOMIR, P., DRAGOMIR, A., *Structuri algebrice*, Edit. Facla, Timișoara, 1975.
15. ENESCU, GHOERGHE, *Introducere în logica matematică*, Edit. științifică, București, 1965.
16. FREUDENTHAL, H., *Limbaajul logicii matematice*, Edit. tehnică, București, 1973.
17. GEORGESCU-BUZĂU, MATEI E., *Exerciții de teoria mulțimilor*, Edit. didactică și pedagogică, București, 1969.
18. GUIAȘU, S., MALIȚA, M., *Triade*, Edit. științifică, București, 1973.

19. IAGLOM, I. M., IAGLOM, A. M., *Probleme neelementare tratate elementar*, Edit. tehnică, București, 1962.
20. ION, I., RADU, N., *Algebra*, ed. a II-a, Edit. didactică și pedagogică, București, 1975.
21. KIPNIS, J. M., *Aufgabesammlung für ungleichungen*, Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin, 1964.
22. KURATOWSKI, K., *Introducere în teoria mulțimilor și în topologie*, Edit. tehnică, București, 1969.
23. LAVROV, I. A., MAXIMOV, L. L., *Probleme de logică*, Centrul de multiplicare al Universității București, 1973.
24. MOISIL, G., *Elemente de logică matematică și teoria mulțimilor*, Edit. științifică, București, 1968.
25. ONICESCU, OCTAV, *Strategia jocurilor cu aplicații la programarea liniară*, Edit. Academiei R.S.R., București, 1975.
26. ORIOL, R., *Mathématiques de l'apprentissage*, tom I, Arithmétique, tom II, Geometrie, Paris, 1964, 1965.
27. QUEYSANNE, M., *Algebre M. P. et speciales*, Paris, 1970.
28. RAMIS, E., *Exercices d'algebre*, Edit. Masson et Cie., Paris, 1974.
29. REISCHER, C., SÂMBOAN, A., *Culegere și probleme de teoria probabilităților și statistică matematică*, Edit. didactică și pedagogică, 1972.
30. SERVAIS, W., C. CLEAX, M. BIEFNOT, *Mathématique*, Editions Labor, Bruxelles.
31. SIMIONESCU, G., ȘTEFĂNESCU, V., *Aplicații ale calculului vectorial în geometrie și trigonometrie*, Edit. didactică și pedagogică, București 1975.
32. SCHKARIN, A., FEDJANOW, A., SANDLER, B., *Algebraische aufgaben aus der technik* — Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin, 1964.
33. SPERANZA, F., *Relații și structuri*, Edit. științifică și enciclopedică, București, 1975.
34. ȘTEFĂNESCU, V., POPA, T., ENACHE, M., *Cu privire la introducerea unor elemente din teoria mulțimilor și logica matematică în școala generală în Matematica în școala generală — Culegere de articole metodice și științifice*, S. S. M. R. S. R., București, 1976.



Redactor: ION MOGA
Tehnoredactor: CONSTANTIN IORDACHI
Coll de tipar: 56 cd. 1782
Tirajnl: 35.000 Bun de tipar: 15. 02. 1979.



C. 1782. I. P. INFORMAȚIA
str. Brezoianu nr. 23—25,
București

editura științifică și enciclopedică

Lei 23